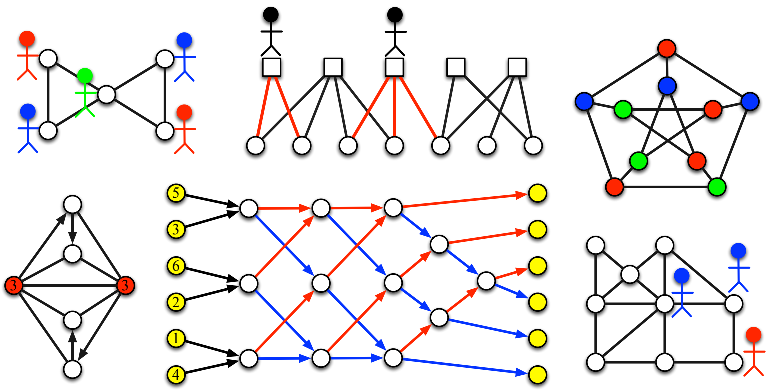
Graphes et Algorithmes
—
Jeux grandeur nature



Dorian Mazauric

Inria Sophia Antipolis - Méditerranée

Équipe-projet Algorithmes et Biologie Stucturale

`Dorian.Mazauric@inria.fr`

En collaboration avec Laurent Giauffret

Direction des Services Départementaux

de l'Éducation Nationale (DSDEN)

des Alpes-Maritimes

`Laurent.Giauffret@ac-nice.fr`

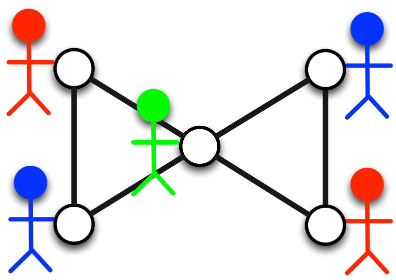
Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objectif de ce document

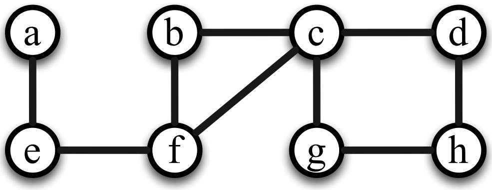
Ce document a pour vocation de présenter, d'expliquer et de jouer avec les graphes et les algorithmes. Ces notions sont centrales en informatique et sont très importantes pour un grand nombre d'applications concernant les réseaux de télécommunication (réseau sans fil, réseau optique, réseau du Web), les réseaux électriques, les réseaux routiers, en biologie (structurale) et pour résoudre un grand nombre de problèmes en général. L'objectif est de présenter des problèmes de graphes et des algorithmes sous la forme la plus simple et la plus ludique possible. Toutes les activités pourront être proposées sous la forme de jeux grandeur nature (plus de détails dans la suite du document). Dans l'exemple de jeu ci-dessous, cinq joueurs avec des chasubles de couleur doivent se positionner sur les cercles (sommets du graphe) de telle sorte que deux sommets reliés par un trait (arête du graphe) aient des joueurs avec des chasubles de couleur différente.



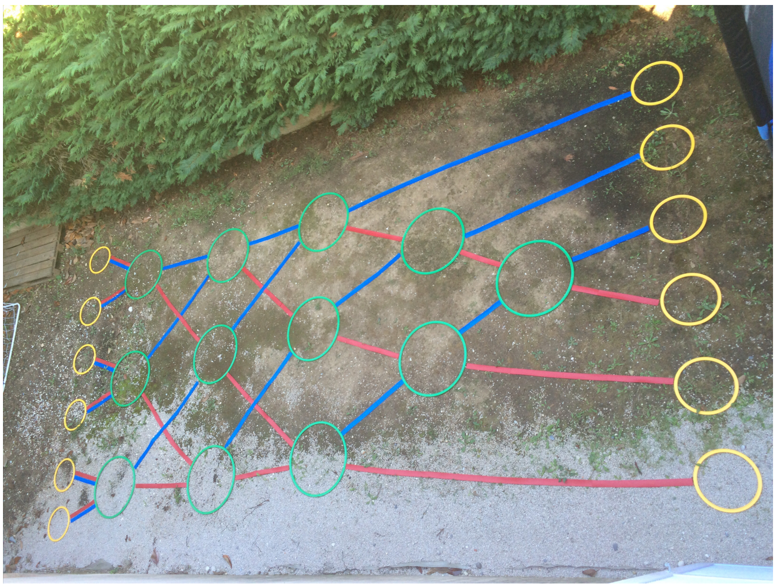
Ce problème sur les graphes est présenté sous la forme d'un *jeu de coloration des sommets* (Section 2.1). Une des applications possibles est liée à un *problème d'allocation de fréquences dans les réseaux sans fil*. Une couleur représente une fréquence et le graphe (les cercles et les traits, ou les sommets et les arêtes) modélise le réseau de télécommunication sans fil (Section 2.1.2).

1.2 Qu'est-ce qu'un graphe ?

Les graphes sont utilisés dans toutes les activités proposées dans ce document. Cette notion est très importante car un graphe permet de représenter un grand nombre de concepts et de réseaux de manière simple. Un graphe est défini par un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes.



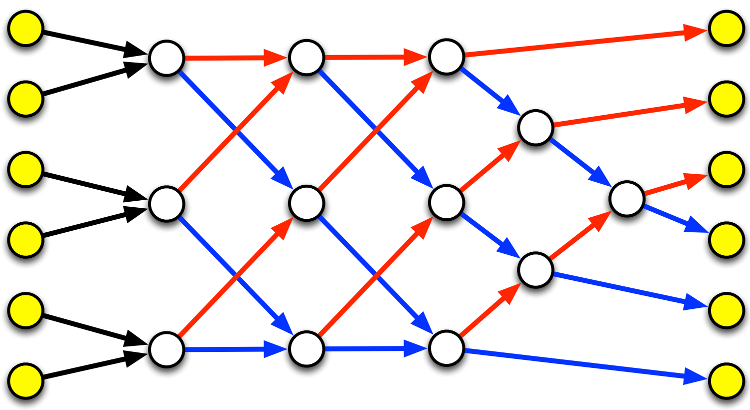
Les sommets sont les cercles avec une lettre à l'intérieur et les arêtes sont les traits (segments) qui relient un sommet à un autre. Donc notre exemple, il y a huit sommets et neuf arêtes. Le sommet b et le sommet f sont reliés par une arête. En illustration, nous pouvons voir les sommets comme des villes et les arêtes comme des routes reliant deux villes. Donc notre exemple, il y a huit villes et neuf routes. Il y a une route reliant la ville b et la ville f.
Toutes les activités expliquées dans ce document peuvent se décliner dans trois espaces : l'espace d'une feuille de papier, l'espace d'un plateau de jeu et l'espace grandeur nature. Par exemple, pour le troisième espace, il est possible d'utiliser des cerceaux et des lattes en plastique comme illustré dans la photographie ci-dessous.



1.3 Jeux grandeur nature

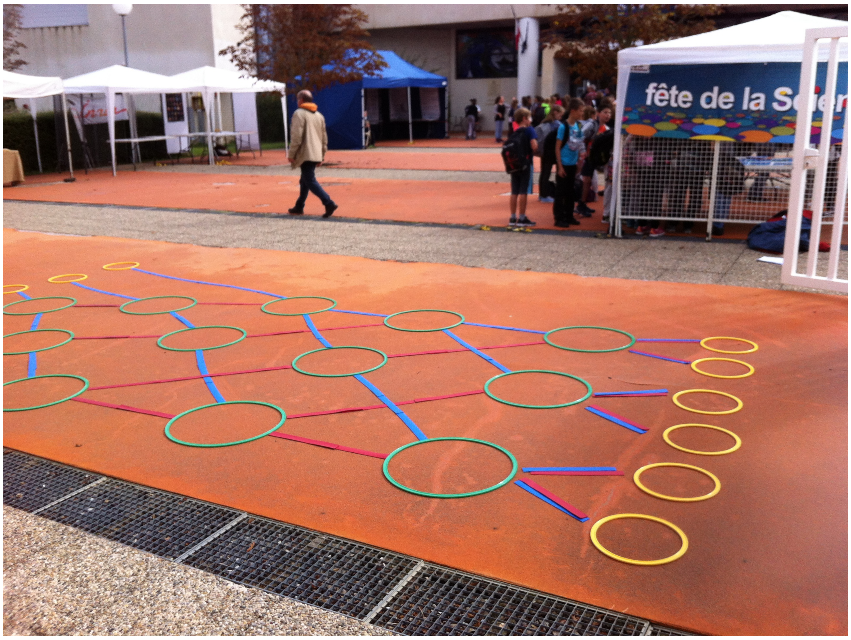
Ce document explique comment proposer différentes activités, liées aux graphes et aux algorithmes sur les graphes, sous la forme de jeux. Cela permettra aux enseignants, aux professeurs, aux écoliers, aux collégiens, aux lycéens, au grand public... d'appréhender des notions et des problèmes complexes, de manière simple et ludique. Les jeux pourront être proposés de manière conventionnelle (par exemple en imprimant les jeux et leurs solutions) ou en les construisant grandeur nature (par exemple en utilisant des cerceaux et des lattes en plastique, ou en dessinant sur le sol avec des craies).

Pour illustrer cela, dans l'activité *Trions !* (Section 5.1), il s'agira de jouer dans des graphes dans le but de trier une liste de nombres dans l'ordre croissant (initialement ces nombres sont dans un ordre quelconque). Les joueurs auront chacun un nombre attribué et des règles vont permettre aux joueurs de se déplacer dans le graphe et à la fin les nombres seront triés de manière croissante. Considérons par exempe six éléments à trier. Cette activité peut être présentée en imprimant le graphe ci-dessous ou en le construisant grandeur nature.



Les six joueurs se positionnent initialement sur les sommets jaunes de gauche. Ces joueurs vont ensuite se déplacer dans le graphe avant d'atteindre les six sommets jaunes de droite. La règle du jeu est la suivante : lorsque deux joueurs sont sur un même sommet blanc, alors le joueur avec le plus petit nombre suit le chemin rouge (flèche rouge) et le joueur avec le grand nombre suit le chemin bleu (flèche bleue). Si un joueur est seul sur un sommet blanc, alors il attend de ne plus d'être.

L'idéal est de construire ce graphe pour jouer grandeur nature (c'est l'objectif de ce document) comme illustré par les photographies suivantes et dans la vidéo `https://youtu.be/pd3EnV-gbbo`.



Et à la fin du jeu, les nombres (les joueurs) sont triés dans l'ordre croissant :

1, 2, 3, 4, 5 et 6 !

Chapitre 2

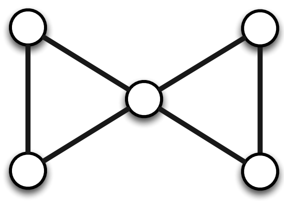
Jeux de position dans les graphes

2.1 Coloration des sommets

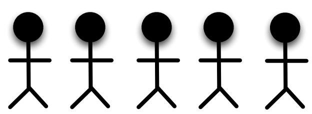
Nous expliquons tout d'abord les règles du *jeu de coloration des sommets* et décrivons une de ses applications possibles en lien avec un *problème d'allocation de fréquences dans les réseaux sans fil*. Nous présentons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

2.1.1 Règles du jeu et exemple

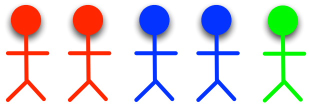
Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque. Considérons par exemple le graphe suivant composé de cinq sommets.



Nombre de joueurs. Le nombre de joueurs est égal au nombre de sommets dans le graphe. Le jeu est collaboratif : tous les joueurs gagnent ou tous les joueurs perdent. Dans notre exemple, il y a cinq joueurs.

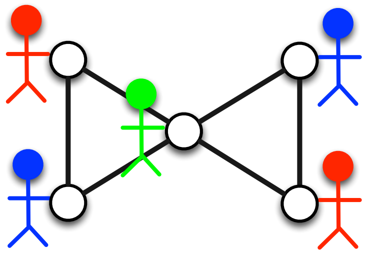


Accessoires. Chaque joueur a une chasuble de couleur. Les couleurs des chasubles sont fixées à l'avance. Pour les cinq joueurs précédents, nous pouvons avoir par exemple deux joueurs avec une chasuble rouge, deux joueurs avec une chasuble bleue et un joueur avec une chasuble verte.

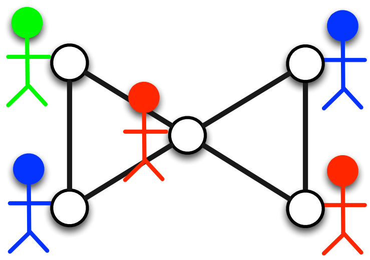


But du jeu. Les joueurs doivent se positionner sur les sommets du graphe (un joueur par sommet) de telle sorte que, pour chacune des arêtes du graphe, les deux joueurs aux deux extrémités de l'arête aient des chasubles de couleur différente.

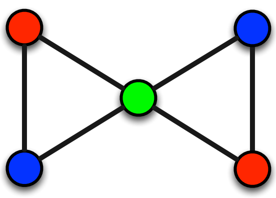
Exemple de solution. La figure suivante décrit une solution pour notre exemple.



Exemple de positionnement non valide. La figure suivante montre un positionnement non valide car les deux joueurs avec des chasubles rouges sont à deux extrémités d'une même arête. Pour ce graphe, le joueur avec une chasuble verte doit nécessairement se positionner sur le sommet central.



Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, la couleur de chaque sommet représentera la couleur de la chasuble du joueur positionné sur ce sommet. La solution pour notre exemple est décrite dans la figure suivante.

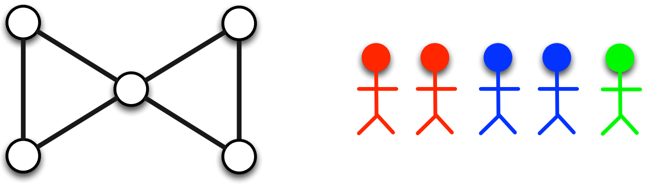


2.1.2 Lien avec l'allocation de fréquences dans les réseaux sans fil

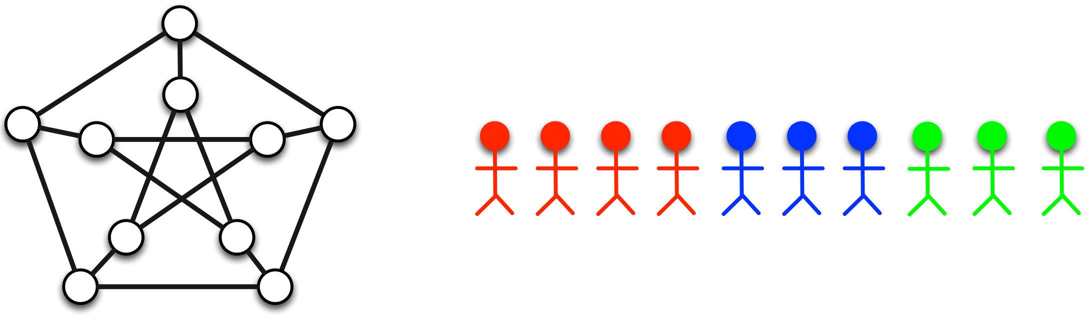
Nous expliquons une des applications en lien avec l'allocation de fréquence dans les réseaux de télécommunication sans fil. Dans ce type de réseaux, deux émetteurs trop proches ne peuvent pas émettre sur une fréquence identique. En effet, dans ce cas, il y aurait des interférences et certaines communications ne seraient alors plus effectuées correctement. Dans ce contexte, il faut alors attribuer une fréquence différente pour chacun des deux émetteurs. De plus, il n'est pas envisageable d'avoir un nombre de fréquences égal au nombre d'émetteurs. Il faut donc attribuer une fréquence à chaque émetteur en respectant toutes les contraintes d'interférence pour tous les émetteurs du réseau tout en minimisant le nombre de fréquences différentes pour y parvenir. Ce problème est modélisé par un problème de coloration de sommets dans un graphe construit à partir du réseau. Il y a un sommet par émetteur et il y a une arête entre deux sommets si et seulement si les deux émetteurs correspondants à ces deux sommets sont trop proches pour utiliser la même fréquence. Le problème revient alors à donner une couleur à chacun des sommets (deux sommets reliés par une arête ont des couleurs différentes) tout en minimisant le nombre total de couleurs utilisées. Les couleurs représentent dans ce contexte les fréquences. Par exemple, si le réseau correspond à notre graphe décrit précédemment, alors le plus petit nombre de couleurs (fréquences) permettant d'obtenir une solution valide est trois.

2.1.3 Graphes pour jouer

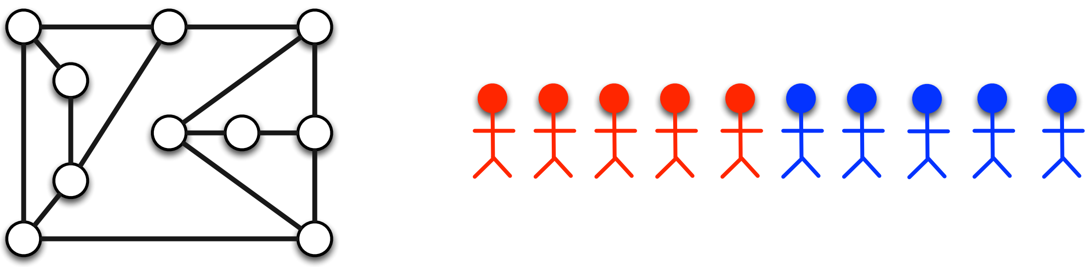
Jeu 1. Le graphe est composé de cinq sommets. Il y a deux joueurs avec une chasuble rouge, deux joueurs avec une chasuble bleue et un joueur avec une chasuble verte.



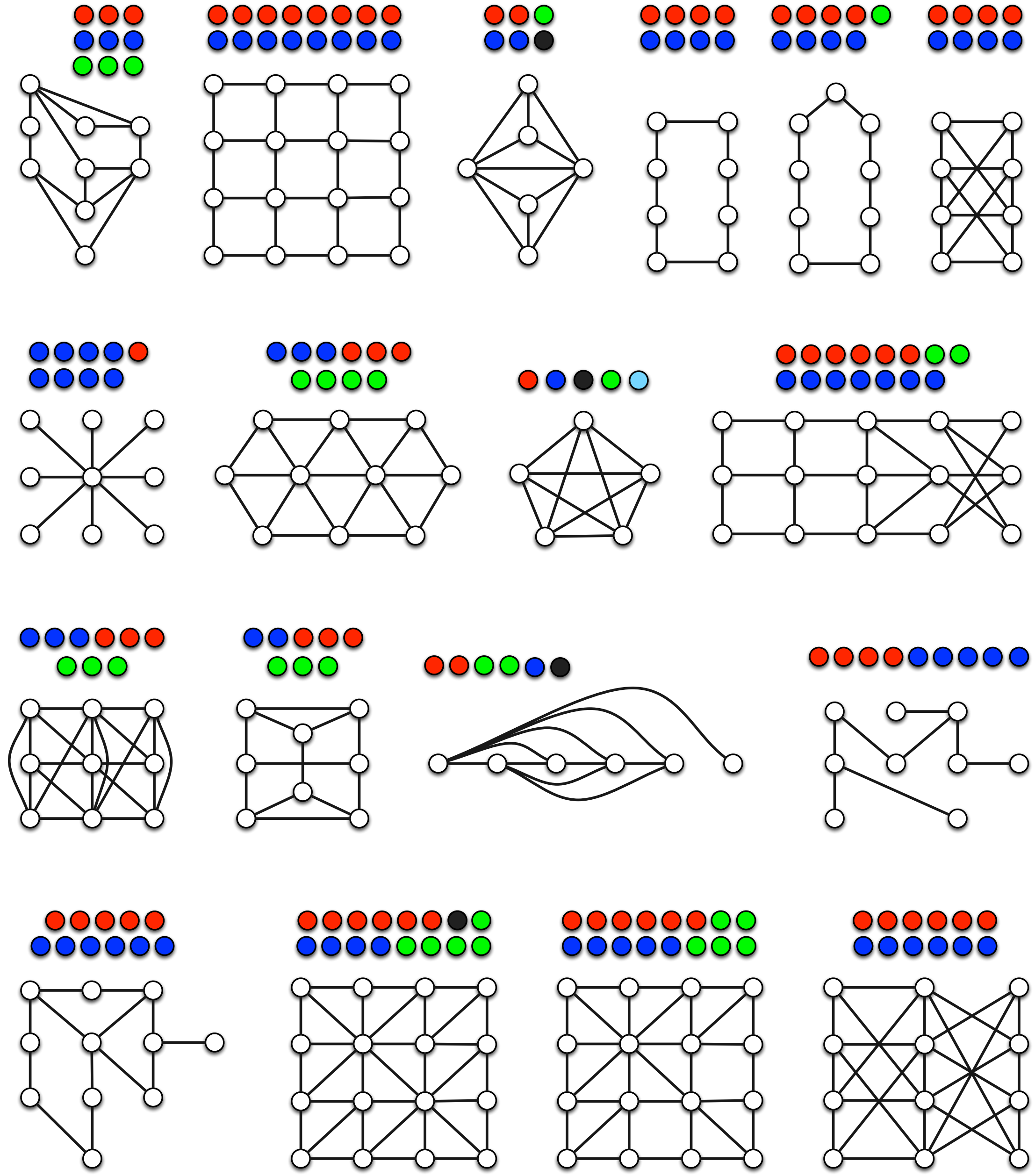
Jeu 2. Le graphe est composé de dix sommets. Il y a quatre joueurs avec une chasuble rouge, trois joueurs avec une chasuble bleue et trois joueurs avec une chasuble verte.



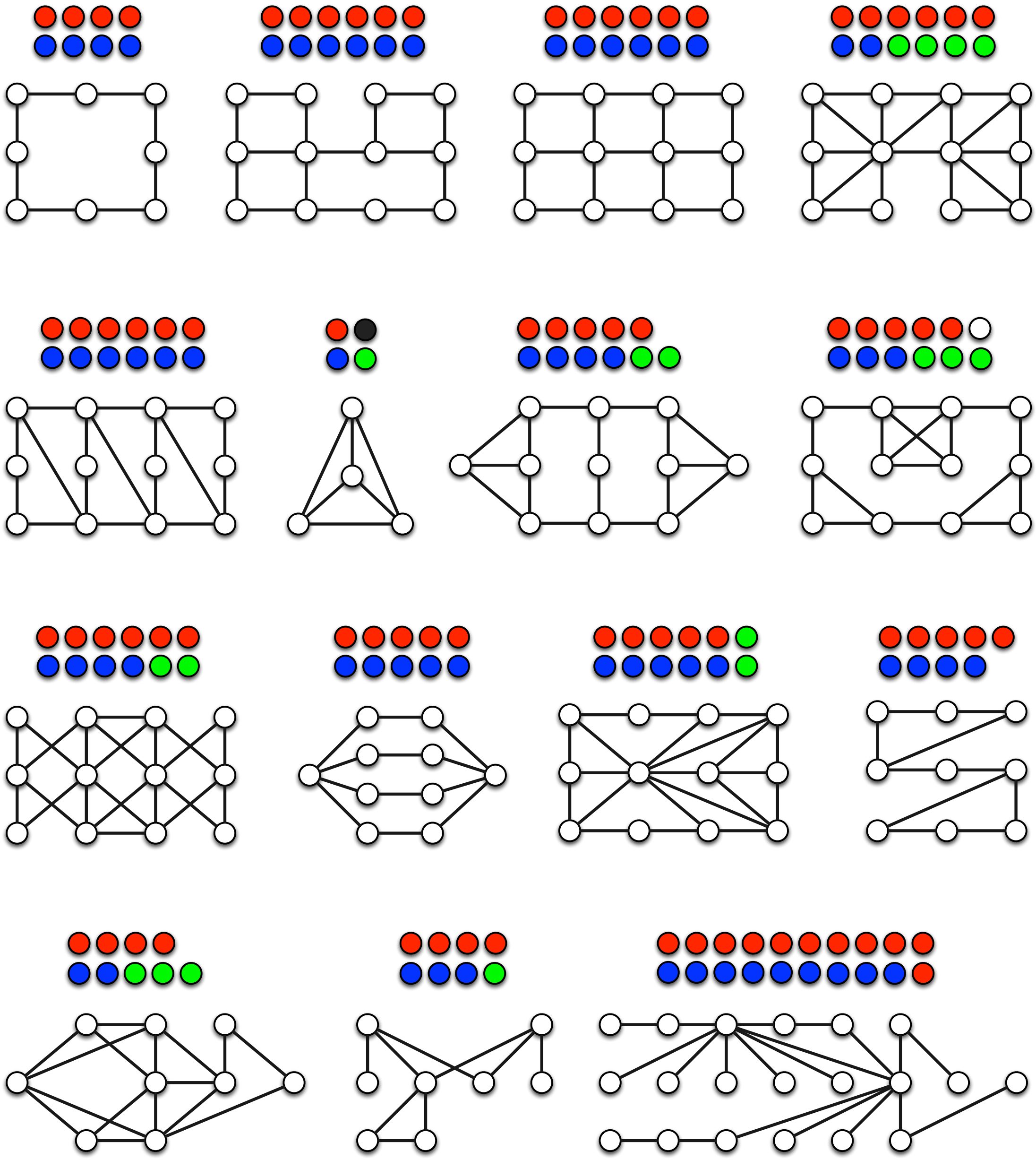
Jeu 3. Le graphe est composé de dix sommets. Il y a cinq joueurs avec une chasuble rouge et cinq joueurs avec une chasuble bleue.



Jeux 4 à 21. La figure suivante décrit dix-huit jeux de coloration des sommets. La répartition des couleurs des chasubles est représentée par les sommets de couleur situés au dessus de chacun des graphes.

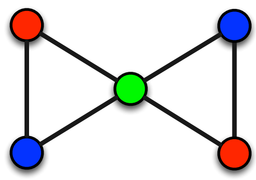


Jeux 22 à 36. La figure suivante décrit quinze jeux de coloration des sommets. La répartition des couleurs des chasubles est représentée par les sommets de couleur situés au dessus de chacun des graphes.

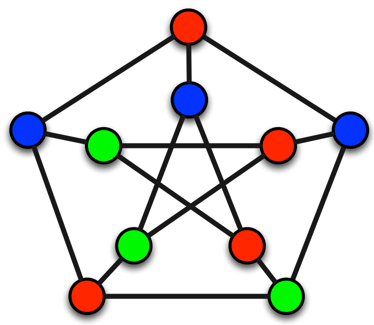


2.1.4 Solutions des jeux

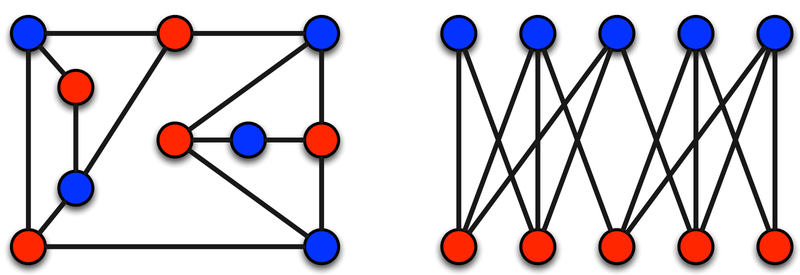
Solution du jeu 1.



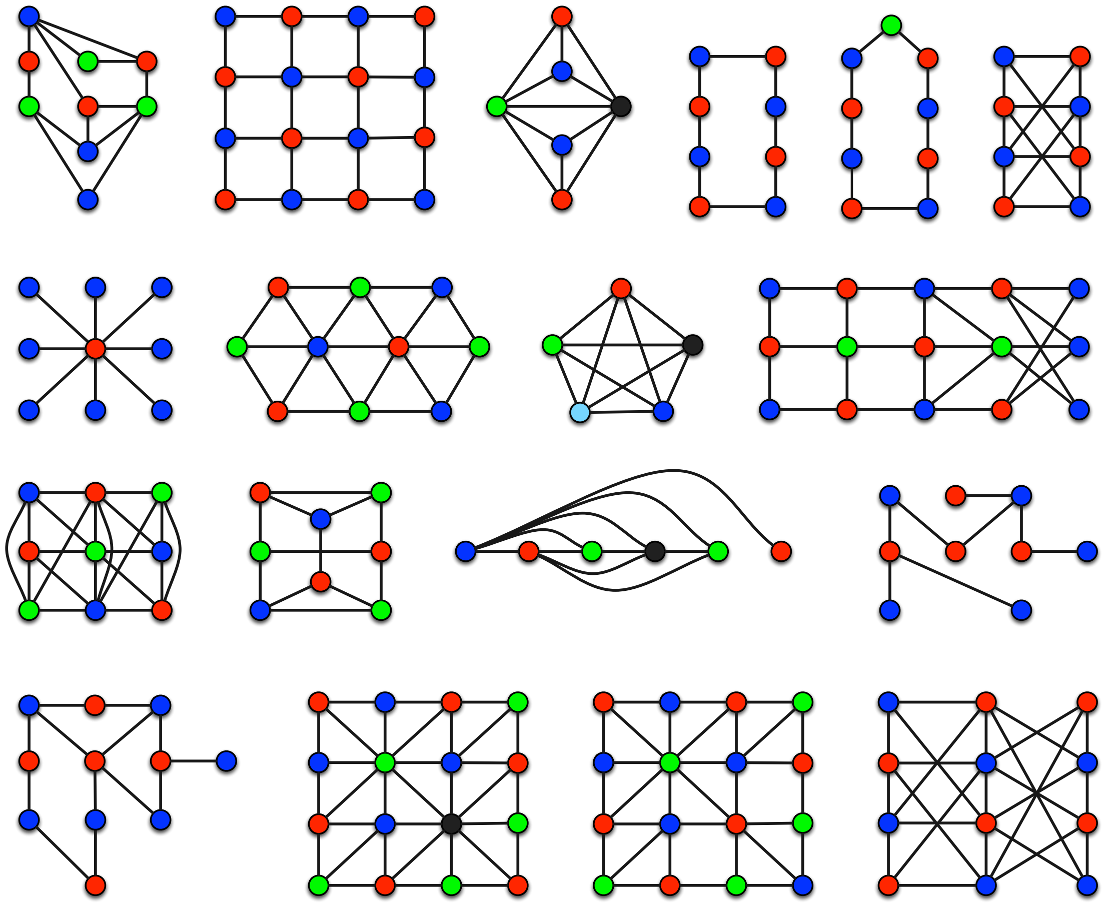
Solution du jeu 2. La figure suivante décrit une solution pour le jeu 2 de coloration des sommets. Les deux couleurs de chasubles des deux joueurs aux deux extrémités de chaque arête sont différentes. Notons qu'il n'y a pas de solution si, par exemple, cinq joueurs ont une chasuble rouge. En effet, en plus du nombre total de couleurs utilisées, la répartition des couleurs des chasubles est donc déterminante dans l'existence d'une solution pour le jeu de coloration des sommets. De plus, il n'y a pas de solution si le nombre total de couleurs utilisées est 2.



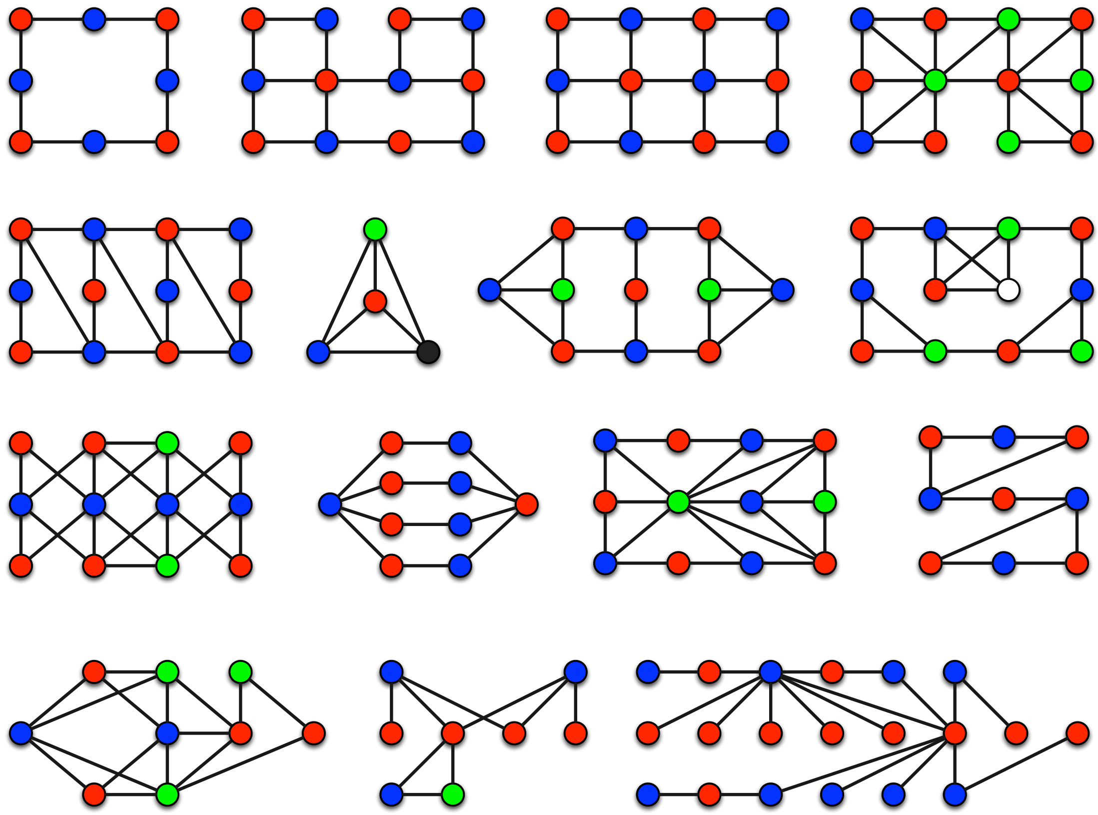
Solution du jeu 3. La figure suivante décrit une solution pour le jeu 3 de coloration des sommets. Un graphe pour lequel il existe une coloration des sommets avec deux couleurs, est un *graphe biparti*. Il peut être représenté par deux ensembles de sommets (pas nécessairement de même taille) tels que toutes les arêtes du graphe sont entre deux sommets n'appartenant pas au même ensemble. Le graphe de droite est une autre représentation (les sommets ont été déplacés) de cette solution.



Solutions des jeux 4 à 21.



Solutions des jeux 22 à 36.

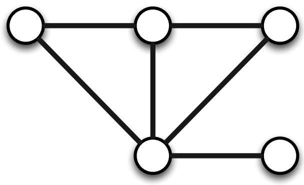


2.2 Les sommets veulent leur indépendance

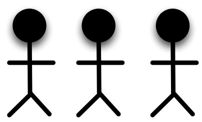
Nous expliquons tout d'abord les règles du *jeu de l'indépendance* et présentons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

2.2.1 Règles du jeu et exemple

Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque. Considérons par exemple le graphe suivant composé de cinq sommets.

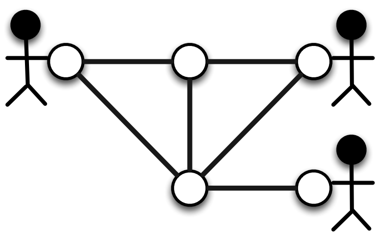


Nombre de joueurs. Le nombre de joueurs est déterminé avant le début du jeu. Le jeu est collaboratif : tous les joueurs gagnent ou tous les joueurs perdent. Dans notre exemple, il y a trois joueurs.

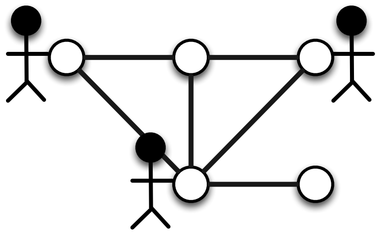


But du jeu. Les joueurs doivent se positionner sur les sommets du graphe (deux joueurs ne peuvent pas être sur un même sommet) de telle sorte que chaque sommet ayant un joueur positionné dessus n'ait pas de sommet voisin contenant également un joueur (les sommets voisins d'un sommet représentent tous les sommets qui partagent une arête avec ce sommet). Autrement dit, pour chacune des arêtes, il y a au plus une de ses deux extrémités qui contient un joueur.

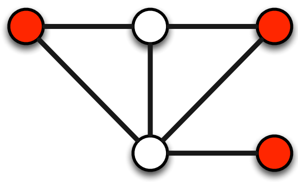
Exemple de solution. La figure suivante représente une solution pour notre exemple. Notons que si le nombre de joueurs est quatre, alors il n'y a pas de solution pour ce graphe.



Exemple de positionnement non valide. La figure suivante montre un positionnement non valide car deux joueurs sont aux deux extrémités d'une même arête.



Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, un sommet rouge représentera un sommet avec un joueur positionné dessus. La solution pour notre exemple est décrite dans la figure suivante.

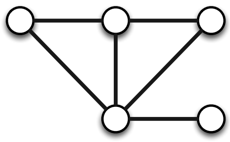


2.2.2 Une application pour l'organisation de votre fête

Vous souhaitez organiser une fête avec vos amis. La difficulté est que certaines personnes ne s'apprécient pas. D'une manière assez simplifiée, nous supposons ici que deux personnes sont amis ou ennemis. Vous voulez inviter le plus grand nombre de personnes possibles à votre fête mais vous ne voulez pas que deux ennemis s'y trouvent. Pour résoudre ce problème, nous construisons un graphe qui va représenter votre réseau. Il y a un sommet par personne et il y a une arête entre deux sommets si les deux personnes correspondantes à ces sommets sont ennemis. Si deux personnes sont amis, alors il n'y a pas d'arête entre les deux sommets correspondants à ces deux personnes. Il faut alors trouver le plus grand nombre de joueurs tel qu'il existe une solution pour le jeu de l'indépendance. Par exemple si votre réseau est le graphe correspondant à notre exemple, vous pourrez inviter trois personnes au maximum (voir solution décrite précédemment).

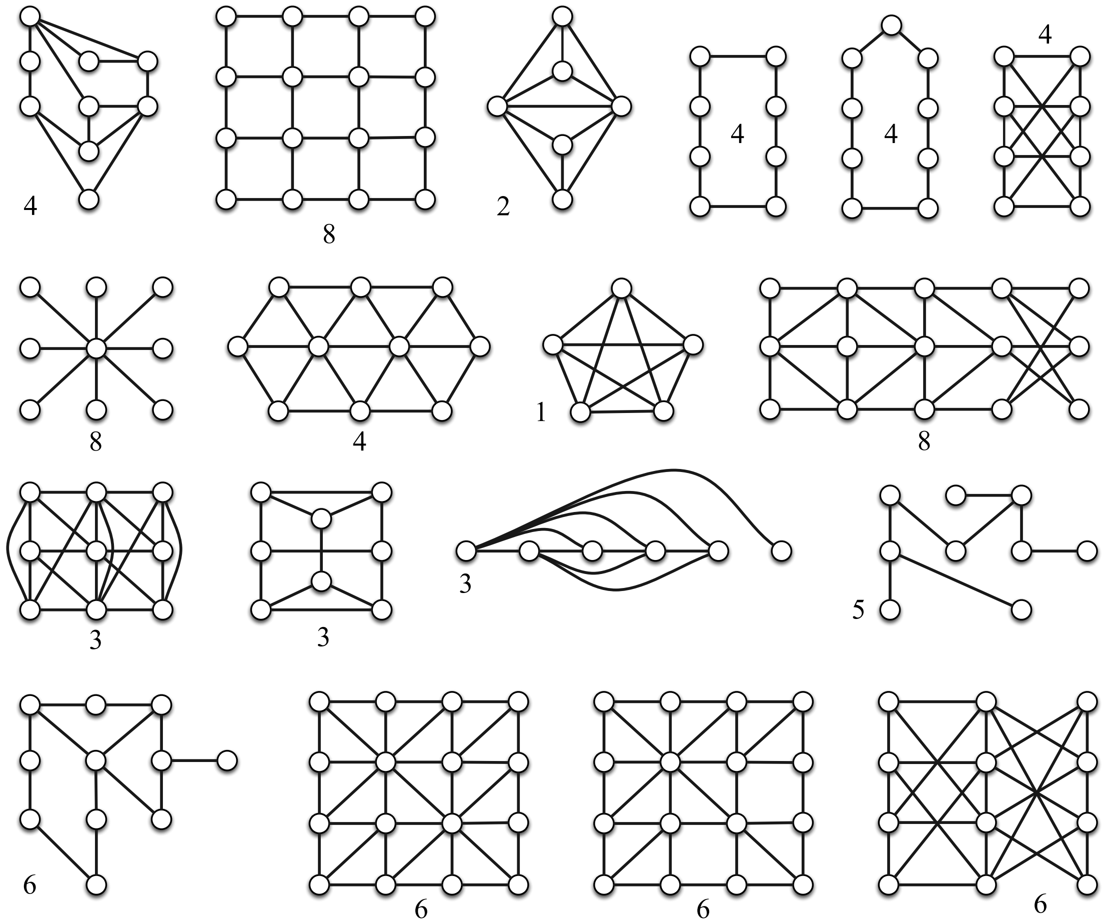
2.2.3 Graphes pour jouer

Jeu 1. Le graphe est composé de cinq sommets et il y a trois joueurs.

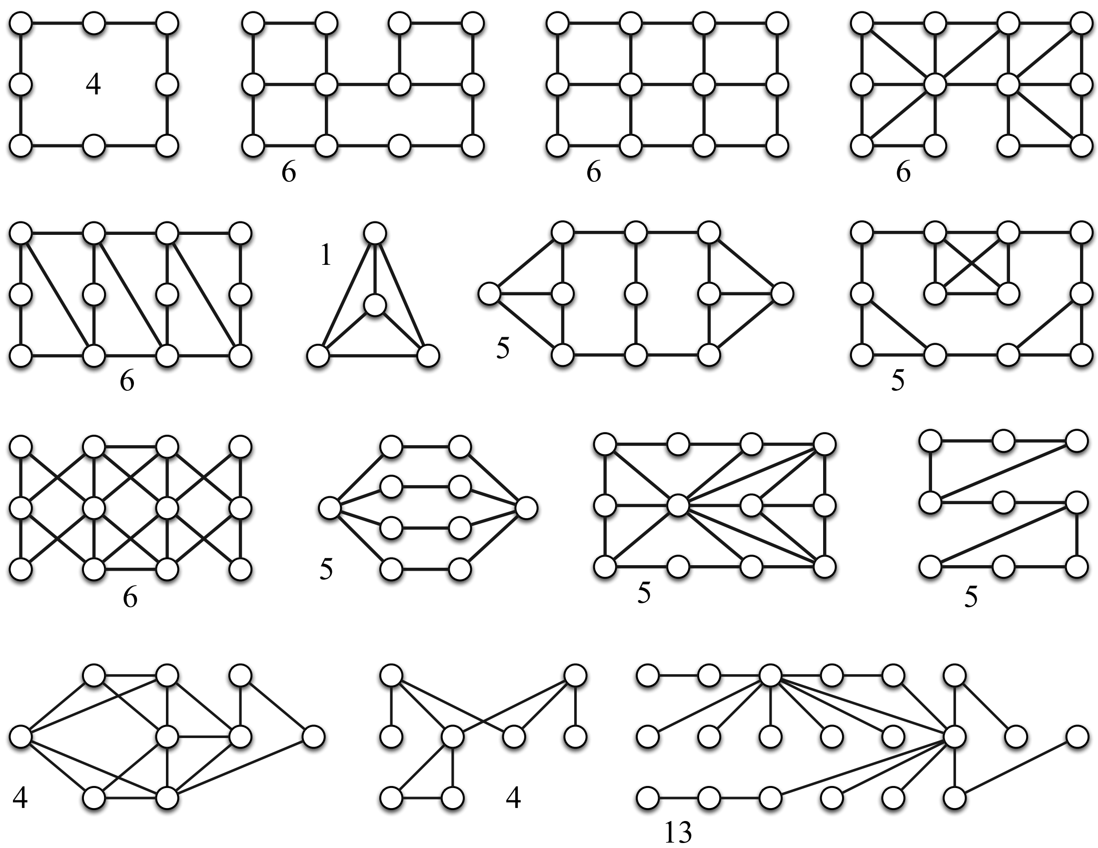


3

Jeux 2 à 19. La figure suivante décrit dix-huit jeux de l'indépendance. Le nombre de joueurs est indiqué pour chacun des graphes.



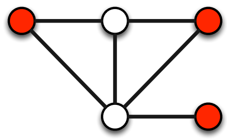
Jeux 20 à 34. La figure suivante décrit quinze jeux de l'indépendance. Le nombre de joueurs est indiqué pour chacun des graphes.



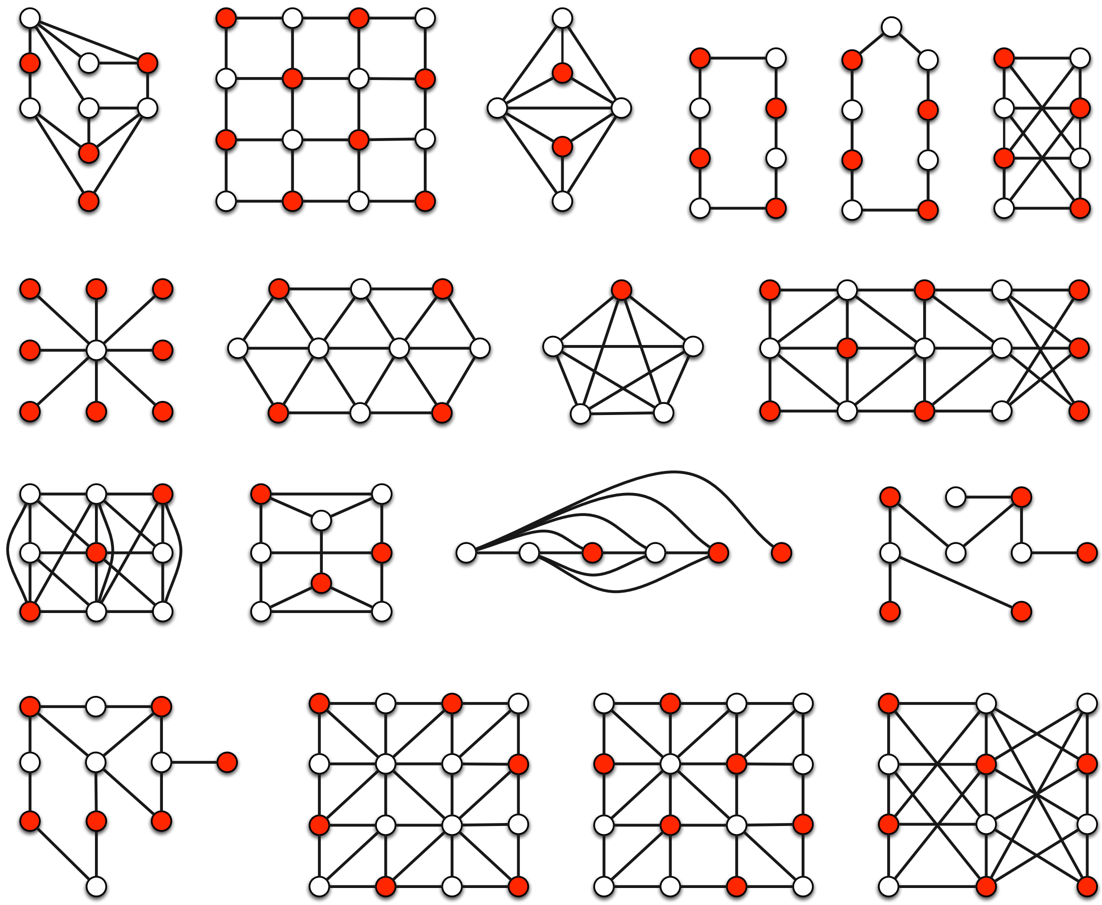
2.2.4 Solutions des jeux

Il est important de noter que, pour certains jeux, plusieurs solutions existent.

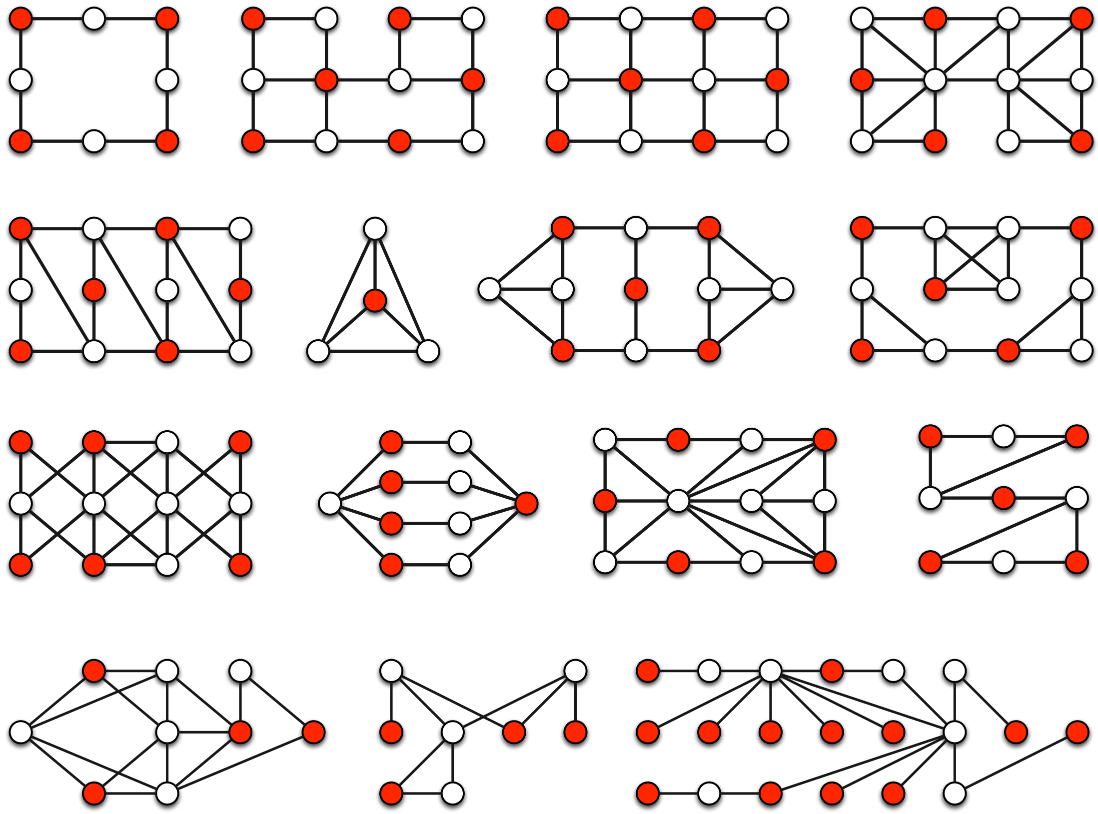
Solution du jeu 1.



Solutions des jeux 2 à 19.



Solutions des jeux 20 à 34.

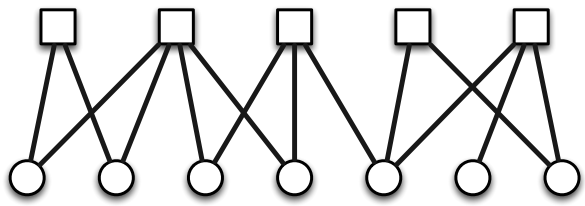


2.3 Couverture des sommets

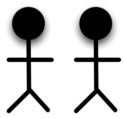
Nous expliquons tout d'abord les règles du *jeu de couverture des sommets* et présentons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

2.3.1 Règles du jeu et exemple

Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe biparti quelconque. Un graphe est biparti s'il est possible de séparer ses sommets en deux groupes tels que toutes les arêtes du graphe sont entre deux sommets n'appartenant pas au même groupe. Les sommets peuvent donc être partitionner en deux sous-ensembles : les sommets carrés et les sommets ronds. Considérons par exemple le graphe suivant et une telle partitition des sommets.

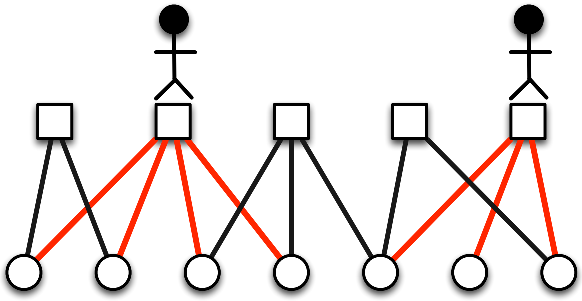


Nombre de joueurs. Le nombre de joueurs est déterminé avant le début du jeu. Le jeu est collaboratif : tous les joueurs gagnent ou tous les joueurs perdent. Dans notre exemple, il y a deux joueurs.

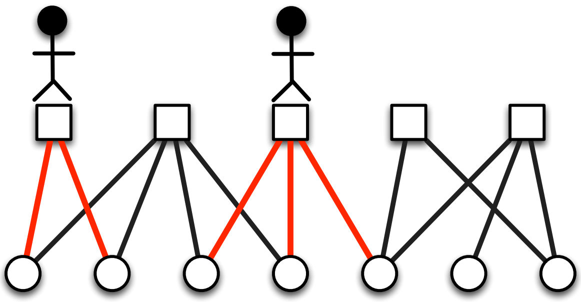


But du jeu. Les joueurs doivent se positionner sur les sommets carrés du graphe (deux joueurs ne peuvent pas être sur un même sommet) de telle sorte que chaque sommet rond ait au moins un sommet carré voisin ayant un joueur positionné dessus (les sommets voisins d'un sommet représentent tous les sommets qui partagent une arête avec ce sommet). Autrement dit, l'ensemble des sommets ronds voisins des sommets carrés avec un joueur positionné dessus représente tous les sommets ronds. Un sommet rond est dit couvert s'il a au moins un sommet carré voisin avec un joueur positionné dessus.

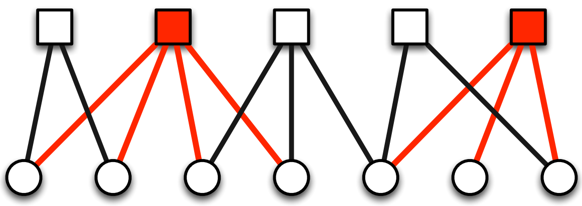
Exemple de solution. La figure suivante représente une solution pour notre exemple. Les arêtes rouges représentent la couverture des sommets ronds par les sommets carrés. Notons que s'il n'y a qu'un joueur, alors il n'y a pas de solution pour ce graphe.



Exemple de positionnement non valide. La figure suivante montre un positionnement non valide car il y a deux sommets ronds qui ne sont pas couverts par les sommets carrés avec un joueur positionné dessus.

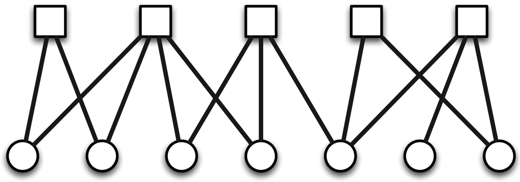


Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, un sommet carré rouge représentera un sommet carré avec un joueur positionné dessus. Les arêtes rouges décrivent les couvertures des sommets ronds par les sommets carrés rouges. La solution pour notre exemple est décrite dans la figure suivante.



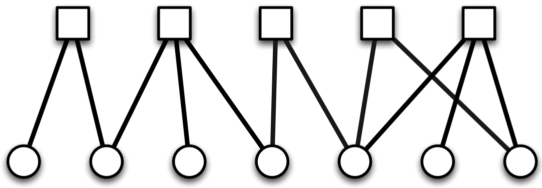
2.3.2 Graphes pour jouer

Jeu 1. Il y a cinq sommets carrés, sept sommets ronds et deux joueurs.

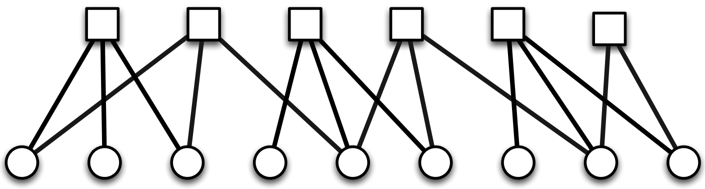


2

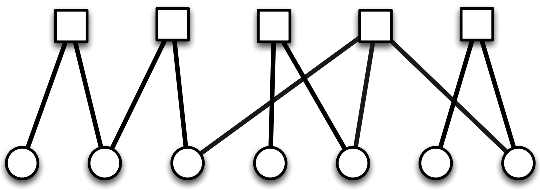
Jeux 2 à 5. La figure suivante décrit quatre jeux de couverture des sommets. Le nombre de joueurs est indiqué à côté de chacun des graphes.



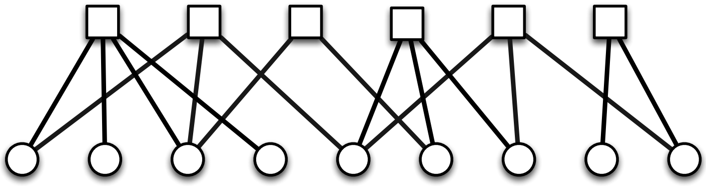
3



3



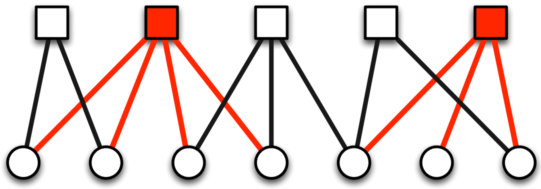
4



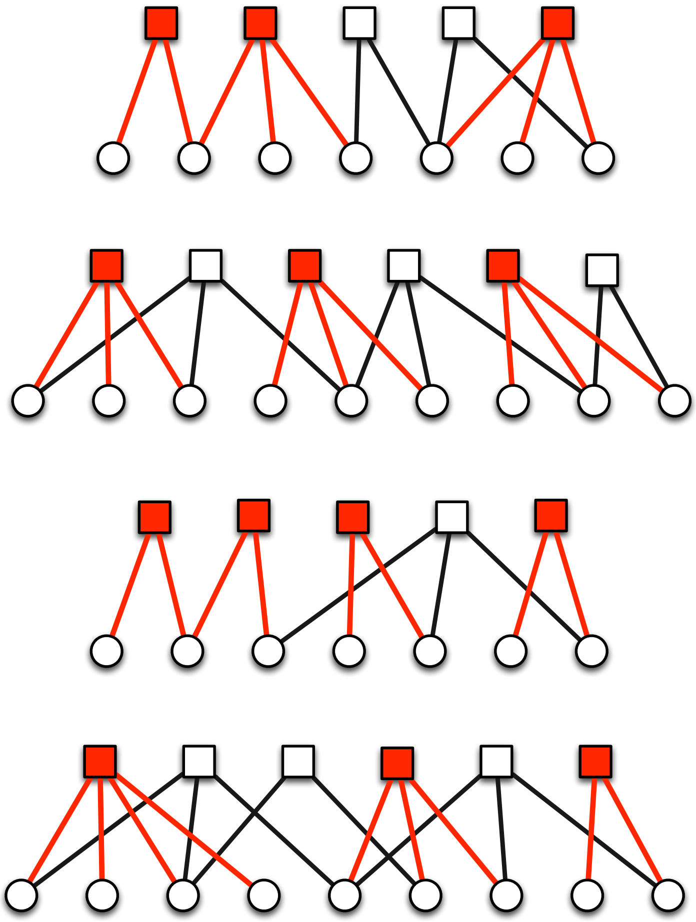
3

2.3.3 Solutions des jeux

Solution du jeu 1.



Solutions des jeux 2 à 5. Notons qu'il existe une autre solution pour le jeu 4.



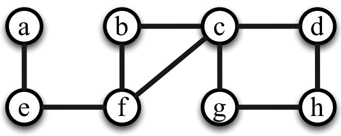
2.4 Il faut casser tous les cycles

Nous expliquons tout d'abord les règles du *jeu des cycles* avant de présenter des graphes pour jouer et des solutions.

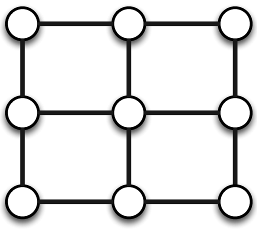
2.4.1 Règles du jeu et exemple

Nous définissons tout d'abord la notion de cycle, qui est centrale pour ce jeu.

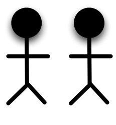
Qu'est-ce qu'un cycle ? Un cycle est un chemin tel que le premier sommet et le dernier sommet sont reliés par une arête. Un chemin est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs dans cette liste sont nécessairement reliés par une arête. Par exemple, la suite de sommets b, c, f est un cycle du graphe décrit ci-dessous, car c'est un chemin et le sommet f et le sommet b sont reliés par une arête. Autre exemple, la suite de sommets c, d, h, g forme également un cycle dans le graphe.



Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque. Considérons par exemple le graphe suivant composé de neuf sommets.

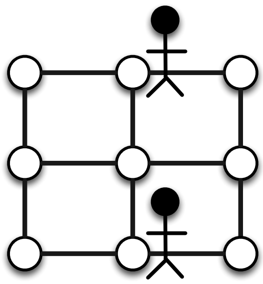


Nombre de joueurs. Le nombre de joueurs est déterminé avant le début du jeu. Le jeu est collaboratif : tous les joueurs gagnent ou tous les joueurs perdent. Dans notre exemple, il y a deux joueurs.

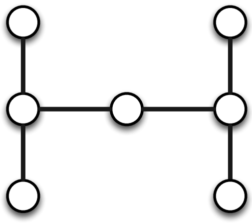


But du jeu. Les joueurs doivent se positionner sur les sommets du graphe (deux joueurs ne peuvent pas être sur un même sommet) de telle sorte que chaque cycle du graphe contienne au moins un sommet avec un joueur positionné dessus. Autrement dit, les joueurs doivent *casser* tous les cycles.

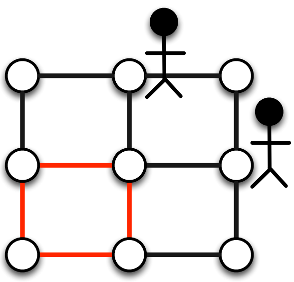
Exemple de solution. La figure suivante représente une solution pour notre exemple. Tous les cycles du graphe passent par au moins un sommet avec un joueur positionné dessus. Notons qu'il n'y a pas de solution s'il n'y a qu'un joueur.



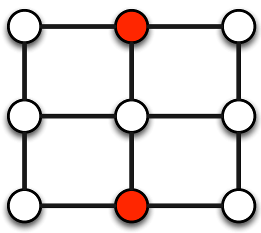
De manière équivalente, si tous les sommets avec un joueur positionné dessus sont supprimés, alors le graphe ne contient plus de cycle.



Exemple de positionnement non valide. Dans la figure suivante, il y a un cycle (arêtes rouges) qui ne contient aucun joueur.

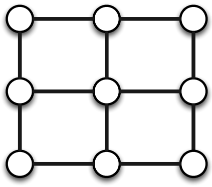


Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, un sommet rouge représentera un sommet avec un joueur positionné dessus. La solution pour notre exemple est décrite dans la figure suivante.



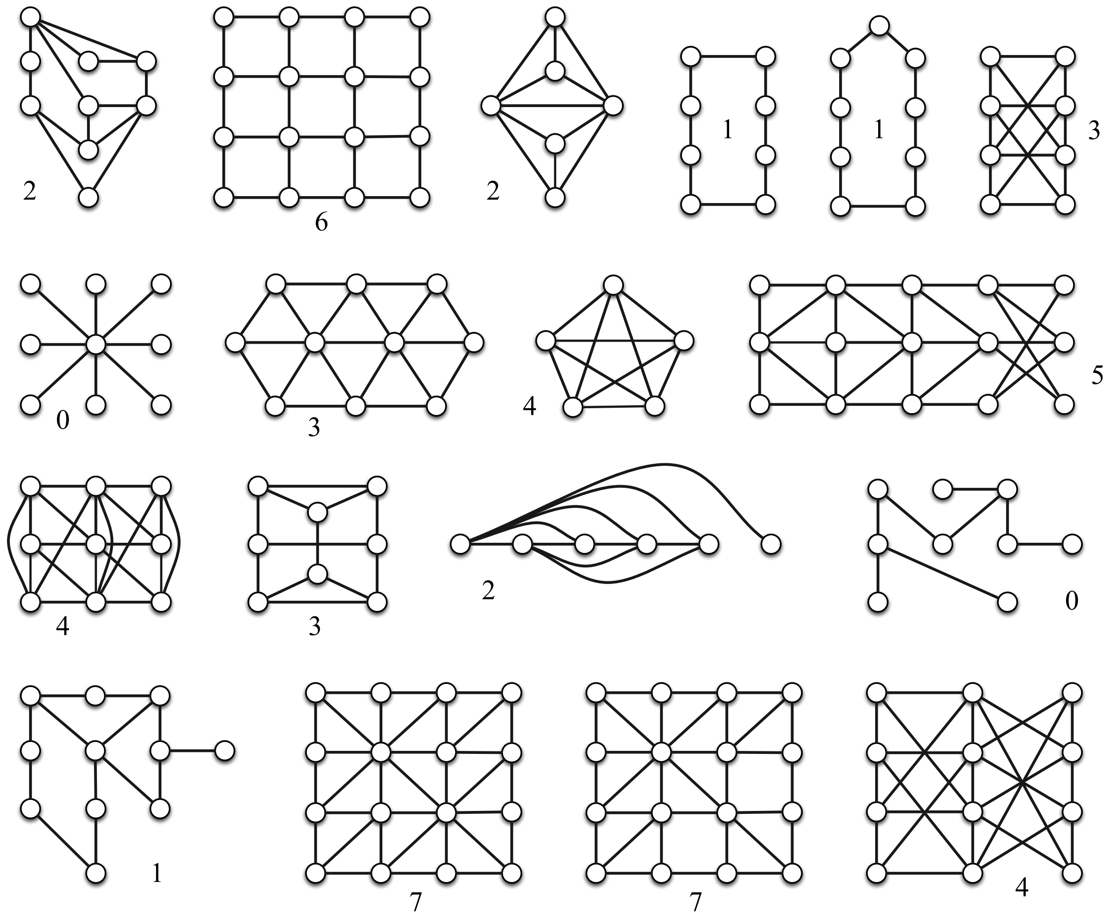
2.4.2 Graphes pour jouer

Jeu 1. Le graphe est composé de neuf sommets et il y a deux joueurs.

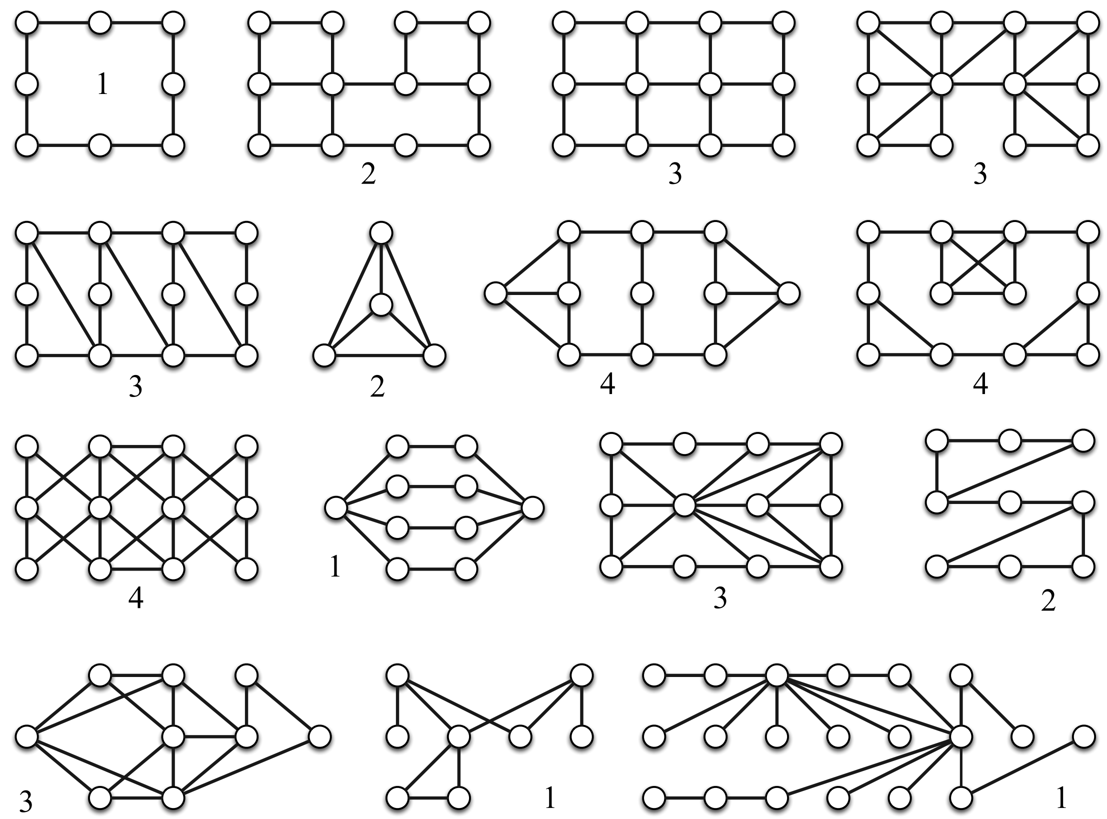


2

Jeux 2 à 19. La figure suivante décrit dix-huit jeux des cycles et des solutions. Le nombre de joueurs est indiqué pour chacun des graphes.



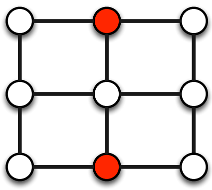
Jeux 20 à 34. La figure suivante décrit quinze jeux des cycles et des solutions. Le nombre de joueurs est indiqué pour chacun des graphes.



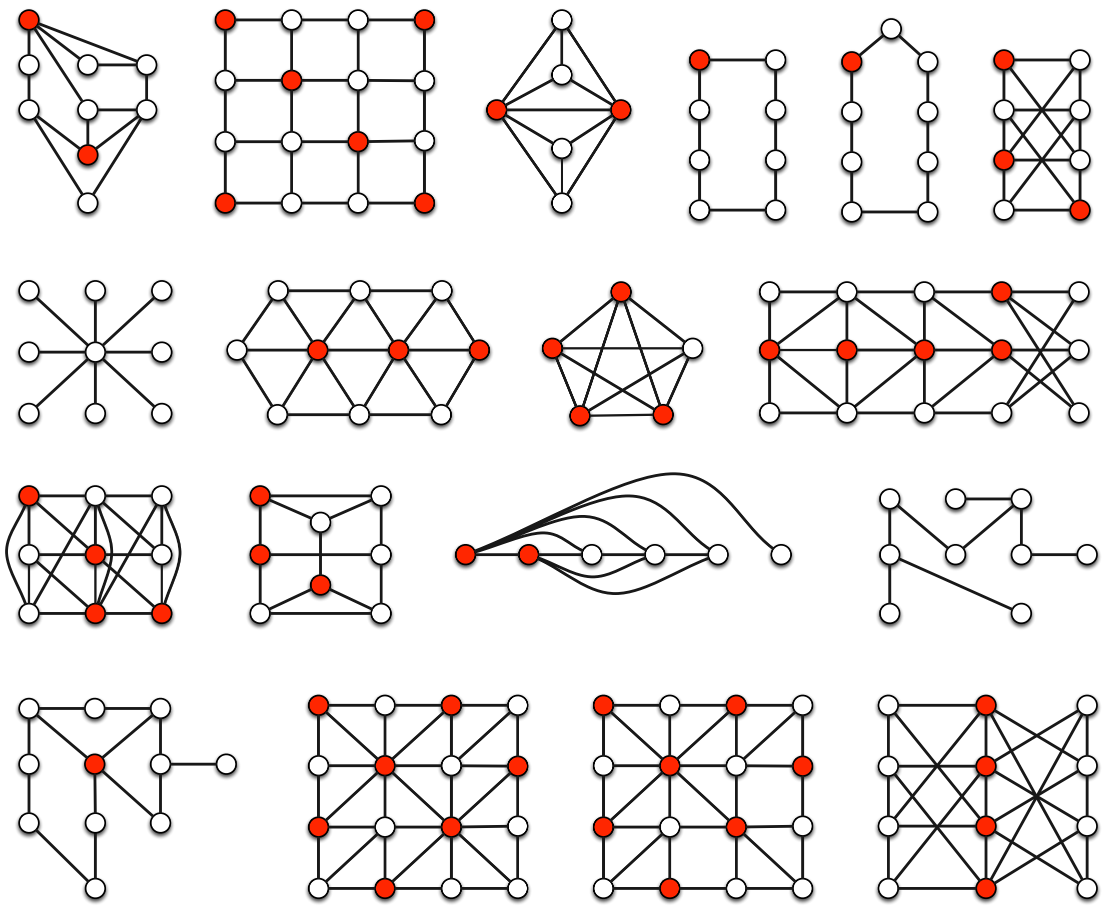
2.4.3 Solutions des jeux

Il est important de noter que, pour certains jeux, plusieurs solutions existent.

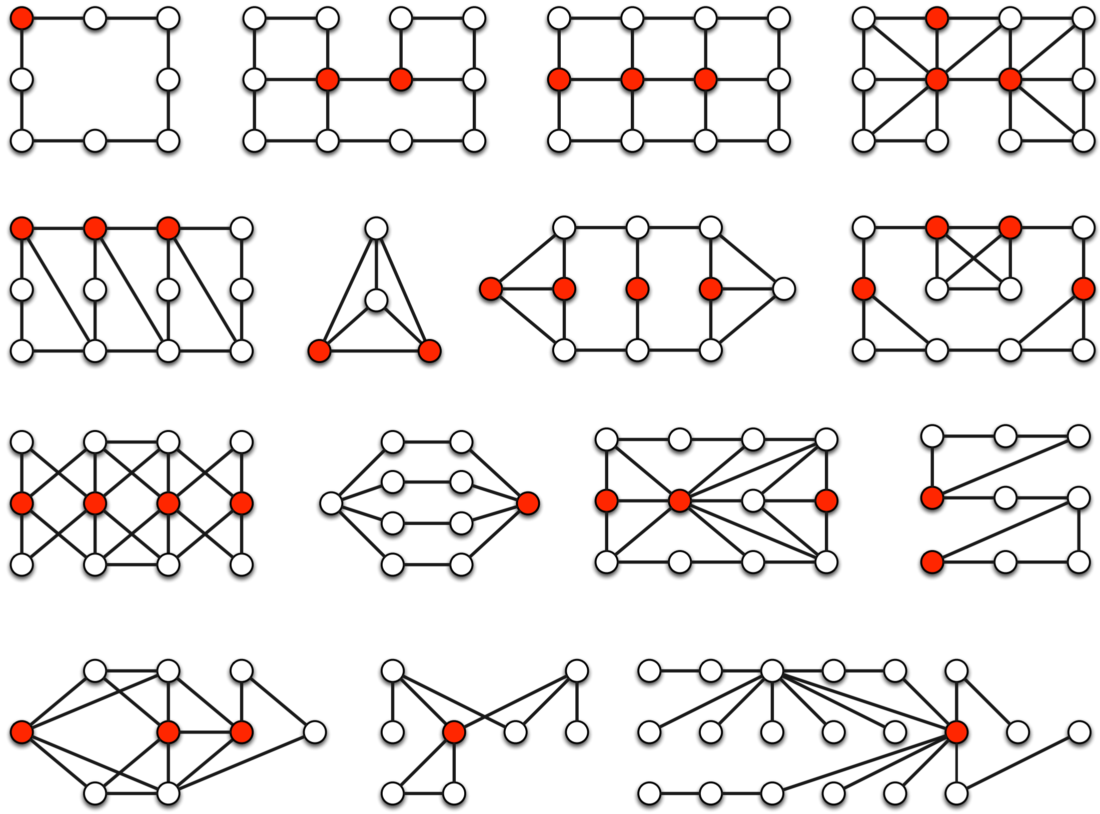
Solution du jeu 1.



Solutions des jeux 2 à 19.



Solutions des jeux 20 à 34.



Chapitre 3

Jeux de mouvement dans les graphes

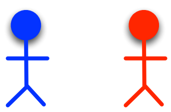
3.1 Le surfeur et le peintre

Nous présentons tout d'abord les règles du *jeu du surfeur et du peintre* et décrivons une de ses applications possibles en lien avec un *problème de préchargement de pages Web*. Nous décrivons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

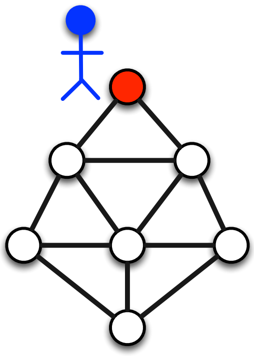
3.1.1 Règles du jeu et exemples

Un surfeur va vouloir atteindre un sommet blanc dans le graphe tandis qu'un peintre va peindre en rouge des sommets du graphe et va tout faire pour éviter que le surfeur n'atteigne son objectif.

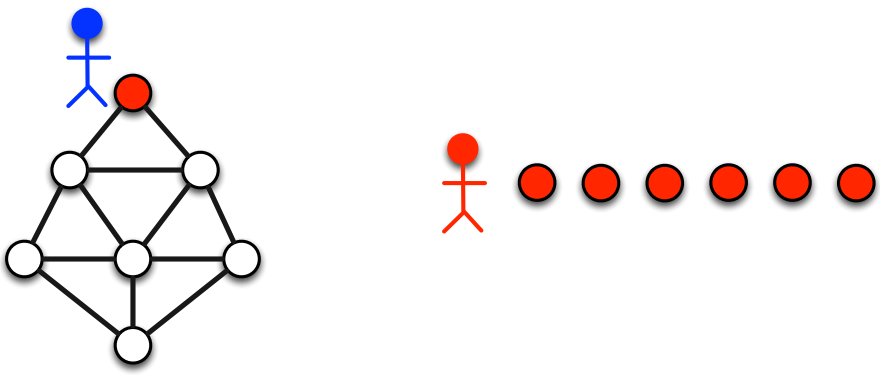
Nombre de joueurs. Il y a deux joueurs : le surfeur (bleu) et le peintre (rouge). Il y aura nécessairement un gagnant et un perdant.



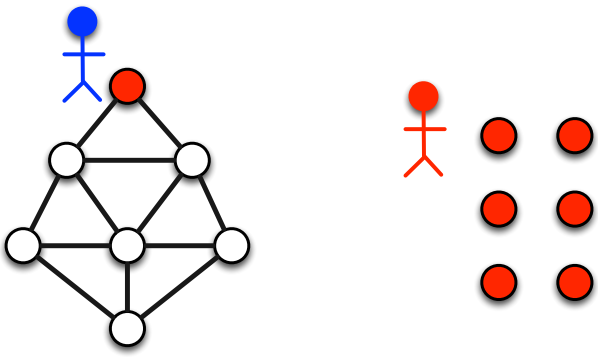
Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque dans lequel un unique sommet est initialement rouge et tous les autres sont initialement blancs. Ce sommet est la position initiale du surfeur. Considérons le graphe suivant.



Accessoires. Dans ce jeu, le peintre va peindre en rouge des sommets du graphe. Un sommet qui est rouge ne peut plus être blanc. Pour représenter un sommet qui devient rouge, un objet sera posé sur ce dernier. Il faut donc un nombre d'objets égal au nombre de sommets. Initialement, un unique sommet est rouge et le peintre a, en sa possession, un nombre d'objets égal au nombre de sommets initialement blancs. Dans l'exemple, il faut sept objets car il y a sept sommets.

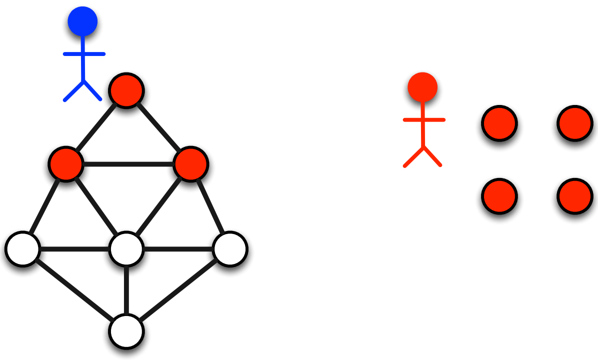


Avant le jeu. Il faut déterminer un nombre entier positif qui sera le nombre maximum de sommets que va pouvoir peindre le peintre à chaque étape du jeu. Dans notre exemple, deux sommets seront peints en rouge à chaque étape. Le surfeur se positionne initialement sur l'unique sommet rouge.

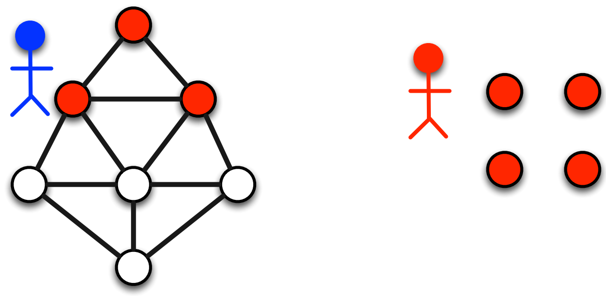


Déroulement du jeu. Le jeu est divisé en étapes. Pour chacune des étapes, le peintre va tout d'abord peindre en rouge des sommets et le surfeur va ensuite se déplacer sur un sommet voisin.

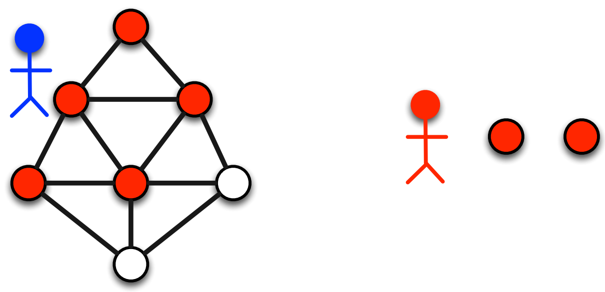
• *Étape 1 pour le peintre.* Le peintre peint en rouge des sommets blancs (au plus le nombre fixé avant le jeu). Si tous les sommets sont rouges, alors le peintre a gagné et le jeu est terminé. Sinon c'est au surfeur de jouer.



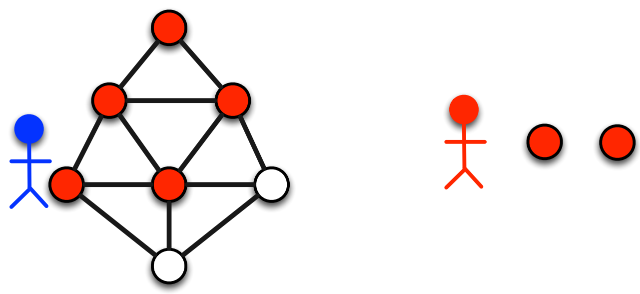
• *Étape 1 pour le surfeur.* Le surfeur se déplace sur un sommet voisin. Si le surfeur se trouve sur un sommet blanc, alors il a gagné et le jeu est terminé. Sinon, l'étape 2 commence.



• *Étape 2 pour le peintre.* Le peintre peint en rouge des sommets blancs (au plus le nombre fixé avant le jeu). Si tous les sommets sont rouges, alors le peintre a gagné et le jeu est terminé. Sinon c'est au surfeur de jouer.

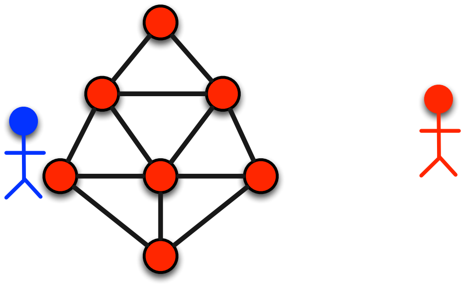


• *Étape 2 pour le surfeur.* Le surfeur se déplace sur un sommet voisin. Si le surfeur se trouve sur un sommet blanc, alors il a gagné et le jeu est terminé. Sinon, l'étape 3 commence.



Et ainsi de suite jusqu'à la fin de la partie. Le jeu est fini si tous les sommets sont rouges ou si le surfeur a atteint un sommet blanc.

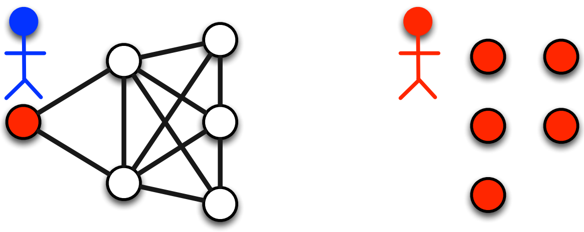
Dans l'exemple, le peintre parvient à peindre en rouge tous les sommets du graphe tout en assurant que le surfeur ne se trouve jamais sur un sommet blanc. Le peintre a donc gagné.



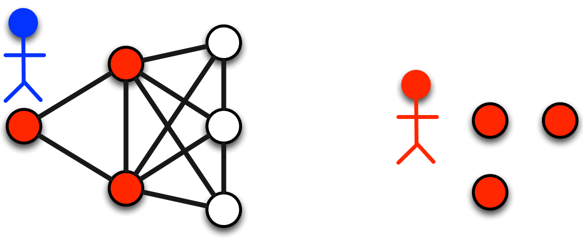
But du jeu. Le surfeur gagne s'il atteint un sommet blanc. Dans le cas contraire, le peintre gagne, c'est-à-dire s'il arrive à peindre en rouge tous les sommets du graphe sans que le surfeur atteigne un sommet blanc.

Exemple de stratégie gagnante pour le peintre. Pour l'exemple précédent, le peintre peut toujours gagner avec deux sommets peints à chaque étape quelle que soit la stratégie du surfeur. En effet, si le peintre joue la bonne stratégie (voir les graphes précédents), alors le surfeur ne pourra jamais atteindre un sommet blanc.

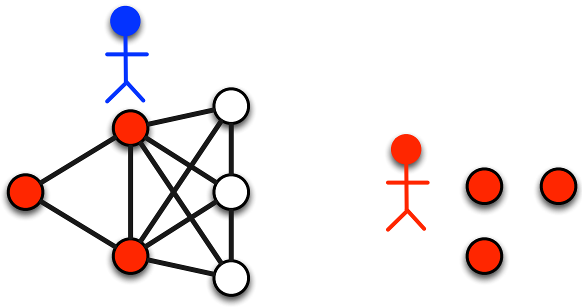
Exemple de stratégie gagnante pour le surfeur. Considérons l'instance suivante avec deux sommets peints en rouge à chaque étape.



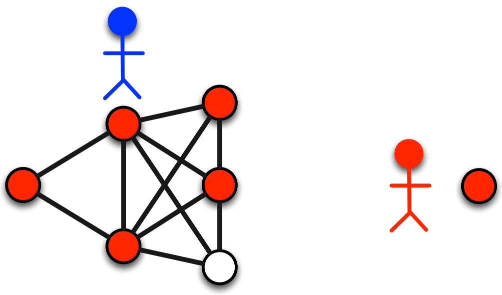
Le peintre peint en rouge les deux sommets blancs les plus proches du surfeur.



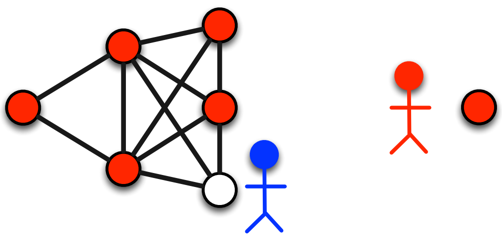
Le surfeur se déplace sur un de ces deux sommets voisins.



Le peintre peint en rouge deux des trois sommets blancs.

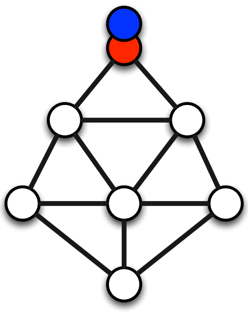


Le surfeur se déplace ensuite sur le seul sommet blanc et gagne la partie.



Pour cette instance, si deux sommets sont peints en rouge à chaque étape, alors le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre. En effet, si le surfeur joue la bonne stratégie, le peintre ne pourra jamais empêcher le surfeur d'atteindre un sommet blanc. En revanche, si trois sommets sont peints en rouge à chaque étape, alors le peintre peut gagner quelle que soit la stratégie du surfeur.

Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, le surfeur sera représenté par un rond (sommet) bleu. La situation initiale pour notre premier exemple est alors représentée par la figure suivante.

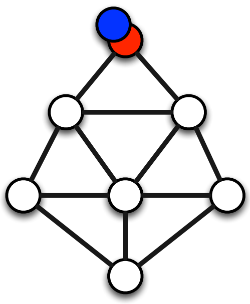


3.1.2 Lien avec le préchargement de pages Web

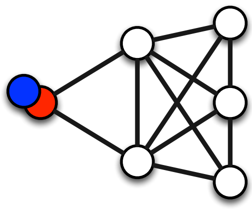
Le jeu du Web surfeur est utilisé par des chercheurs pour comprendre, analyser et améliorer les mécanismes de préchargement afin de garantir la meilleure qualité de service possible aux utilisateurs (aux Web surfeurs) tout en minimisant les ressources utilisées. Dans ce contexte, le graphe représente un réseau du Web pour lequel les sommets représentent des pages Web (par exemple contenant une vidéo) et les arêtes représentent des liens entre les pages. Deux sommets liés par une arête signifie que les deux pages Web correspondantes ont un lien Web de l'une vers l'autre. Le peintre représente alors le navigateur qui précharge un certain nombre de pages Web par étape. Précharger une page Web signifie que le sommet est peint en rouge. Le but du navigateur est que le Web surfeur, qui navigue sur le réseau de page en page, n'arrive jamais sur une page non-préchargée, et donc que le surfeur n'attende jamais. Étant donné que le navigateur ne peut pas précharger toutes les pages ou un grand nombre de pages par étape, le problème consiste à trouver le plus petit entier positif tel que le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du Web surfeur. Dans ce cas, le surfeur n'attend jamais qu'une page se charge et le nombre de pages à précharger à chaque étape (nombre de sommets à peindre en rouge) est minimisé. Trouver un chemin du Web surfeur qui donne la plus grande difficulté au peintre, donne le nombre de sommets à peindre en rouge (nombre de pages à précharger) à chaque étape. C'est pour cela que dans le jeu du Web surfeur, l'objectif du surfeur est de suivre de tels chemins difficiles pour le peintre. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans un article scientifique en français : `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00687102`.

3.1.3 Graphes pour jouer

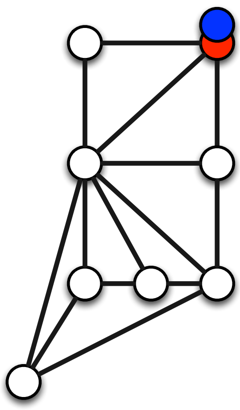
Jeu 1. Le nombre de sommets peints en rouge à chaque étape est 2. Est-ce que le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du surfeur ou est-ce que le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre ?



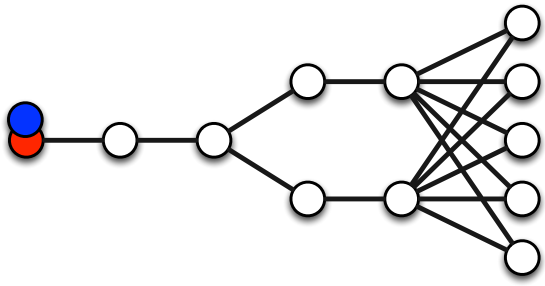
Jeu 2. Le nombre de sommets peints en rouge à chaque étape est 2. Est-ce que le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du surfeur ou est-ce que le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre ?



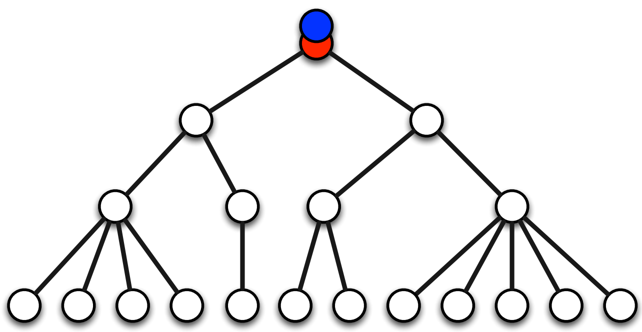
Jeu 3. Le nombre de sommets peints en rouge à chaque étape est 3. Est-ce que le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du surfeur ou est-ce que le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre ?



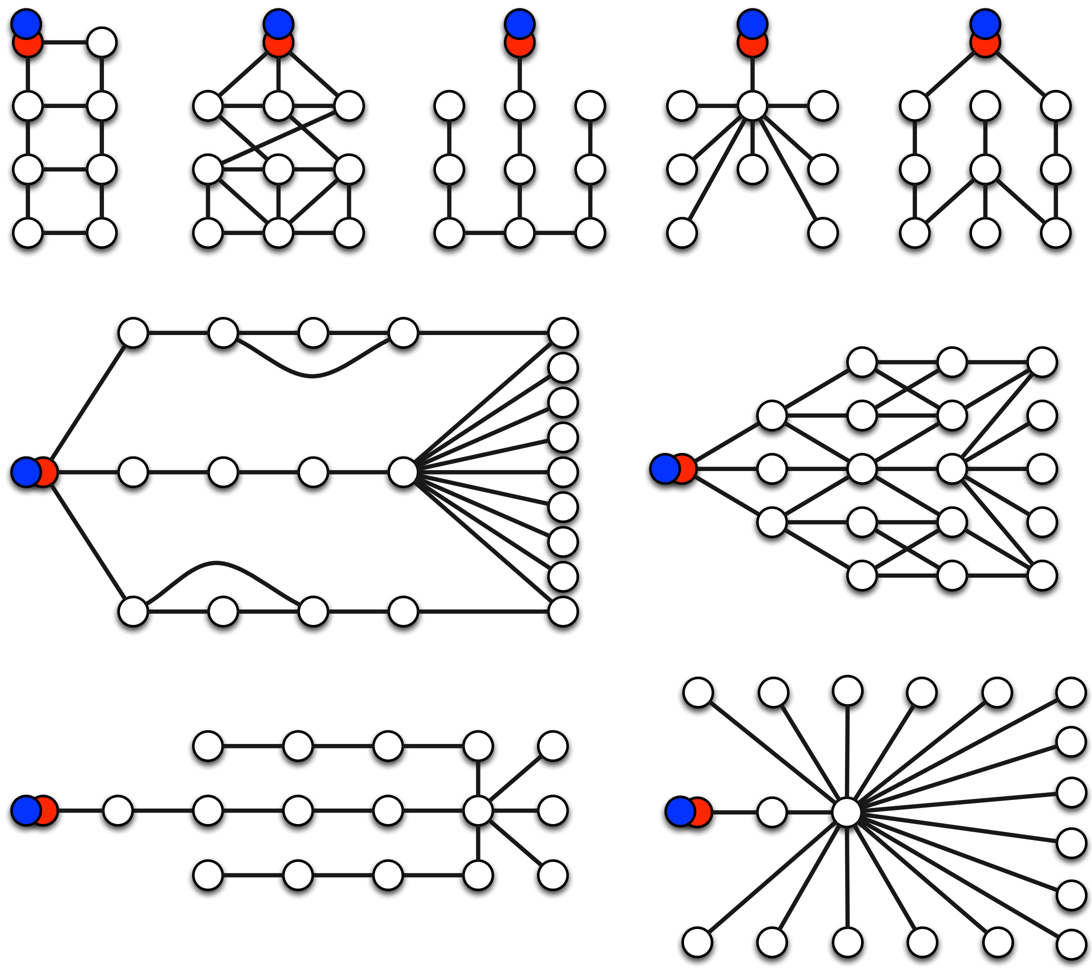
Jeu 4. Le nombre de sommets peints en rouge à chaque étape est 2. Est-ce que le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du surfeur ou est-ce que le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre ?



Jeu 5. Est-ce que le peintre peut gagner en peignant en rouge 5, 4, 3 ou 2 sommets à chaque étape quelle que soit la stratégie du surfeur ? Vous pouvez proposer le jeu avec ces différentes valeurs et observer les résultats. Vous trouverez peut-être le plus petit nombre de sommets à peindre en rouge pour que le peintre gagne quelle que soit la stratégie du surfeur et donc le plus grand nombre de sommets à peindre en rouge pour que le surfeur gagne quelle que soit la stratégie du peintre.



Jeux 6 à 14. La figure suivante décrit neuf jeux du surfeur. Vous pouvez jouer avec différentes valeurs pour le nombre de sommets peints en rouge à chaque étape. Pour chacun des graphes, vous pouvez tenter de déterminer le plus petit nombre de sommets à peindre en rouge pour que le peintre gagne quelle que soit la stratégie du surfeur. Vous pourrez ainsi calculer le plus grand nombre de sommets à peindre en rouge pour que le surfeur gagne quelle que soit la stratégie du peintre.

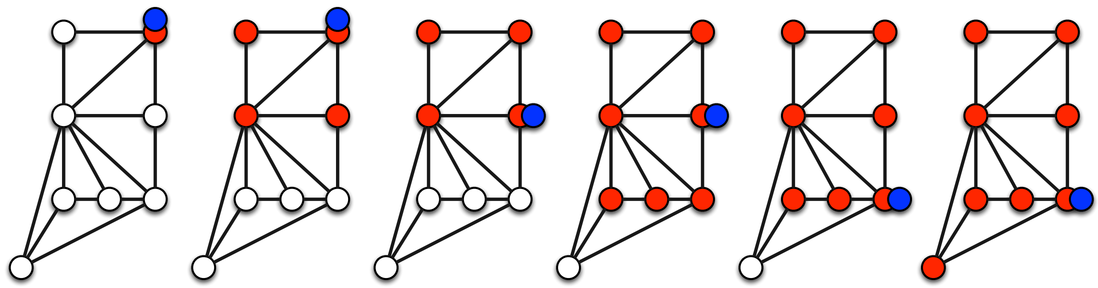


3.1.4 Solutions des jeux

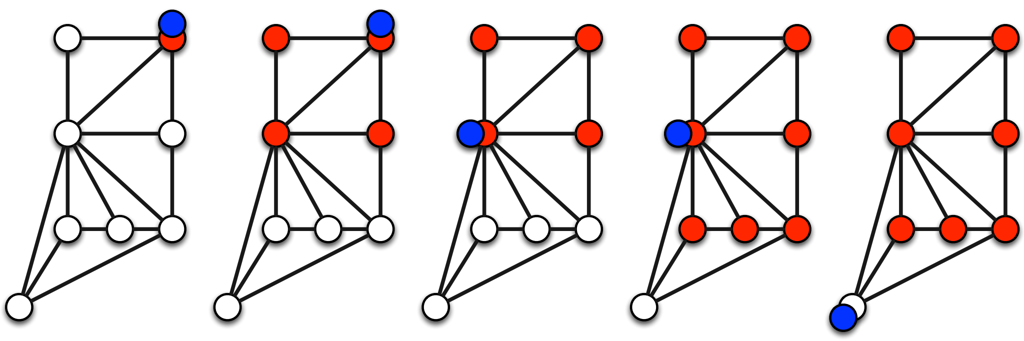
Solution du jeu 1. Si deux sommets sont peints en rouge à chaque étape, alors le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du surfeur (voir la Section 3.1.1 pour plus de détails).

Solution du jeu 2. Si deux sommets sont peints en rouge à chaque étape, alors le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre (voir la Section 3.1.1 pour plus de détails).

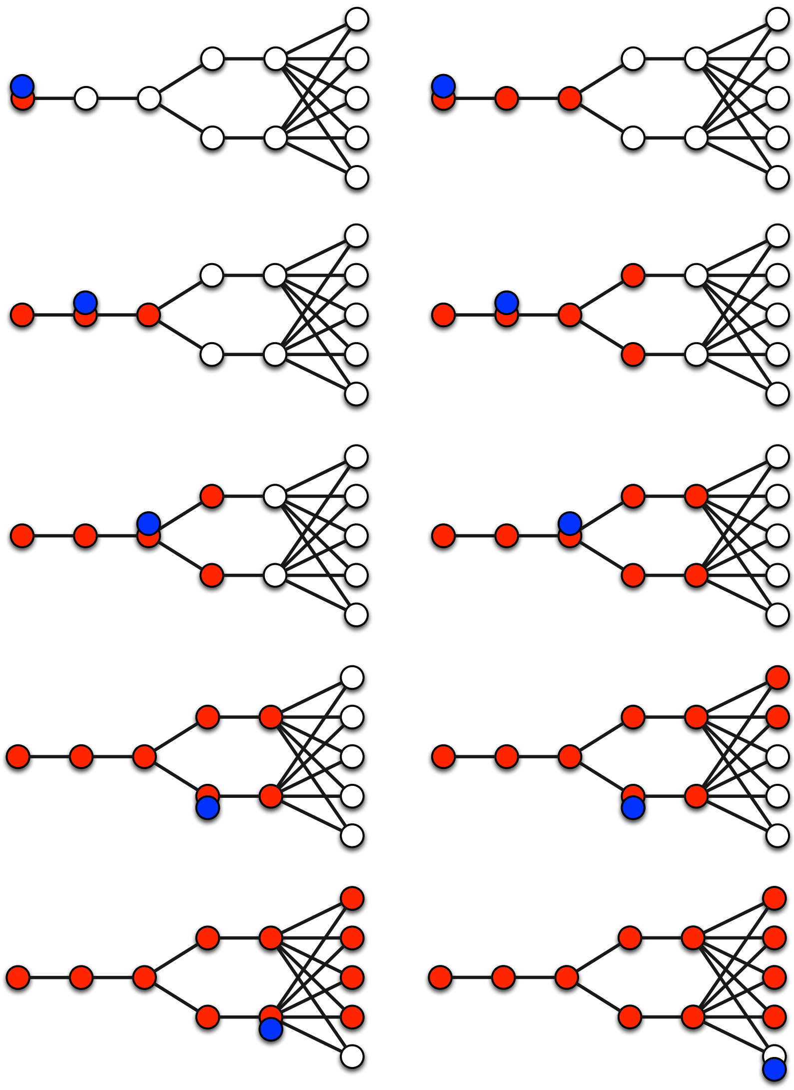
Solution du jeu 3. La figure suivante décrit une stratégie perdante pour le surfeur avec trois sommets peints en rouge à chaque étape.



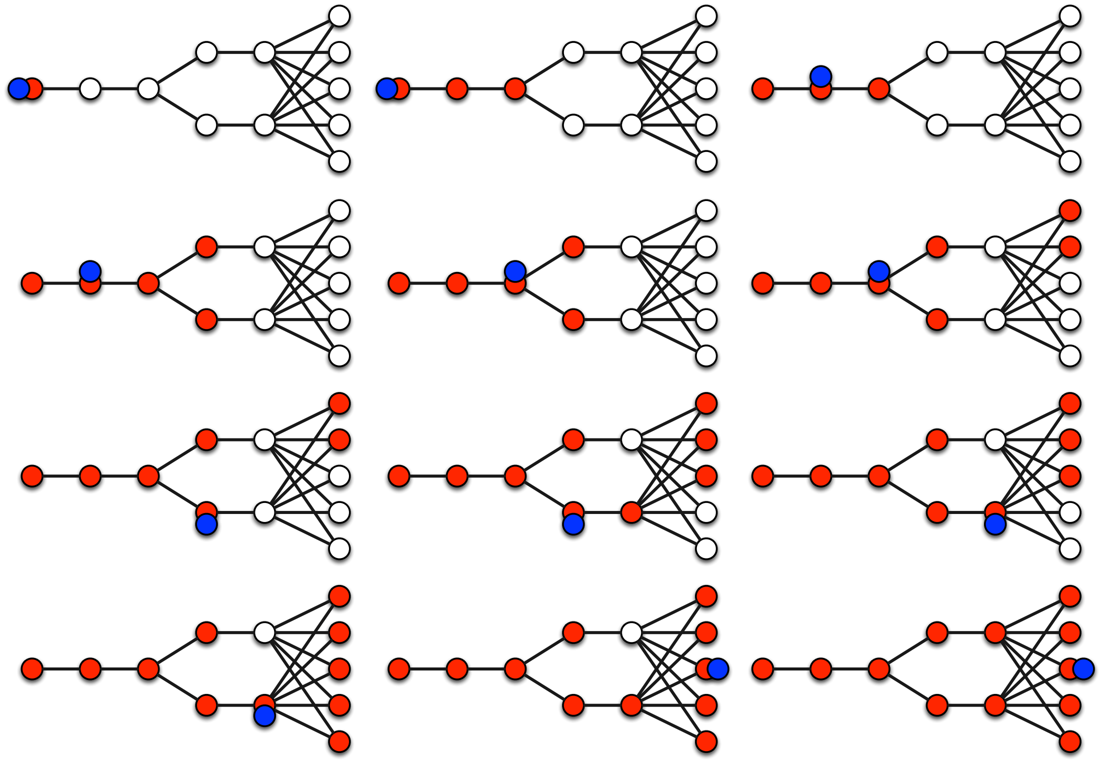
Mais il existe une meilleure stratégie pour le surfeur qui lui permet de gagner quelle que soit la stratégie du peintre. La figure suivante décrit une telle stratégie gagnante pour le surfeur avec trois sommets peints en rouge à chaque étape.



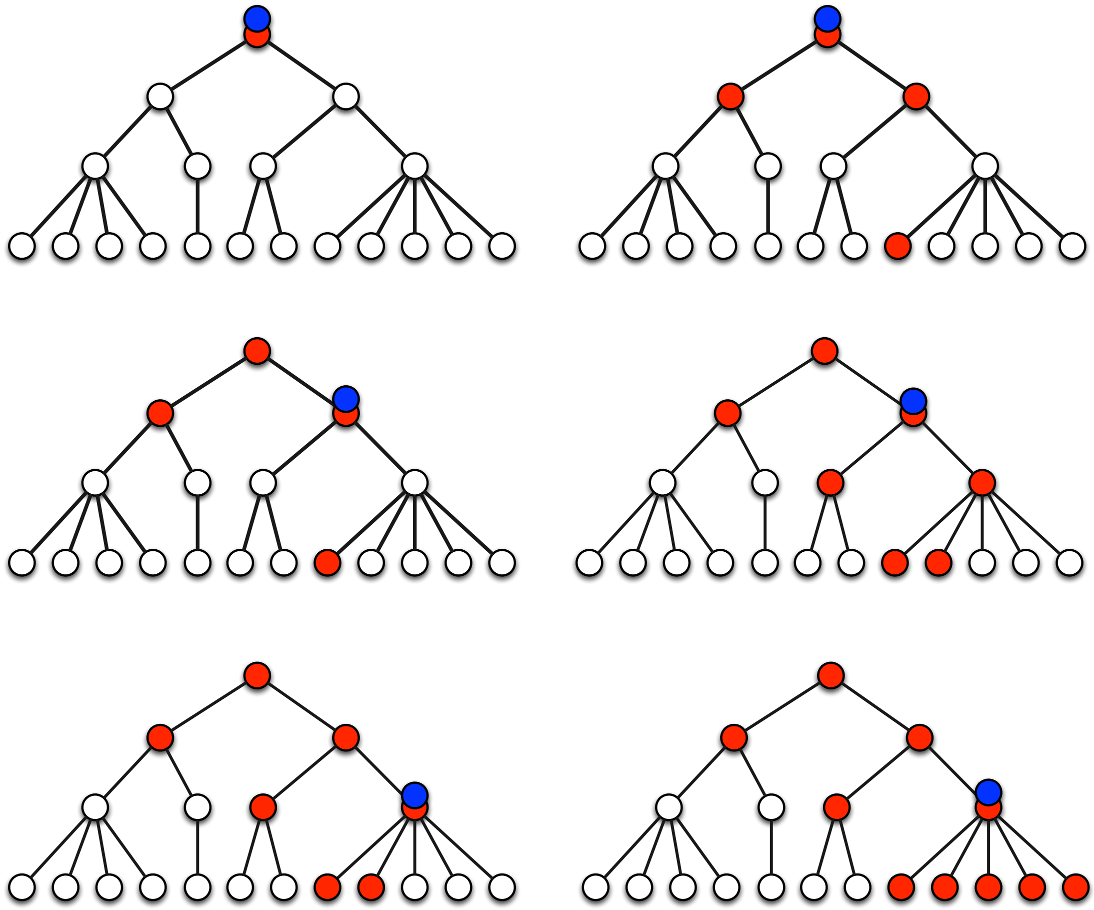
Solution du jeu 4. La figure suivante décrit une stratégie perdante pour le peintre avec deux sommets peints en rouge à chaque étape.



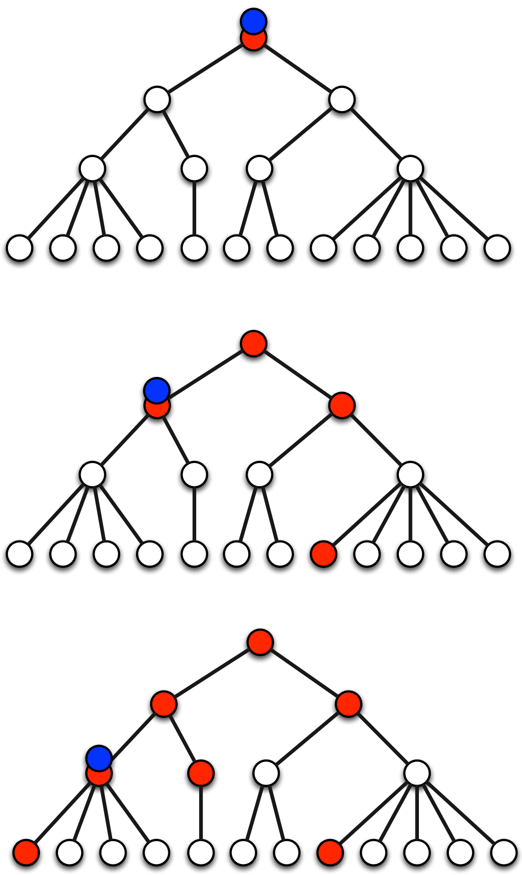
Mais il existe une meilleure stratégie pour le peintre qui lui permet de gagner quelle que soit la stratégie du surfeur. La figure suivante décrit une telle stratégie gagnante pour le peintre avec deux sommets peints en rouge à chaque étape.



Solution du jeu 5. Avec 2 sommets peints en rouge à chaque étape, le surfeur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du peintre. Par exemple, le surfeur peut toujours choisir le sommet le plus à droite possible. Dans ce cas, il arrivera toujours, au cours du jeu, à se positionner sur un sommet blanc. En revanche, avec 3 sommets peints en rouge à chaque étape, le peintre peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du surfeur. La figure suivante décrit une stratégie gagnante pour le peintre si le surfeur choisit d'aller sur le sommet de droite lors de son premier déplacement.

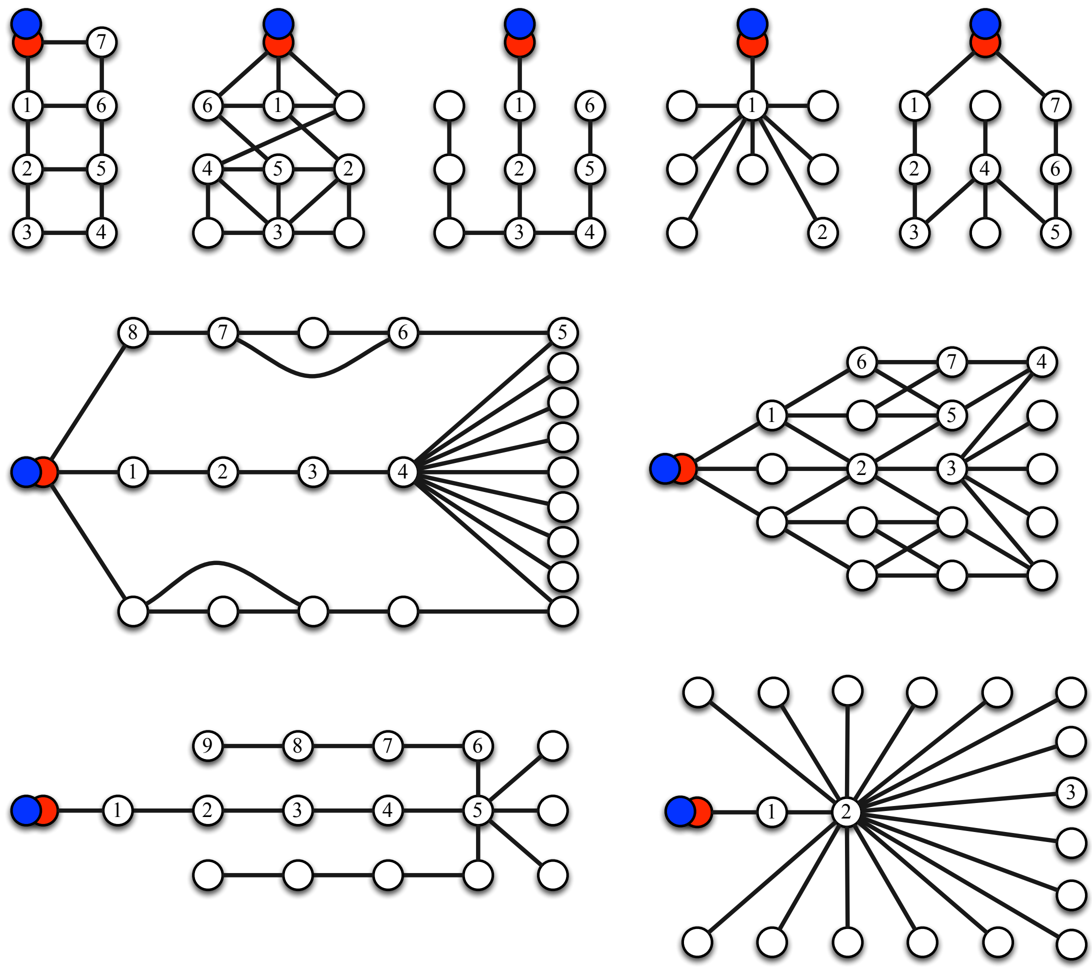


La figure suivante décrit une stratégie gagnante pour le peintre si le surfeur choisit d'aller sur le sommet de gauche lors de son premier déplacement.



Notons que lors de la première étape, le peintre ne sait pas quel va être le premier déplacement du surfeur et donc le peintre peint en rouge les trois mêmes sommets (dans les deux solutions décrites précédemment) avant que le surfeur se déplace sur le sommet voisin de gauche ou sur le sommet voisin de droite.

Solutions des jeux 6 à 14. Le plus petit nombre de sommets à peindre en rouge pour que le peintre gagne quelle que soit la stratégie du surfeur est 2, 3, 2, 4, 2, 3, 4, 2 et 6, respectivement (lecture de gauche à droite puis de haut en bas). Donc, le plus grand nombre de sommets à peindre en rouge pour que le surfeur gagne quelle que soit la stratégie du peintre est 1, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 1 et 5, respectivement (lecture de gauche à droite puis de haut en bas). Pour chacun des graphes, les entiers sur les sommets décrivent une stratégie optimale pour le surfeur : le sommet avec 1 veut dire que le surfeur se déplace sur celui-ci lors de la première étape, le sommet avec 2 veut dire que le surfeur se déplace sur celui-ci lors de la deuxième étape, et ainsi de suite.



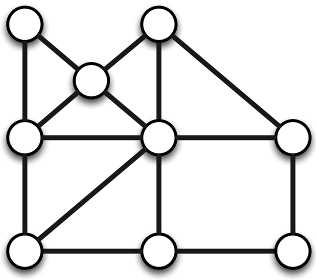
3.2 Les gendarmes et le voleur

Nous présentons tout d'abord les règles du *jeu des gendarmes et du voleur* avant de décrire quelques graphes intéressants pour jouer et des solutions.

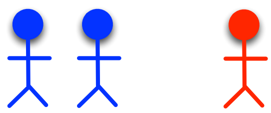
3.2.1 Règles du jeu et exemples

Les gendarmes ont pour objectif de capturer un voleur dans un graphe. Pour cela, il faut qu'un des gendarmes se trouve sur le même sommet que le voleur. L'objectif du voleur est d'échapper aux gendarmes.

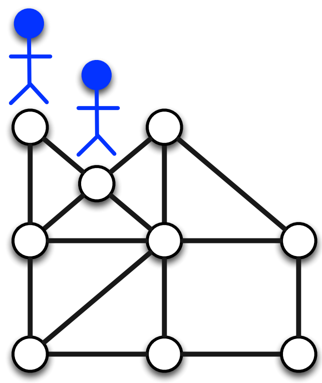
Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque. Considérons par exemple le graphe suivant composé de neuf sommets.



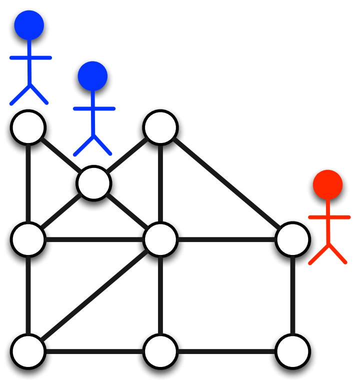
Nombre de joueurs. Il y a deux équipes : une équipe de gendarmes (bleus) et une équipe composée d'un voleur (rouge). Il y aura nécessairement une équipe gagnante et une équipe perdante. Considérons deux gendarmes pour notre exemple.



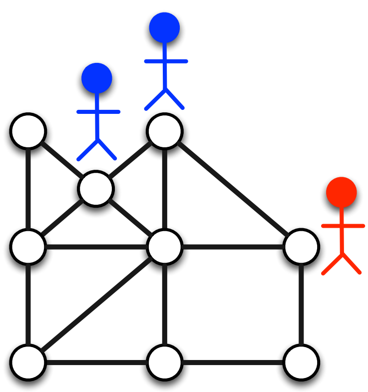
Avant le jeu. Il faut fixer le nombre d'étapes du jeu (par exemple égal au nombre de sommets du graphe). Initialement, les gendarmes se positionnent sur des sommets de leurs choix (ou déterminés à l'avance).



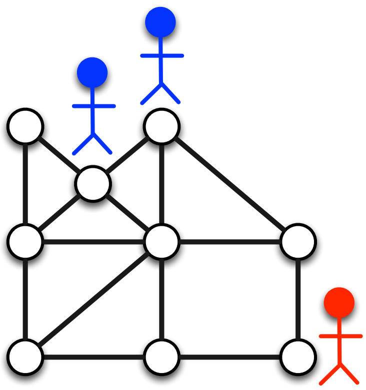
Le voleur se positionne sur un sommet de son choix (ou déterminé à l'avance).



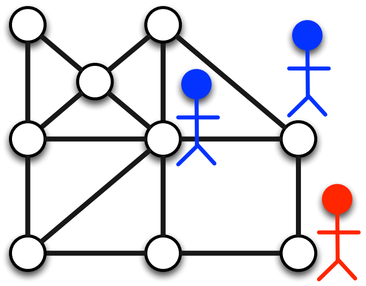
Déroulement du jeu. Le jeu est divisé en étapes.
• *Étape 1 pour les gendarmes.* Chacun des gendarmes se déplace vers un sommet voisin ou reste sur son sommet actuel. Si un gendarme est sur le même sommet que le voleur, alors l'équipe des gendarmes a gagné. Sinon c'est au voleur de jouer.



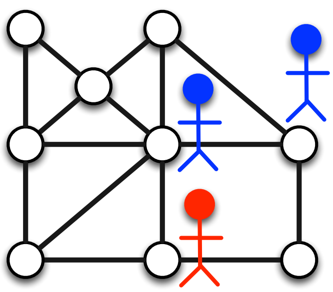
• *Étape 1 pour le voleur.* Le voleur se déplace vers un sommet voisin ou reste sur son sommet actuel. L'étape 2 commence.



• *Étape 2 pour les gendarmes.* Chacun des gendarmes se déplace vers un sommet voisin ou reste sur son sommet actuel. Si un gendarme est sur le même sommet que le voleur, alors l'équipe des gendarmes a gagné. Sinon c'est au voleur de jouer.

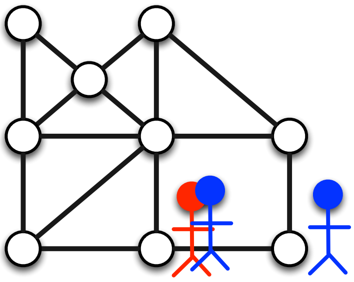


• *Étape 2 pour le voleur.* Le voleur se déplace vers un sommet voisin ou reste sur son sommet actuel. L'étape 3 commence.



Et ainsi de suite tant qu'un gendarme n'est pas sur le même sommet que le voleur ou que la dernière étape se termine.

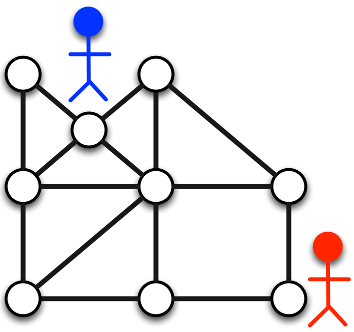
Dans l'exemple, un gendarme arrive à se positionner sur le même sommet que le voleur lors de la troisième étape.



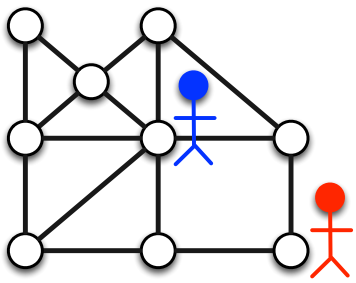
But du jeu. Les gendarmes gagnent la partie si au moins l'un d'entre eux se retrouvent sur le même sommet que le voleur au cours du jeu. Le voleur gagne s'il parvient à échapper aux gendarmes durant toutes les étapes de la partie.

Exemple de stratégie gagnante pour les gendarmes. Pour notre exemple, les figures précédentes décrivent une stratégie gagnante pour les gendarmes. Pour cette instance, l'équipe des gendarmes peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du voleur (si le nombre d'étapes est suffisamment grand).

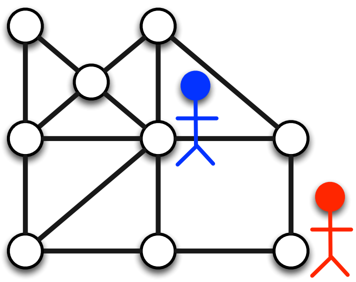
Exemple de stratégie gagnante pour le voleur. Considérons le graphe précédent avec un gendarme et un nombre d'étapes quelconque. Pour cette instance, le voleur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du gendarme. Tout d'abord, le gendarme se positionne sur un sommet puis le voleur se positionne à son tour sur un sommet.



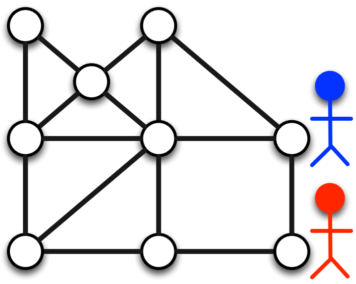
Le gendarme se déplace sur un sommet voisin.



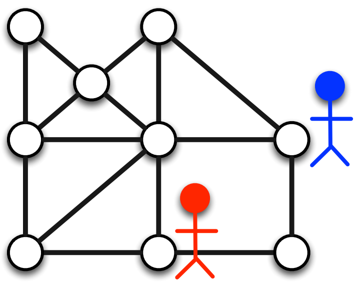
Le voleur décide de rester sur place.



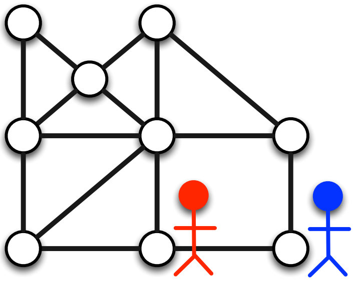
Le gendarme se déplace sur un sommet voisin.



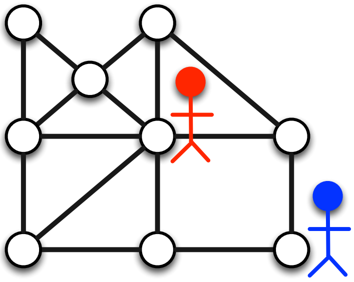
Le voleur se déplace sur un sommet voisin.



Le gendarme se déplace sur un sommet voisin.

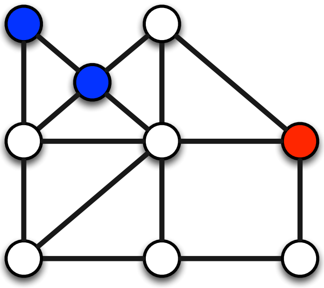


Le voleur se déplace sur un sommet voisin.



Le voleur va réussir à échapper au gendarme indéfiniment en restant sur le cycle de taille 4. Donc quel que soit le nombre d'étapes, il existe une stratégie gagnante pour le voleur face à un gendarme.

Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, les gendarmes seront représentés par des sommets bleus et le voleur par un sommet rouge. La situation initiale pour notre premier exemple est alors représentée par la figure suivante.

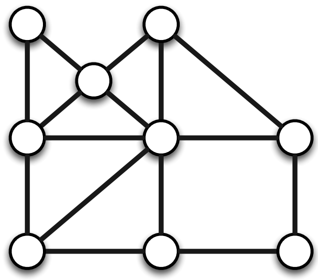


3.2.2 Problèmes de recherche actuels

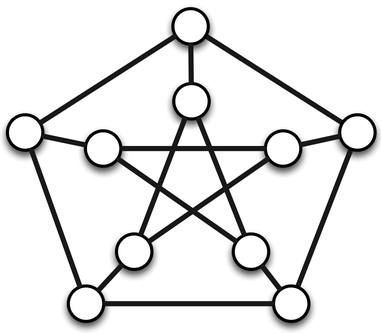
Un des plus célèbres problèmes ouverts est lié à la conjecture de Meyniel. Ce dernier a conjecturé que, pour tout graphe, le plus petit nombre de gendarmes nécessaires à la capture du voleur est au plus la racine carrée du nombre de sommets du graphe (ou du même ordre de grandeur).

3.2.3 Graphes pour jouer

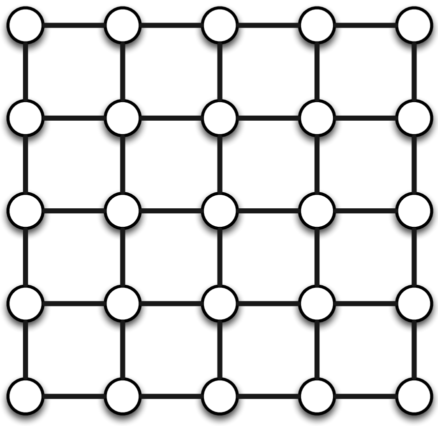
Jeu 1. Considérons le graphe suivant et neuf étapes. Est-ce qu'un gendarme peut gagner (capturer le voleur) quelle que soit la stratégie du voleur ? Est-ce que deux gendarmes peuvent gagner quelle que soit la stratégie du voleur ?



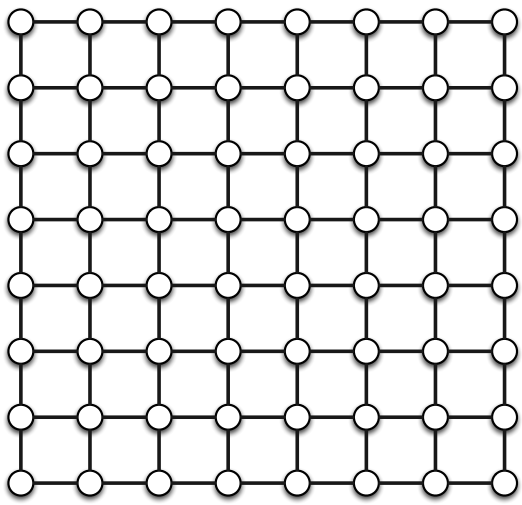
Jeu 2. Considérons le graphe suivant et onze étapes. Est-ce que deux gendarmes peuvent gagner (capturer le voleur) quelle que soit la stratégie du voleur ?



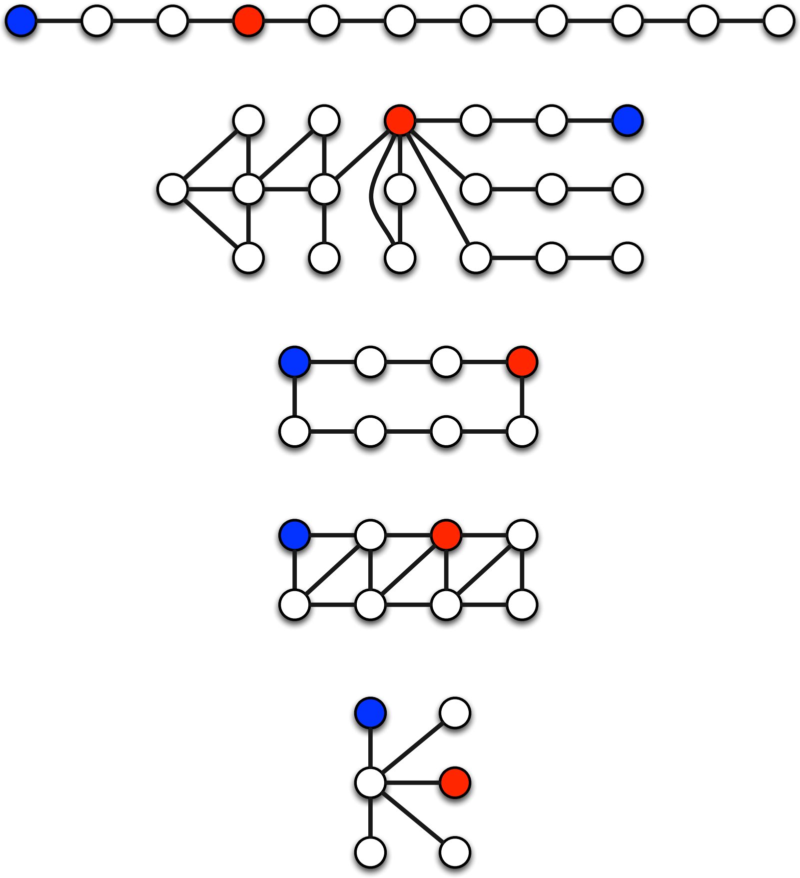
Jeu 3. Considérons le graphe suivant et dix étapes. Est-ce que quatre gendarmes peuvent gagner quelle que soit la stratégie du voleur ? Est-ce que trois gendarmes peuvent gagner quelle que soit la stratégie du voleur ? Quel est le plus petit nombre de gendarmes tel qu'il existe une stratégie gagnante pour eux quelle que soit la stratégie du voleur ?



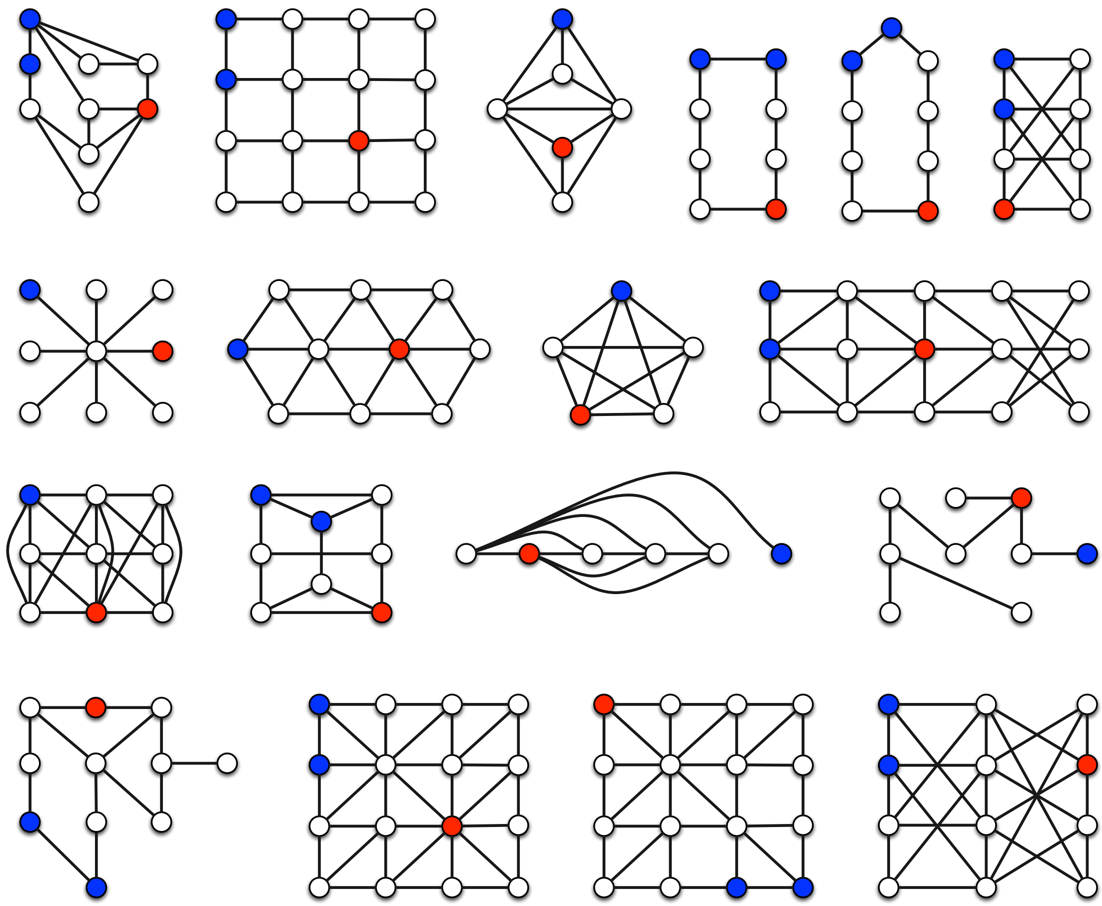
Jeu 4. Considérons le graphe suivant et 15 étapes. Est-ce que 4 gendarmes peuvent gagner quelle que soit la stratégie du voleur ? Est-ce que 3 gendarmes peuvent gagner quelle que soit la stratégie du voleur ? Quel est le plus petit nombre de gendarmes tel qu'il existe une stratégie gagnante pour eux quelle que soit la stratégie du voleur ?



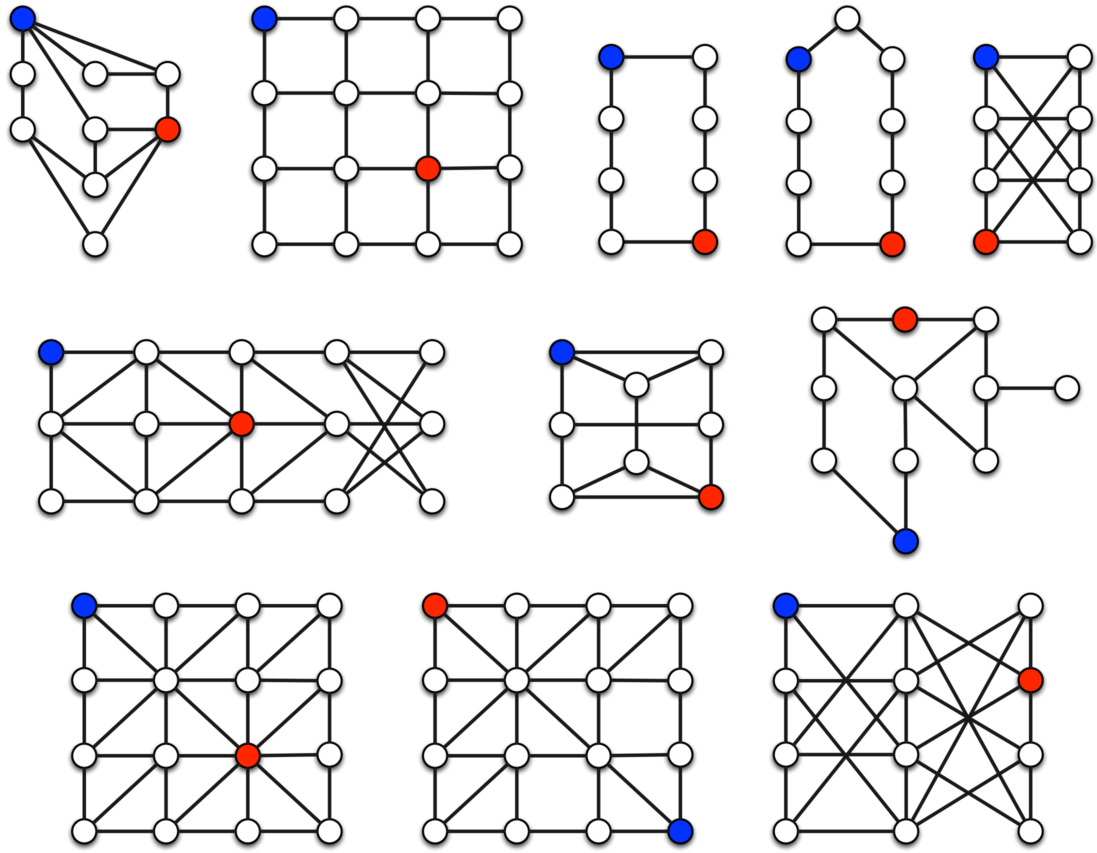
Jeux 5 à 9. La figure suivante décrit cinq jeux des gendarmes et du voleur. Le nombre d'étapes est dix pour chaque jeu. Pour chacun des jeux, le sommet bleu représente la position initiale du gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour chacun des graphes, existe-t-il une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du gendarme ? Existe-t-il une stratégie gagnante pour le gendarme quelle que soit la stratégie du voleur ?



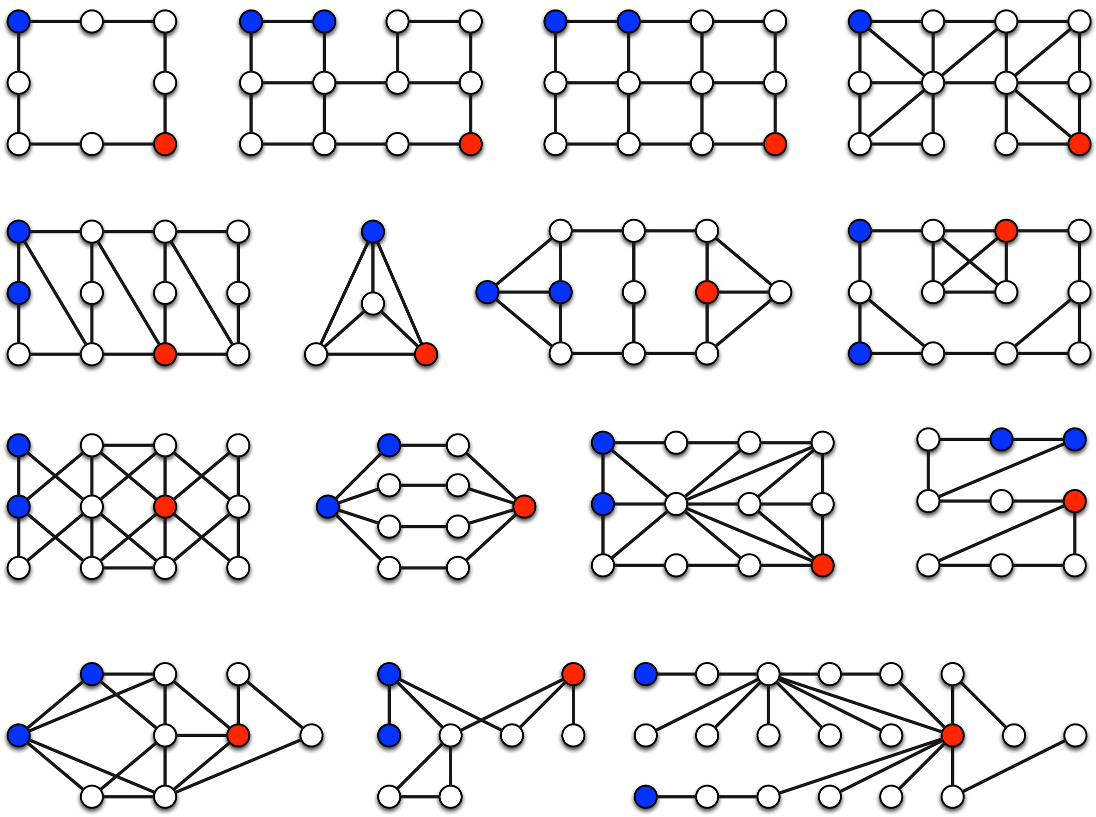
Jeux 10 à 27. La figure suivante décrit dix-huit jeux des gendarmes et du voleur. Le nombre d'étapes est dix pour chaque jeu. Les sommets bleus représentent la position initiale de chaque gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour chacun des graphes, existe-t-il une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du ou des gendarmes ? Existe-t-il une stratégie gagnante pour le ou les gendarmes quelle que soit la stratégie du voleur ?



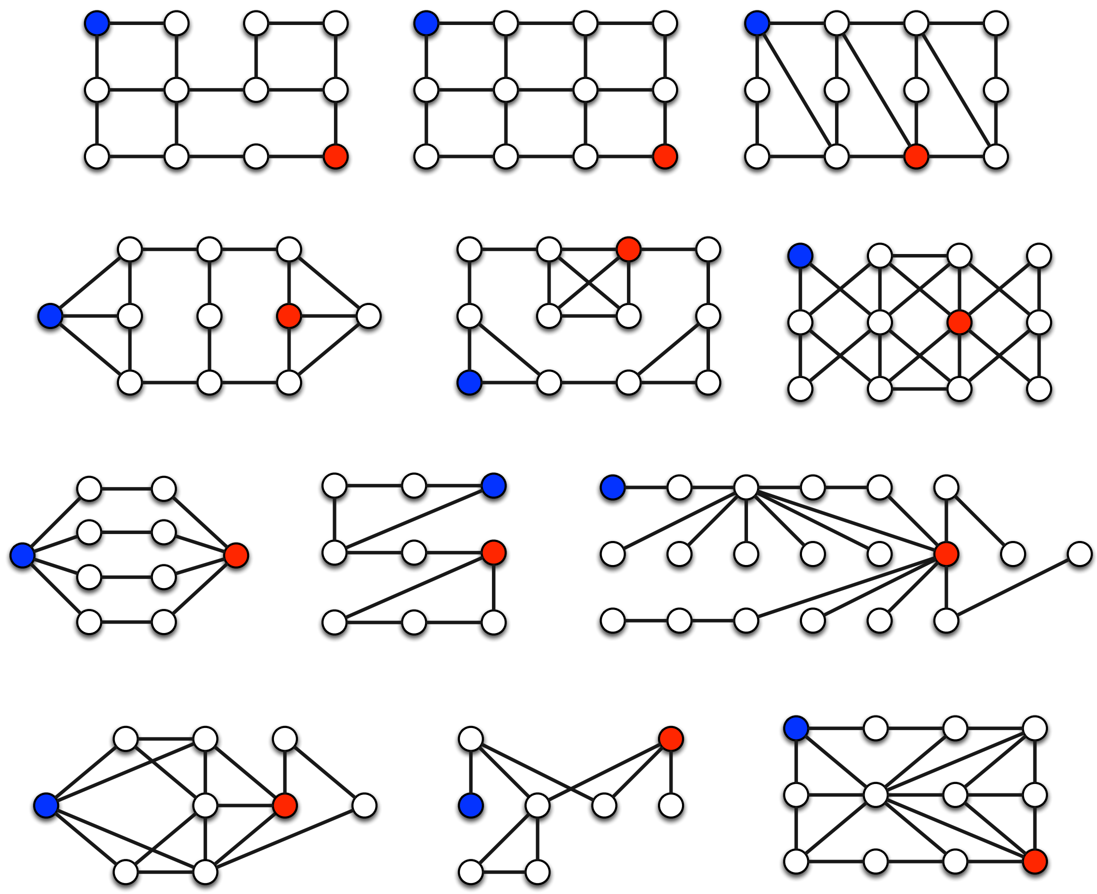
Jeux 28 à 38. La figure suivante décrit onze jeux des gendarmes et du voleur. Le nombre d'étapes est dix pour chaque jeu. Pour chacun des jeux, le sommet bleu représente la position initiale du gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour chacun des graphes, existe-t-il une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du gendarme ? Existe-t-il une stratégie gagnante pour le gendarme quelle que soit la stratégie du voleur ?



Jeux 39 à 53. La figure suivante décrit quinze jeux des gendarmes et du voleur. Le nombre d'étapes est dix pour chaque jeu. Les sommets bleus représentent la position initiale de chaque gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Initialement, les gendarmes ne sont pas sur un même sommet. Pour chacun des graphes, existe-t-il une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du ou des gendarmes ? Existe-t-il une stratégie gagnante pour le ou les gendarmes quelle que soit la stratégie du voleur ?



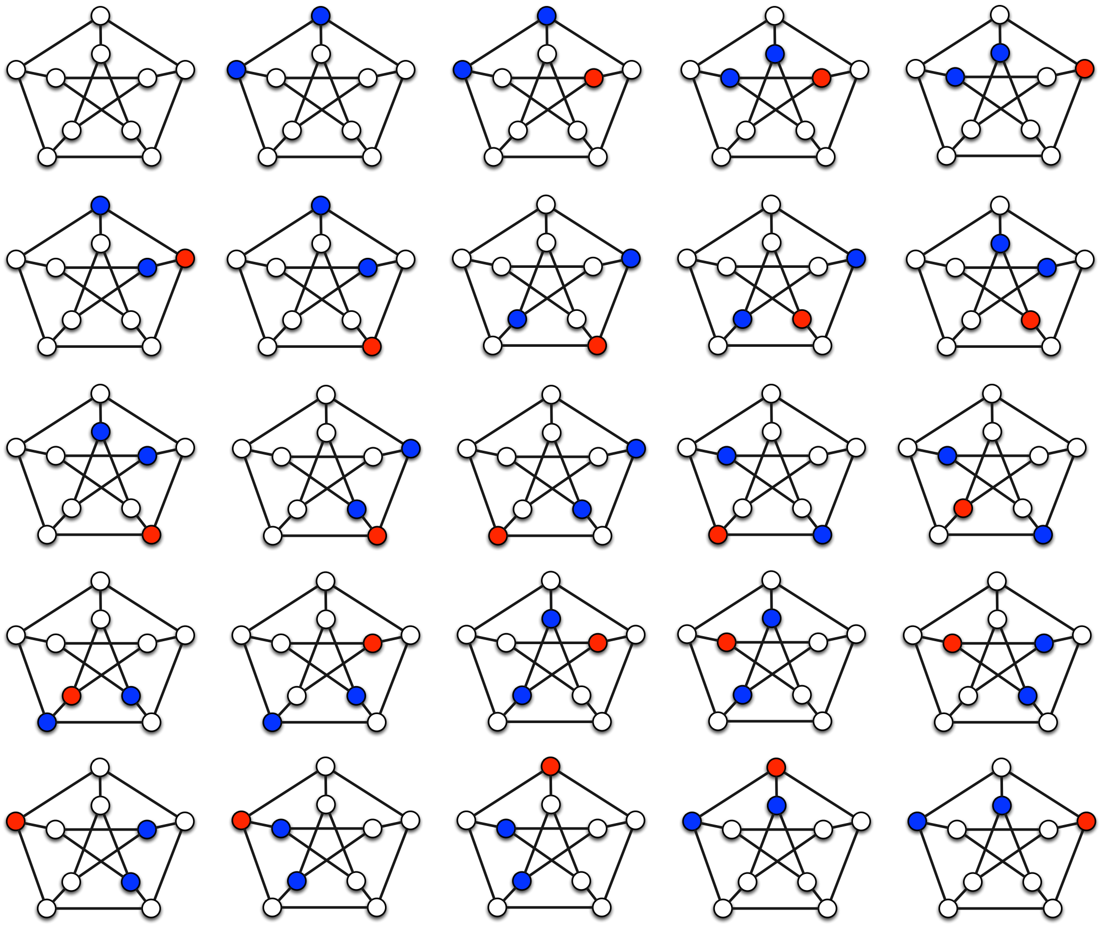
Jeux 54 à 65. La figure suivante décrit douze jeux des gendarmes et du voleur. Le nombre d'étapes est dix pour chaque jeu. Pour chacun des jeux, le sommet bleu représente la position initiale du gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour chacun des graphes, existe-t-il une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du gendarme ? Existe-t-il une stratégie gagnante pour le gendarme quelle que soit la stratégie du voleur ?



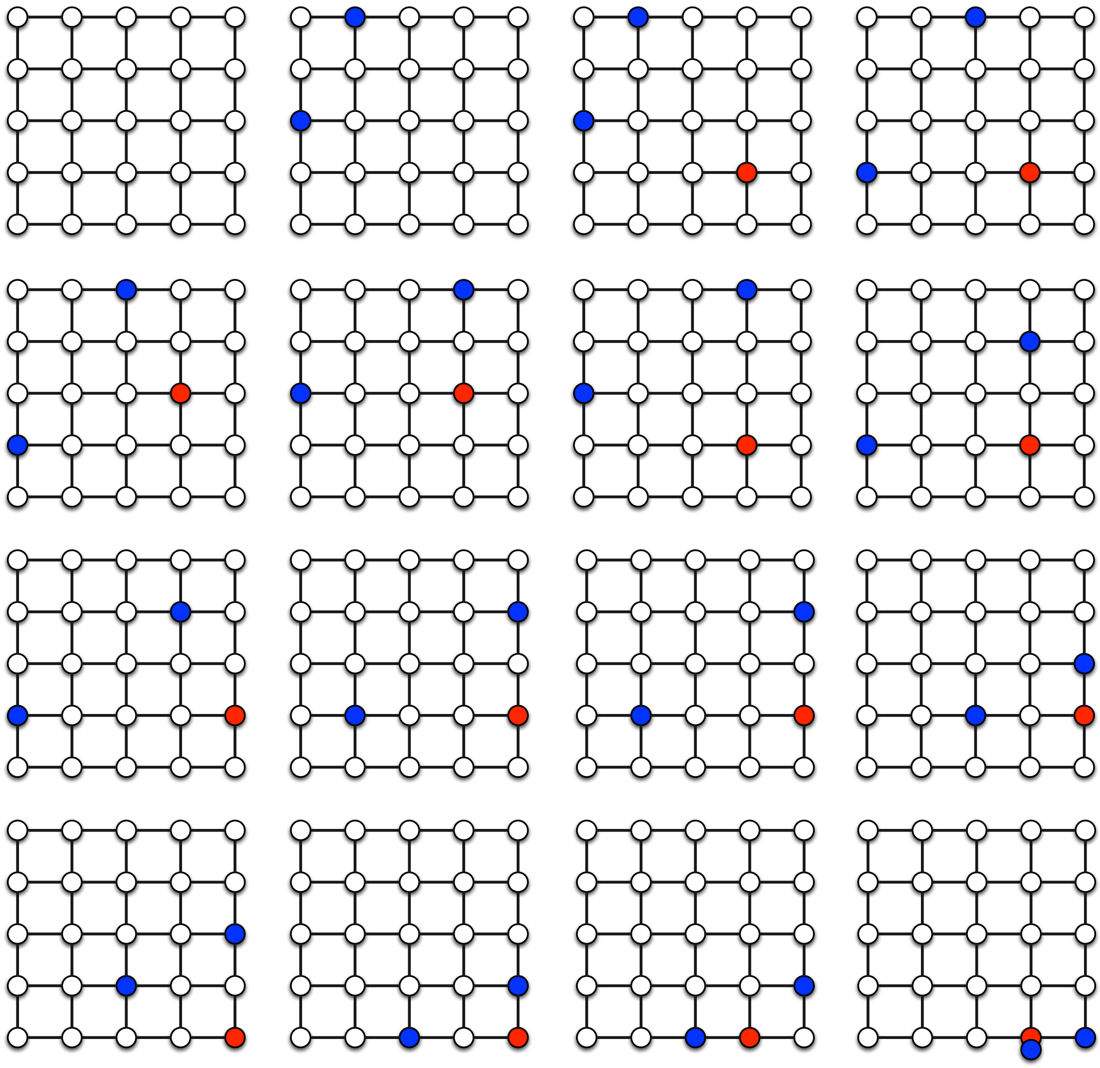
3.2.4 Solutions des jeux.

Solution du jeu 1. Deux gendarmes peuvent toujours gagner quelle que soit la stratégie du voleur. En revanche, s'il y a un seul gendarme, alors le voleur peut toujours gagner quelle que soit la stratégie du gendarme (voir la Section 3.2.1 pour plus de détails).

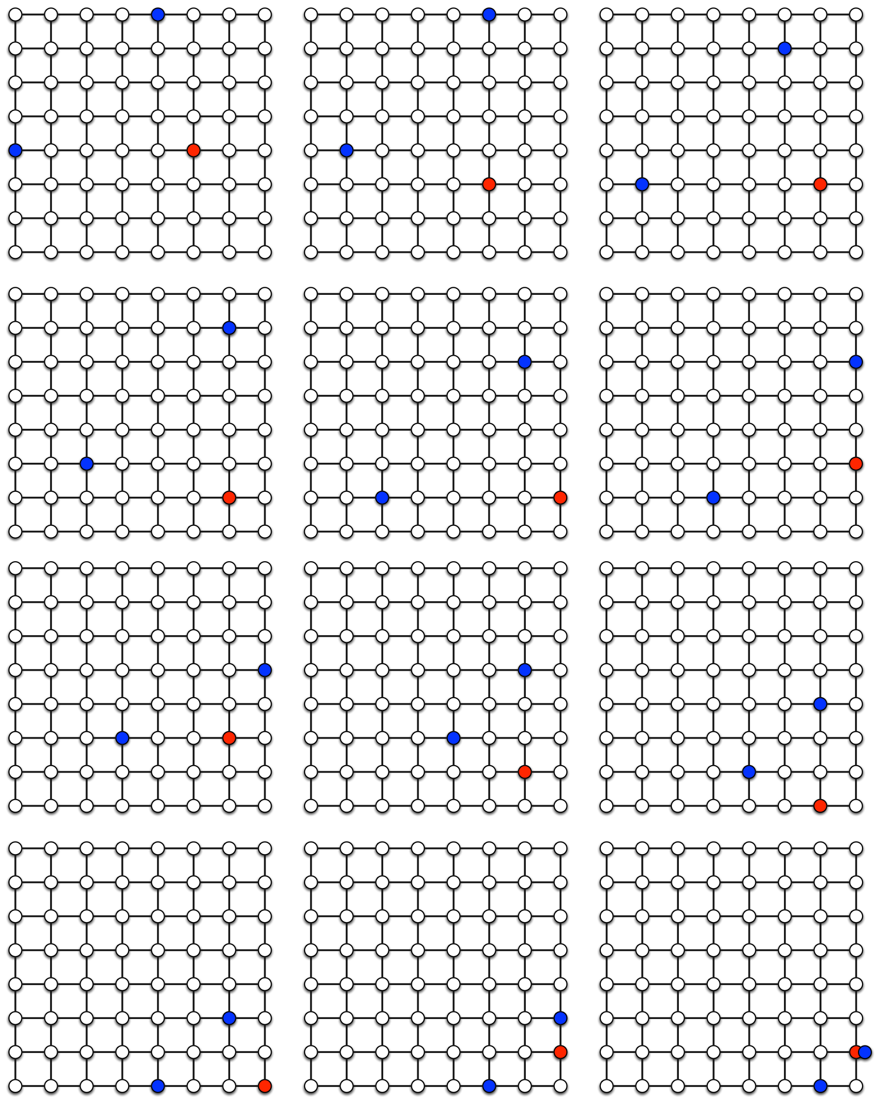
Solution du jeu 2. Il existe une stratégie qui permet au voleur de s'échapper indéfiniment (et donc pendant onze étapes) quelle que soit la stratégie des deux gendarmes. La figure suivante décrit un exemple d'une telle stratégie pour le voleur face aux déplacements des deux gendarmes (lecture de gauche à droite puis de haut en bas).



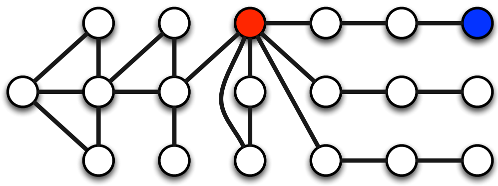
Solution du jeu 3. Il existe une stratégie qui permet à deux gendarmes de capturer le voleur quelle que soit la stratégie de ce dernier. La figure suivante montre une stratégie pour les deux gendarmes qui aboutit à la capture du voleur (lecture de gauche à droite puis de haut en bas).

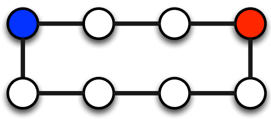


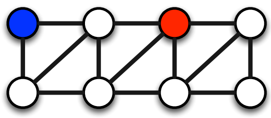
Solution du jeu 4. Il existe une stratégie qui permet à deux gendarmes de capturer le voleur quelle que soit sa stratégie. La figure suivante montre une stratégie pour les deux gendarmes qui aboutit à la capture du voleur (lecture de gauche à droite puis de haut en bas). Nous observons que le plus petit nombre de gendarmes qui permet de capturer le voleur quelle que soit sa stratégie est deux pour les deux grilles (jeu 3 et jeu 4). Plus généralement, quelle que soit la taille de la grille, deux gendarmes suffisent à capturer le voleur.

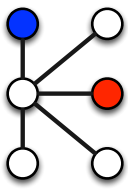


Solutions des jeux 5 à 9. Les sommets bleus représentent la position initiale de chaque gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour le troisième graphe, il existe une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du gendarme. Pour tous les autres graphes, il existe une stratégie gagnante pour le gendarme quelle que soit la stratégie du voleur.

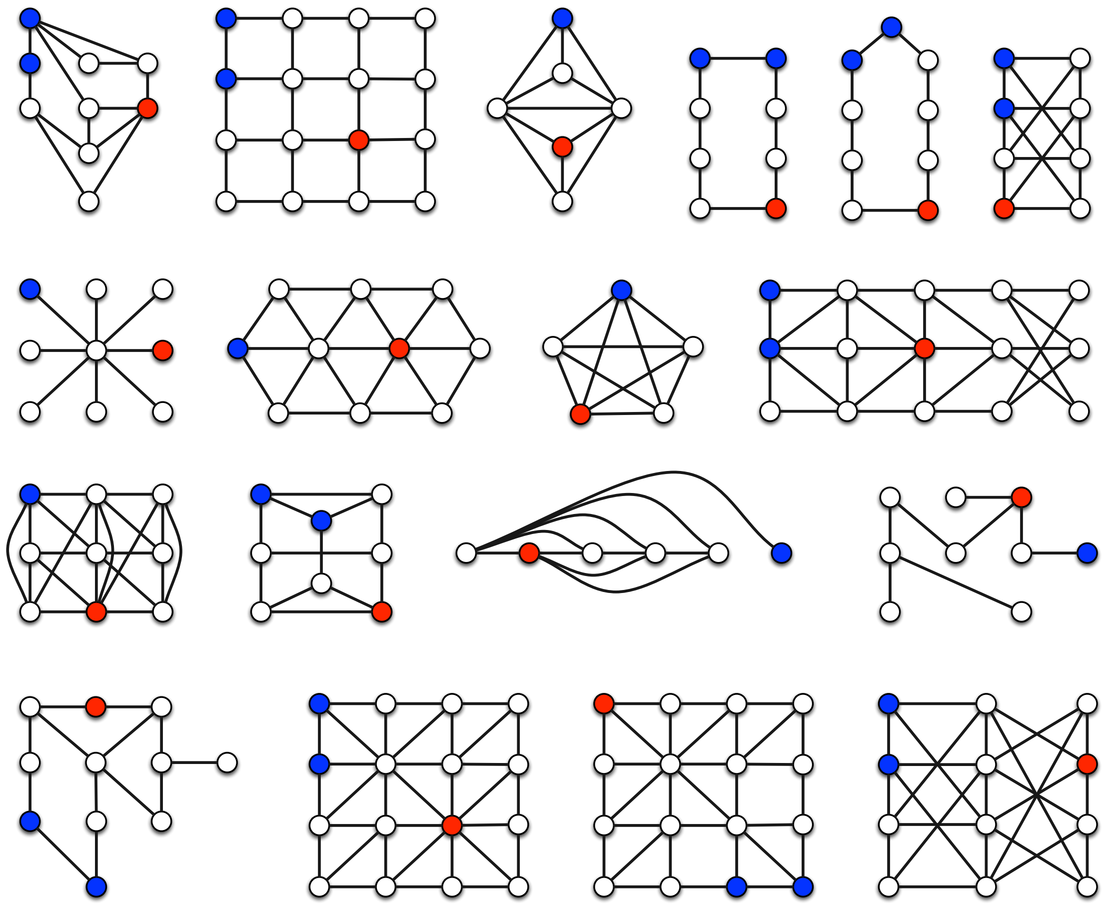




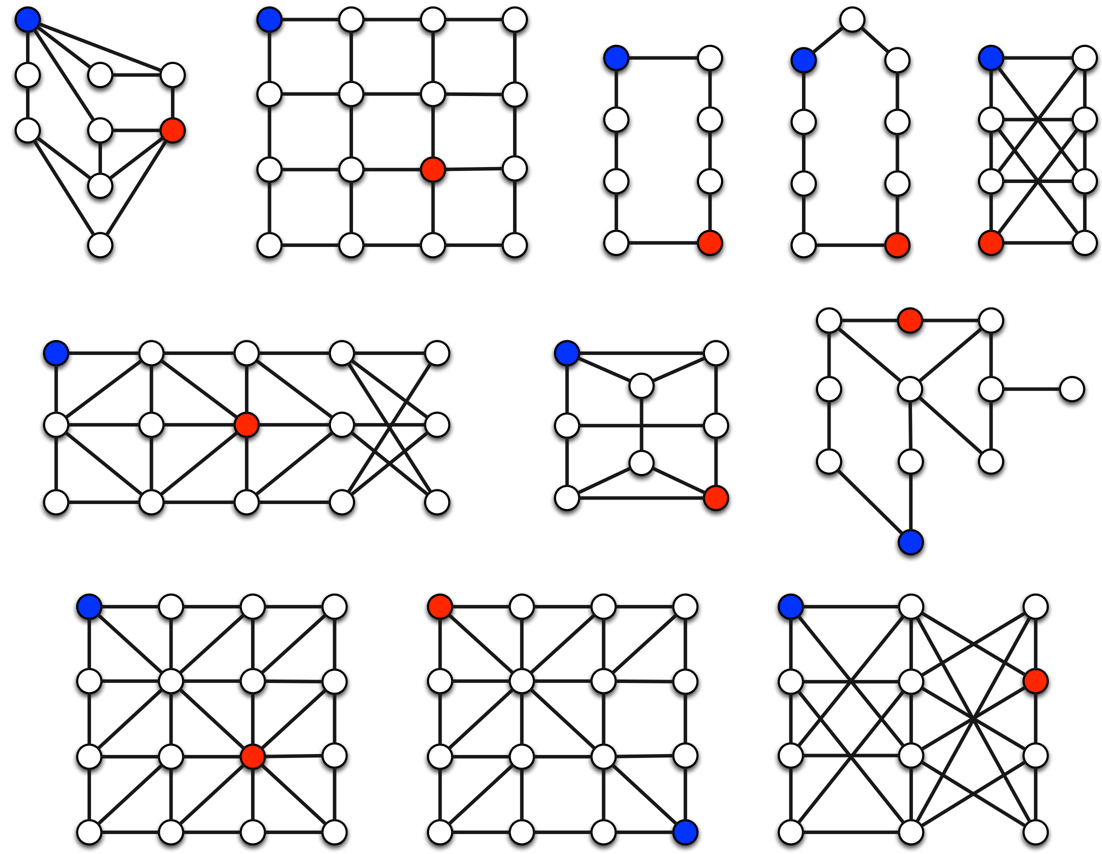




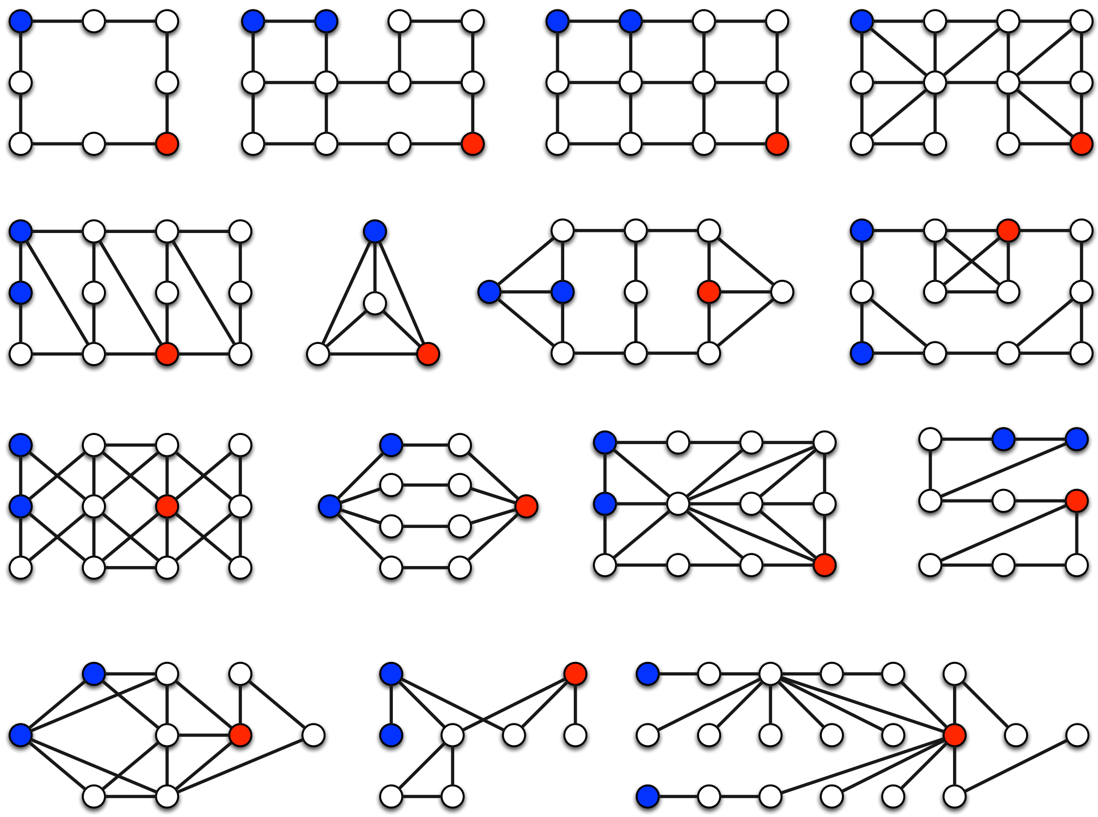
Solutions des jeux 10 à 27. Les sommets bleus représentent la position initiale de chaque gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Initialement, les gendarmes ne sont pas sur un même sommet. Pour tous ces jeux, il existe une stratégie gagnante pour le ou les gendarmes quelle que soit la stratégie du voleur.



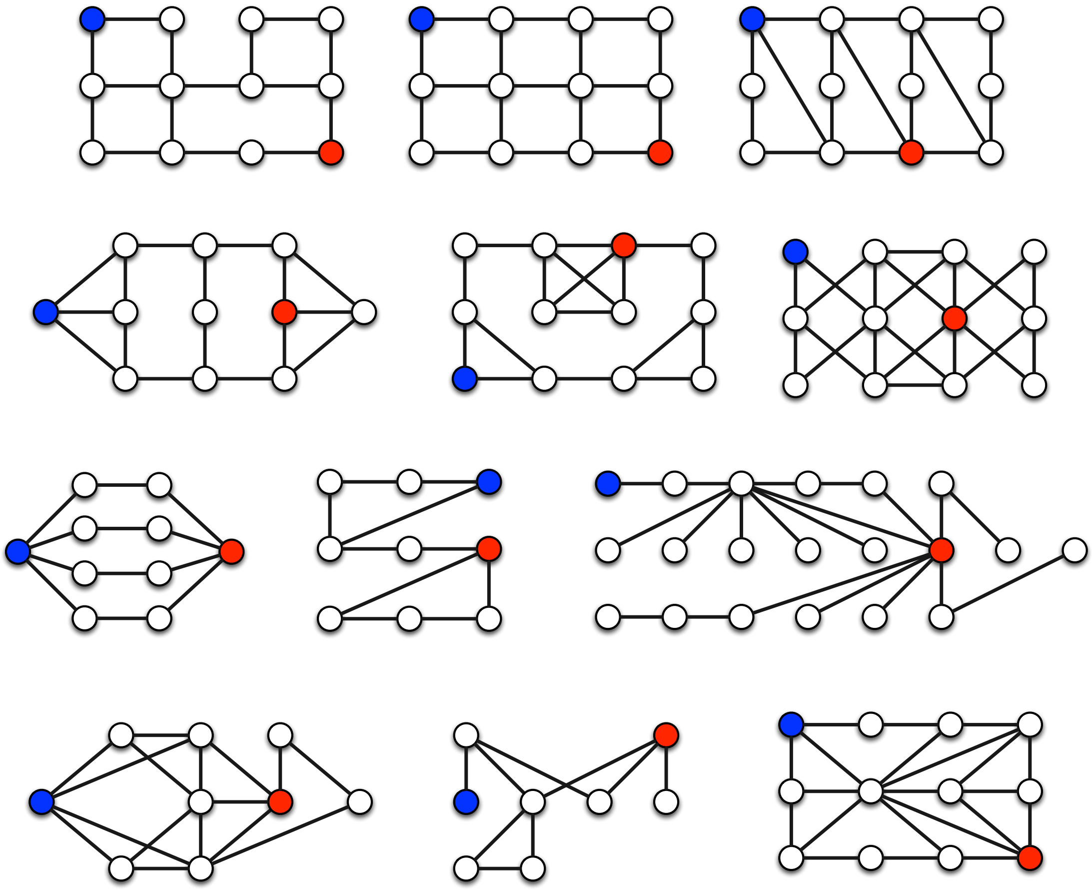
Solutions des jeux 28 à 38. Le sommet bleu représente la position initiale du gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour tous ces jeux, il existe une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du gendarme.



Solutions des jeux 39 à 53. Les sommets bleus représentent la position initiale de chaque gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Initialement, les gendarmes ne sont pas sur un même sommet. Pour tous ces jeux, il existe une stratégie gagnante pour le ou les gendarmes quelle que soit la stratégie du voleur.



Solutions des jeux 54 à 65. Le sommet bleu représente la position initiale du gendarme et le sommet rouge est la position initiale du voleur. Pour tous ces jeux, il existe une stratégie gagnante pour le voleur quelle que soit la stratégie du gendarme.

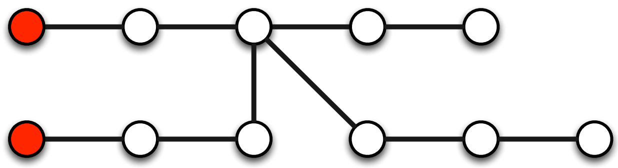


3.3 Parcours dans les graphes

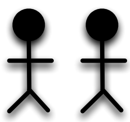
Nous présentons dans cette partie le *jeu du parcours* dans les graphes. Le but est que tous les sommets du graphe soient visités au moins une fois par un des joueurs. Nous expliquons tout d'abord les règles du jeu et des graphes pour jouer avec des solutions.

3.3.1 Règles du jeu et exemple

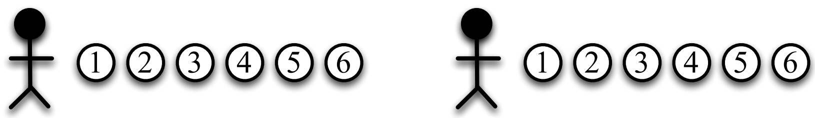
Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque et un ensemble de points de départ représentés par des sommets rouges. Considérons le graphe suivant.



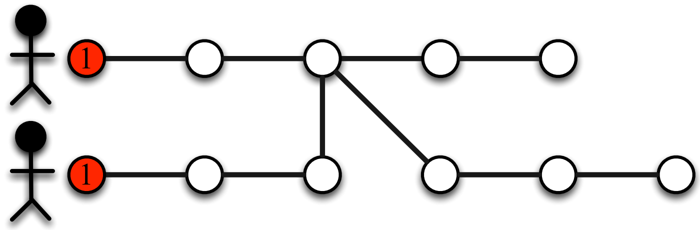
Nombre de joueurs. Le nombre de joueurs est égal au nombre de points de départ (plusieurs points de départ peuvent se trouver sur un même sommet). Dans notre exemple, il y a deux joueurs.



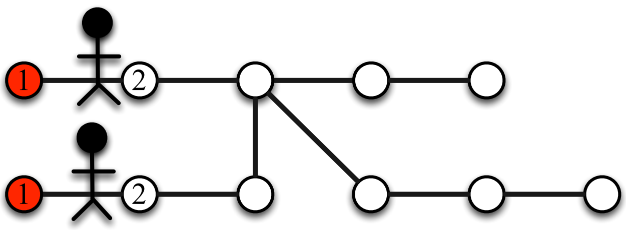
Accessoires. Chacun des joueurs a un certain nombre d'objets en sa possession. Dans l'exemple, les deux joueurs ont chacun six objets en leur possession.



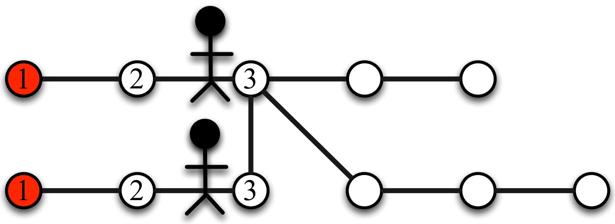
Déroulement du jeu. Au départ les joueurs occupent les sommets de départ (les deux sommets rouges dans l'exemple). Ils déposent un objet sur leur sommet de départ respectif.



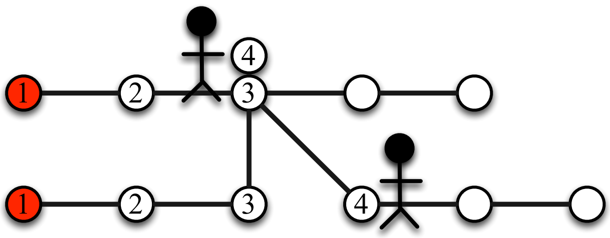
Les joueurs se déplacent, chacun leur tour, sur un sommet voisin et dépose obligatoirement un objet sur le sommet (même si ce sommet contient déjà un ou plusieurs objets). Les joueurs peuvent se retrouver sur un même sommet du graphe au cours du jeu. Le jeu s'arrête lorsque les joueurs n'ont plus d'objet. Pour notre exemple, la figure suivante représente la deuxième étape du jeu. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés.



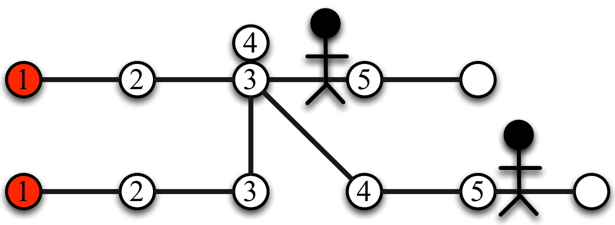
La figure suivante représente la troisième étape du jeu.



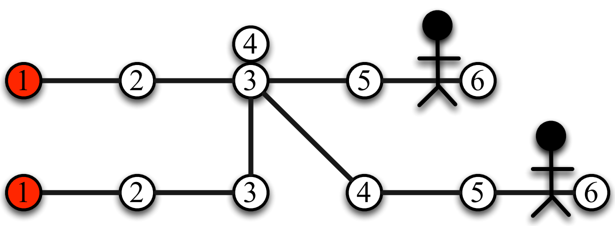
La figure suivante représente la quatrième étape du jeu.



La figure suivante représente l'avant-dernière étape du jeu.

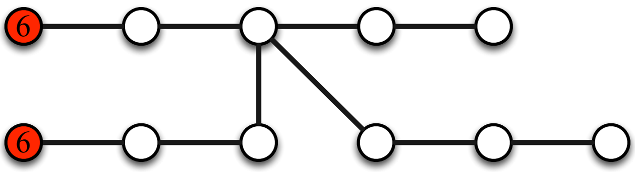


Enfin, la figure suivante représente la dernière étape du jeu. Les deux joueurs ont gagné car tous les sommets ont été visités par au moins un des deux joueurs (c'est-à-dire tous les sommets ont un objet posé dessus).

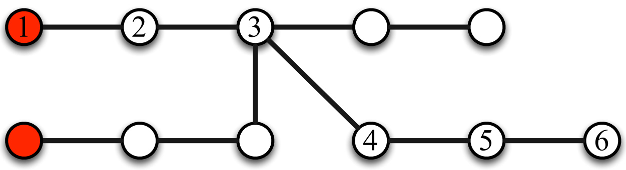


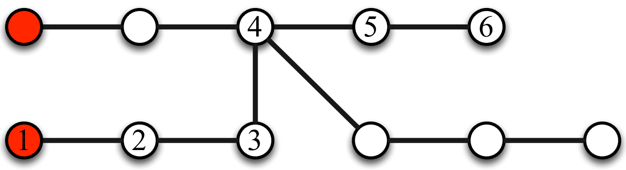
But du jeu. Lorsque le jeu est terminé (c'est-à-dire lorsque tous les objets ont été déposés sur les sommets), les joueurs ont gagné si et seulement si tous les sommets ont été visités par au moins un joueur (c'est-à-dire s'ils contiennent au moins un objet). Le cas échéant, tous les joueurs ont perdu. Pour notre exemple, les deux joueurs ont gagné car à la fin du jeu (lorsque tous les objets ont été posés) tous les sommets contiennent au moins un objet.

Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, les entiers sur les sommets de départ représenteront le nombre d'objets que possède initialement le joueur partant de ce sommet.



Ensuite, les entiers sur les sommets représenteront les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés par les joueurs. Les deux parcours des deux joueurs dans notre exemple sont représentés dans les deux figures suivantes.



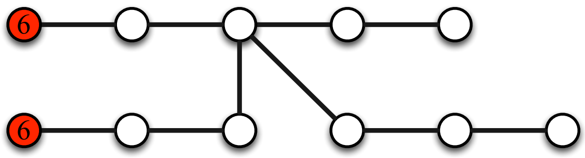


3.3.2 Application au calcul de parcours de livreurs

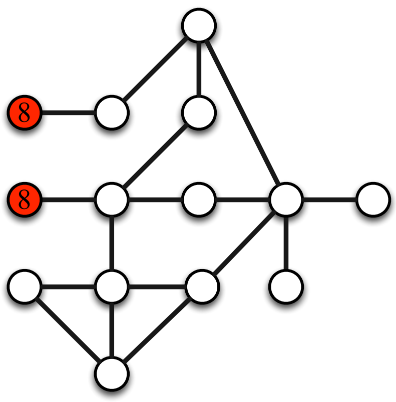
Dans la suite, nous décrivons une des applications possibles du problème de parcours dans les graphes (vous pouvez facilement en trouver d'autres). Les sommets rouges de départ peuvent représenter les positions de livreurs. Ces derniers doivent livrer une information (ou un bien) à toutes les destinations. Les destinations sont les sommets du graphe et les arêtes sont les possibles routes pour aller d'un sommet à un autre. Les livreurs peuvent parcourir un nombre limité de sommets (ce sont les nombres sur les sommets). Lorsqu'un livreur est sur un sommet, alors il livre l'information (ou le bien). Le problème est alors de trouver un parcours pour chacun des livreurs avec l'objectif d'effectuer une livraison à tout le monde. Cela correspond exactement au problème étudié précédemment de parcours dans les graphes.

3.3.3 Graphes pour jouer

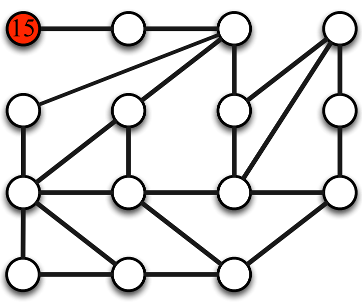
Jeu 1. Considérons le graphe suivant avec deux sommets de départ (sommets rouges) et six objets en possession de chacun des deux joueurs. Quelle est la solution pour ce jeu du parcours ?



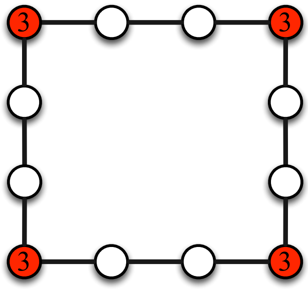
Jeu 2. Considérons le graphe suivant avec deux sommets de départ (sommets rouges) et huit objets en possession de chacun des deux joueurs. Est-ce qu'il existe une solution pour cette instance ? Si non, combien de sommets au minimum n'ont pas d'objet posé dessus à la fin de la partie ?



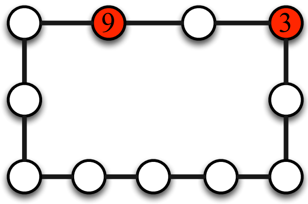
Jeu 3. Considérons le graphe suivant avec un joueur et quinze objets. Ce nombre d'objets est-il suffisant pour parcourir tout le graphe ?



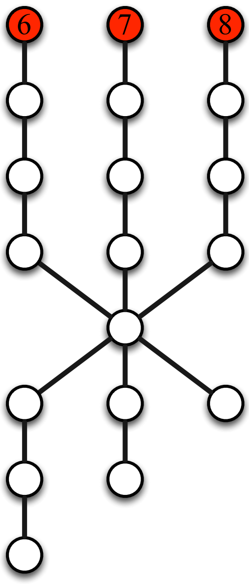
Jeu 4. Les sommets rouges représentent les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ).



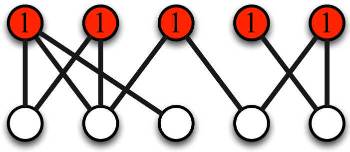
Jeu 5. Les sommets rouges représentent les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ).



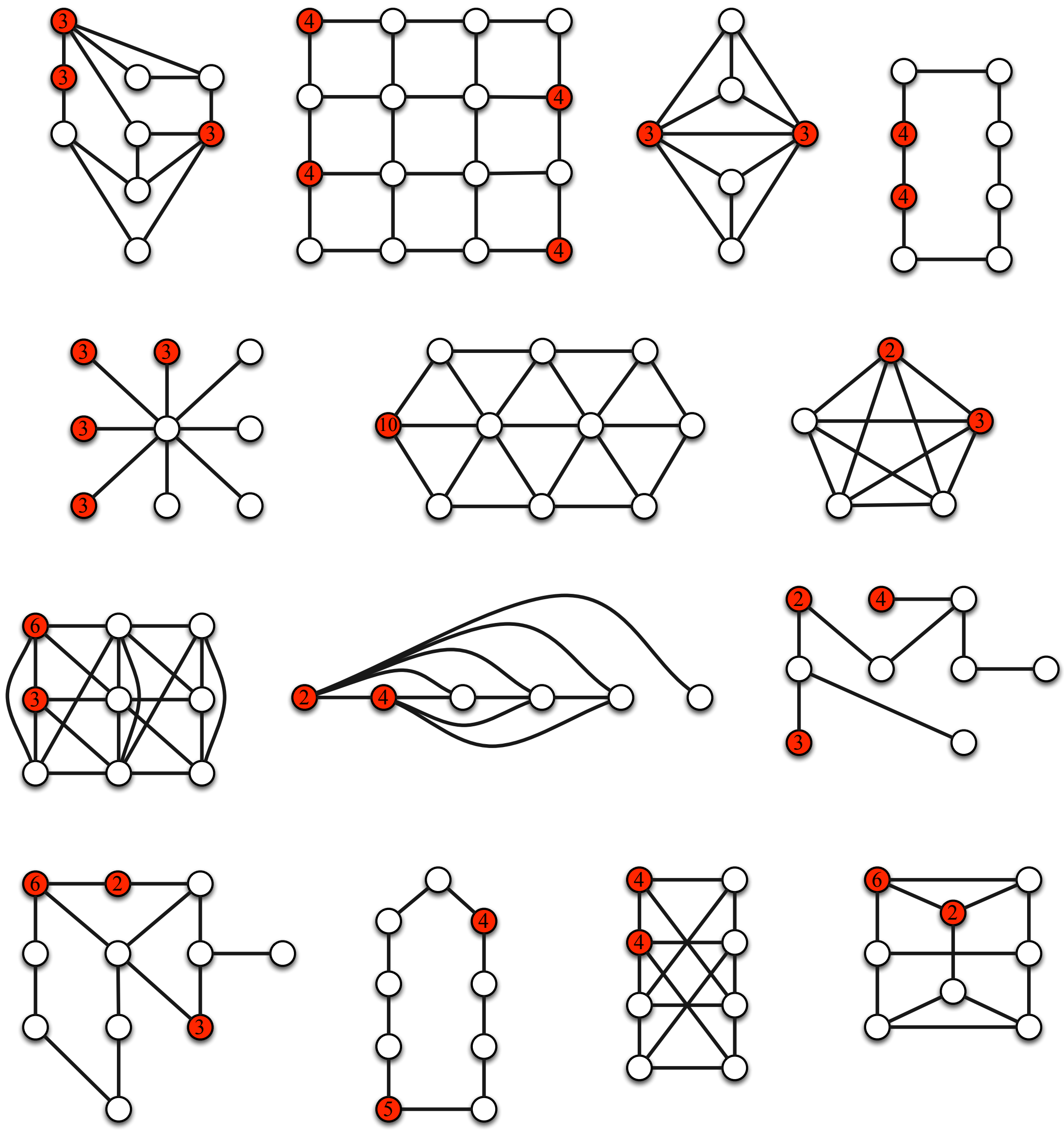
Jeu 6. Les sommets rouges représentent les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ).



Jeu 7. Les sommets rouges représentent les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ).

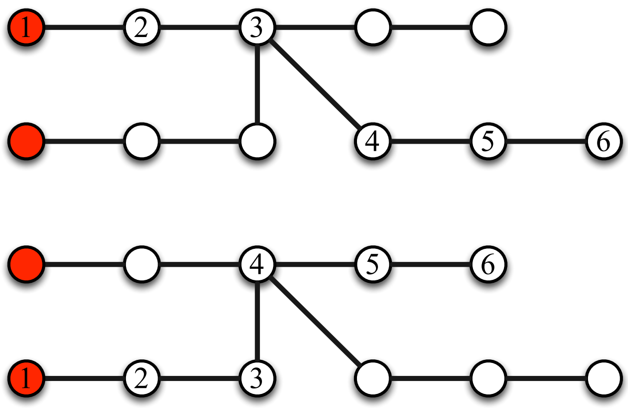


Jeux 8 à 21. Les figures suivantes décrivent quatorze jeux du parcours.

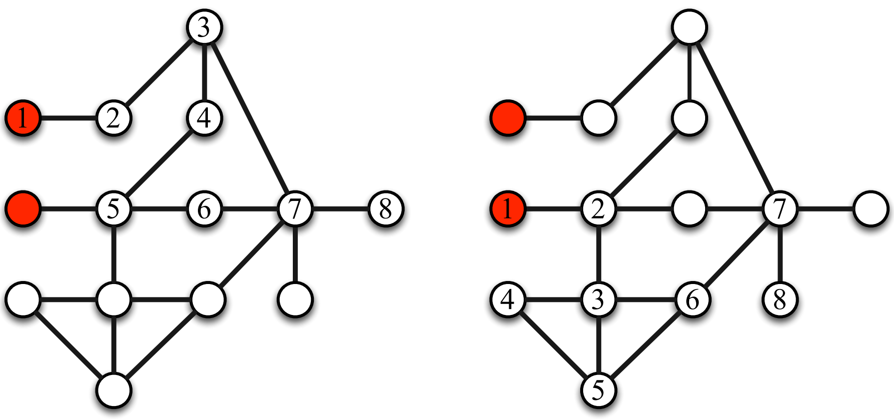


3.3.4 Solutions des jeux

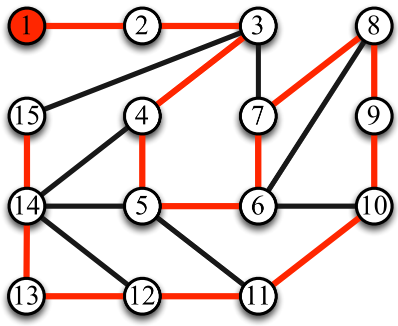
Solution du jeu 1. La figure suivante représente la solution (les parcours des deux joueurs) pour le jeu 1 du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés. En combinant ces deux parcours, tous les sommets du graphe contiennent au moins un objet à la fin de la partie.



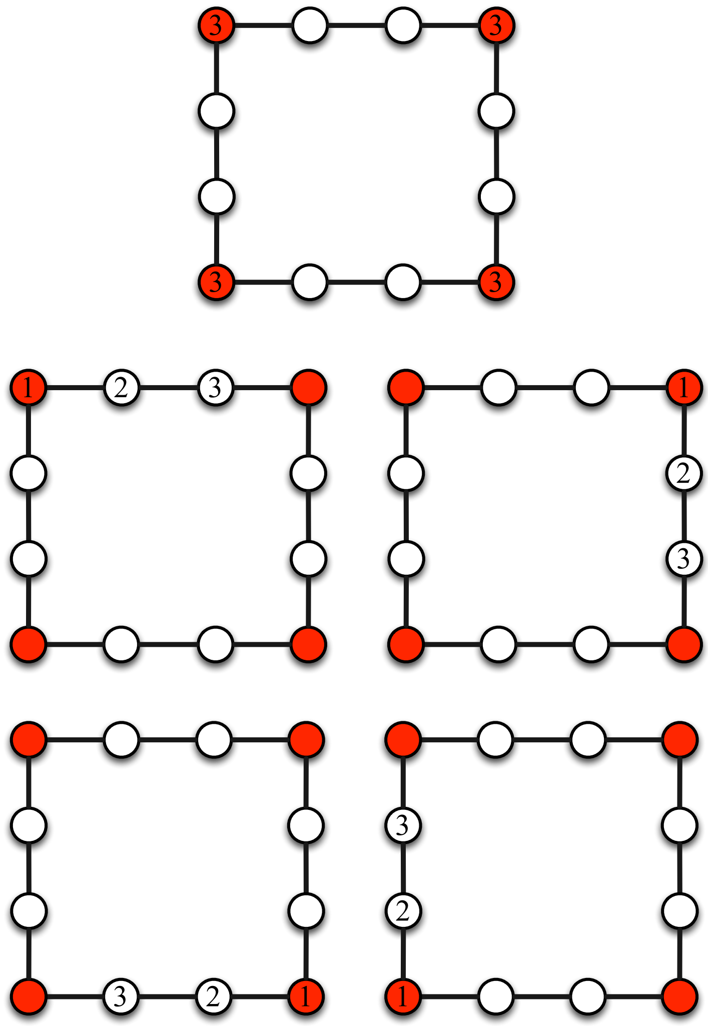
Solution du jeu 2. La figure suivante représente une solution possible (les parcours des deux joueurs) pour le jeu 2 du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés. En combinant ces deux parcours, tous les sommets du graphe contiennent au moins un objet à la fin de la partie.



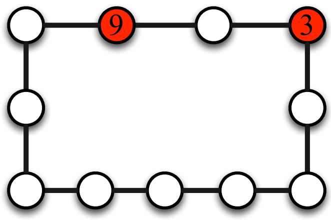
Solution du jeu 3. La figure suivante représente une solution possible pour le jeu 3 du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés. Dans le cas d'un seul joueur et si le nombre d'objets est égal au nombre de sommets, le problème revient à trouver un *chemin hamiltonien* (en partant du sommet fixé) dans le graphe. En effet, un chemin hamiltonien est un chemin qui passe pas tous les sommets une et une seule fois.

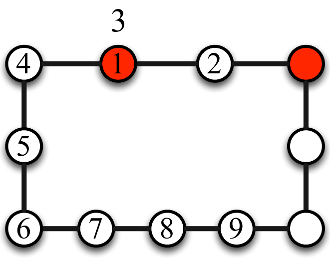


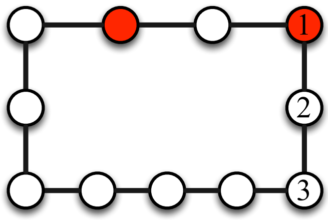
Solution du jeu 4. Le premier graphe représente les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ). Les autres figures représentent les parcours des différents joueurs et donc une solution pour le jeu du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés.



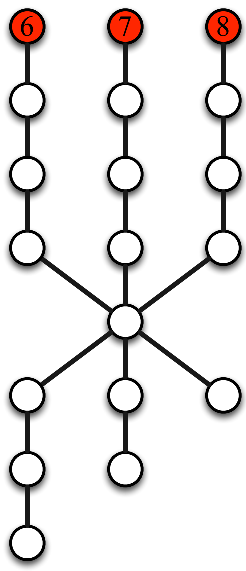
Solution du jeu 5. Le premier graphe représente les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ). Les autres figures représentent les parcours des différents joueurs et donc une solution pour le jeu du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés.

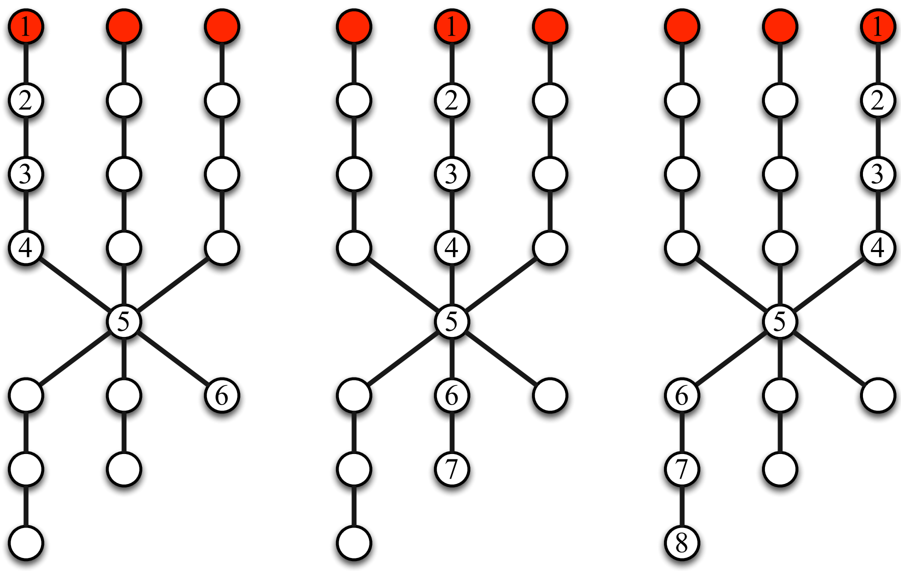




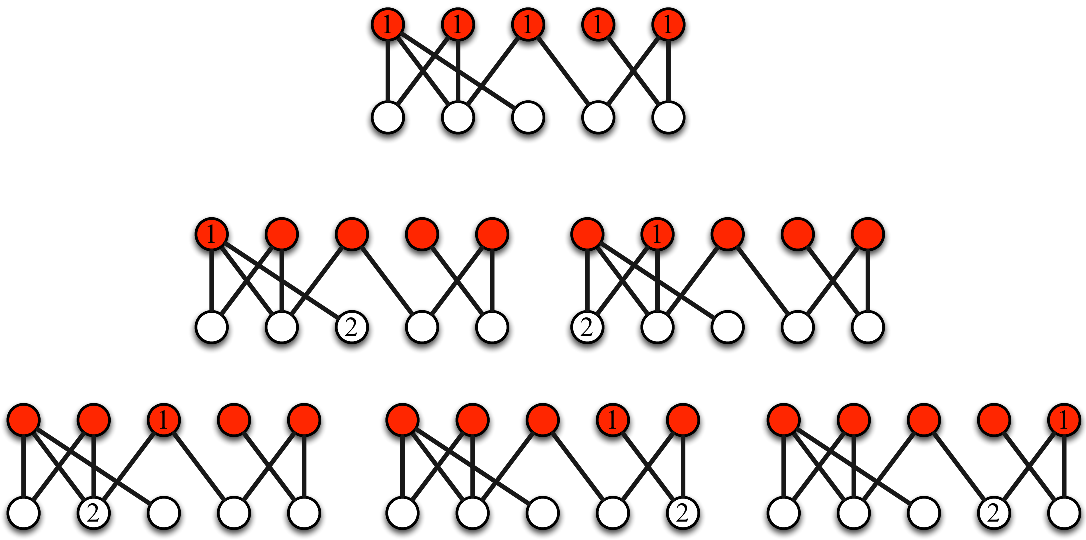


Solution du jeu 6. Le premier graphe représente les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ). Les autres figures représentent les parcours des différents joueurs et donc une solution pour le jeu du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés.

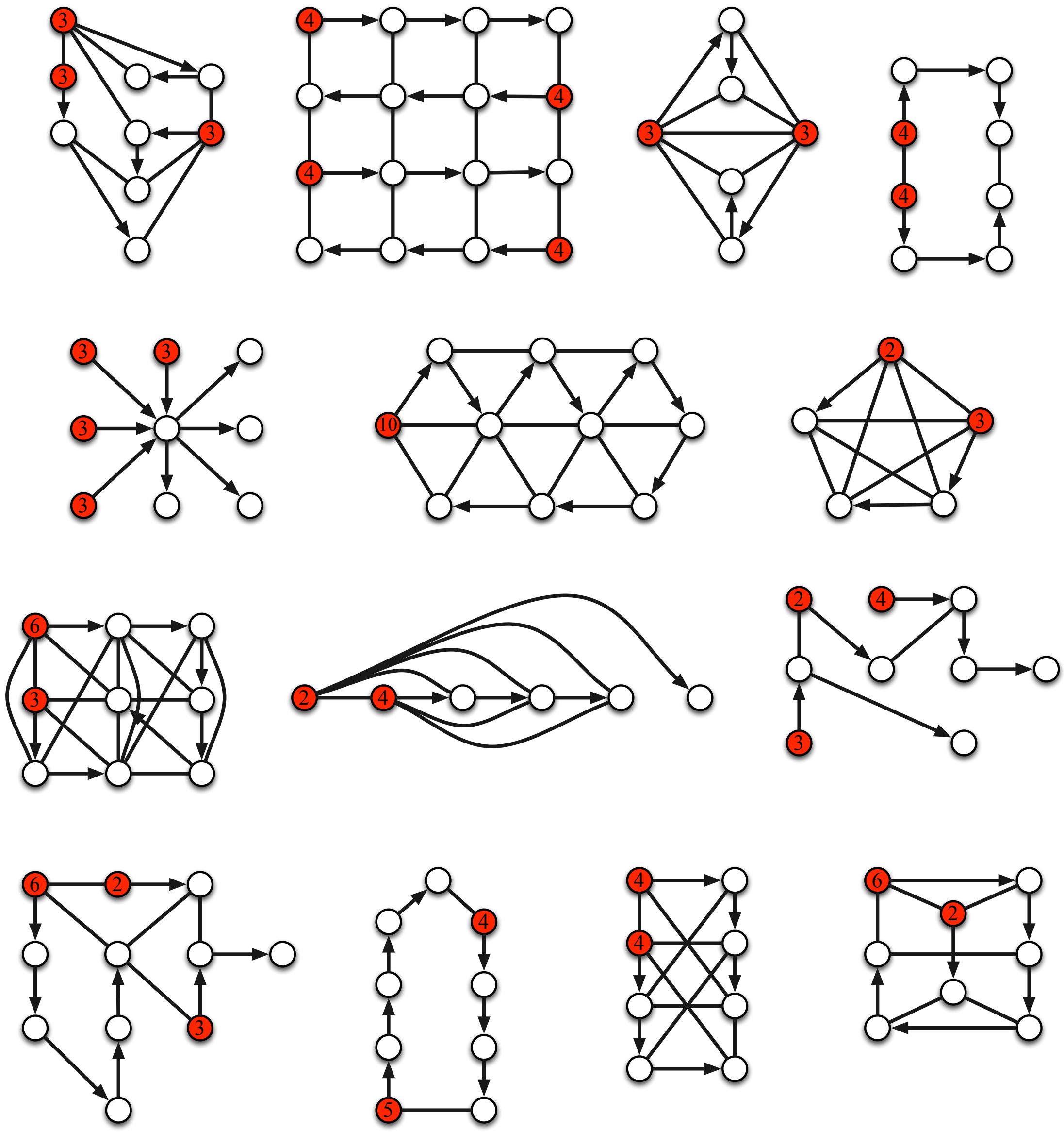




Solution du jeu 7. Le premier graphe représente les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ). Les autres figures représentent les parcours des différents joueurs et donc une solution pour le jeu du parcours. Les entiers sur les sommets représentent les étapes pour lesquelles des objets ont été déposés.

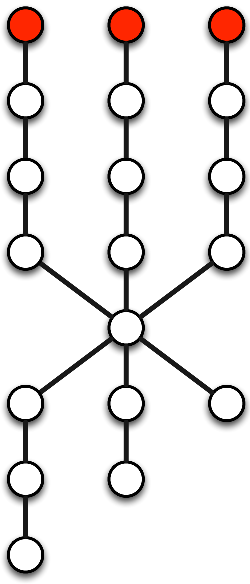


Solutions des jeux 8 à 21. Les sommets rouges représentent les points de départ et les nombres d'objets pour chacun des joueurs (il y a un joueur par point de départ). Les arcs (flèches) représentent les parcours des différents joueurs dans les graphes et donc des solutions pour les jeux.



3.3.5 Déclinaison du jeu

Une variante du jeu consiste à ne pas indiquer les nombres de départ (les nombres sur les sommets) et de faire calculer des nombres tels qu'il existe une solution de parcours. Par exemple, dans le graphe suivant, si nous mettons les nombres 6, 7 et 8, alors il y a une solution (c'est le jeu 6). Il y a évidemment d'autres solutions possibles. Une des questions intéressantes est alors de trouver des nombres permettant d'avoir une solution et tels que la somme de ces derniers soit la plus petite possible. Pour l'exemple, la somme optimale est 21 (qui correspond à la solution précédente).



Chapitre 4

Jeux de construction de graphes

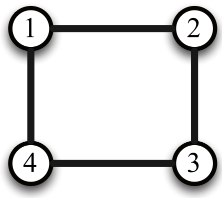
4.1 Construction d'un réseau routier

Dans cette section, nous nous intéressons au *jeu du réseau routier* qui consiste à résoudre le problème suivant.

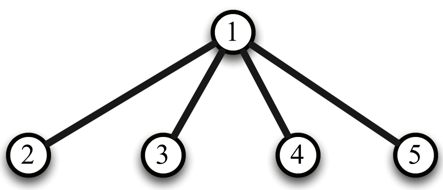
4.1.1 Problème

Dans une petite île, chaque route joint en ligne droite deux des villes. Le réseau routier a été construit de telle sorte que de chaque ville partent au plus trois routes et il est toujours possible d'aller d'une ville à l'autre soit par une route directement, soit en passant au plus par une ville intermédiaire. Le nombre de villes de l'île peut-il être 5 ? 6 ? 7 ? Combien y a-t-il, au plus, de villes dans cette île ?

Ce problème peut être formulé en termes de graphe. Il s'agit alors de construire un graphe de telle sorte que de chaque sommet partent au plus trois arêtes et il est toujours possible d'aller d'un sommet à l'autre soit par une arête directement, soit en passant par un seul sommet intermédiaire. La figure suivante montre un exemple de graphe valide.

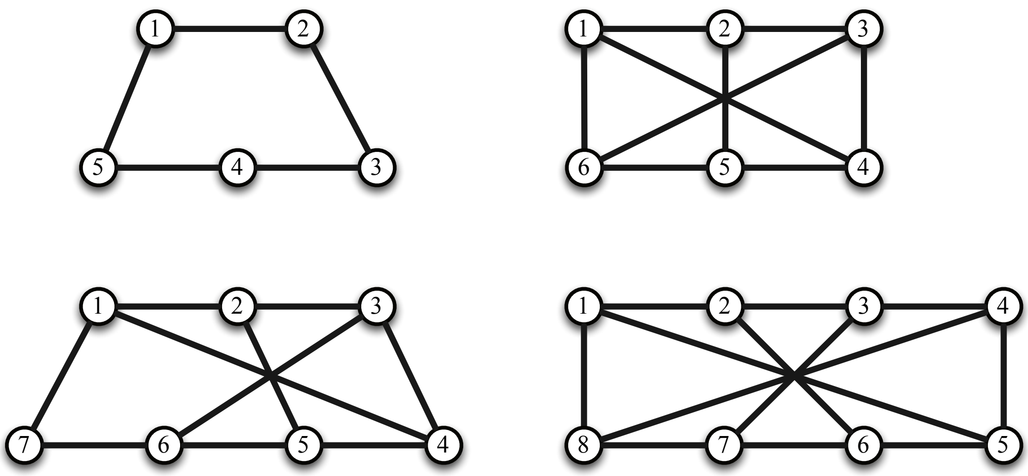


La figure suivante décrit deux graphes non valides. Pour le premier, il n'est pas possible d'aller du sommet *1* au sommet *4* directement ou par un sommet intermédiaire. En effet, le seul chemin entre ces deux sommets contient deux sommets intermédiaires. Pour le deuxième, le problème est que quatre arêtes partent du sommet *1*.

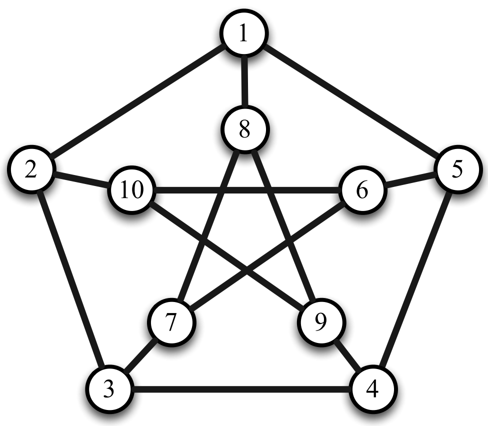


4.1.2 Solution

La figure suivante représente des solutions avec 5, 6, 7 et 8 villes (sommets).



Il n'y a pas de solution avec 9 villes (sommets) mais il existe une solution avec 10 villes (sommets) représentée ci-dessous. Cette solution est optimale car il y a au plus 10 villes dans cette île.

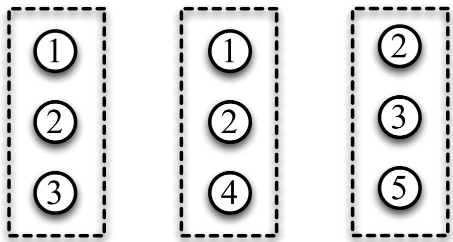


4.2 Quelles sont les arêtes du graphe ?

Nous expliquons tout d'abord les règles du jeu abordé dans cette section, appelé *jeu de l'inférence*, et présentons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

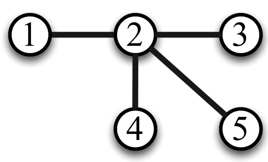
4.2.1 Règles du jeu et exemple

Listes de sommets. Le jeu se déroule à partir d'une liste de sommets (un sommet peut être dans plusieurs listes). Considérons par exemple les trois listes suivantes.

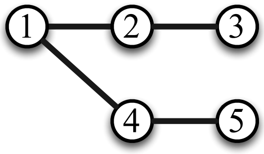


Nombre de joueurs. Le nombre de joueurs est quelconque. Le jeu est collaboratif : tous les joueurs gagnent ou tous les joueurs perdent.

But du jeu. Le but est que les joueurs construisent un graphe composé des sommets des listes et avec le plus petit nombre d'arêtes de telle sorte que, pour toute liste et pour toute paire de sommets de cette liste, alors il existe un chemin entre les deux sommets de cette paire qui passe uniquement par des sommets de cette liste. Autrement dit, pour toute liste, si nous enlevons tous les sommets n'appartenant pas à cette liste, alors entre deux sommets quelconques de cette liste, il existe un chemin. La figure suivante représente une solution pour notre exemple. En effet, pour la première liste, il y a une arête entre le sommet *1* et le sommet *2*, il y a une arête entre le sommet *2* et le sommet *3* et il y a un chemin entre le sommet *1* et le sommet *3* qui passe par le sommet *2*. Autrement dit, si nous enlevons le sommet *4* et le sommet *5*, il existe un chemin entre deux sommets quelconques de la première liste. Les conditions précédentes sont également vérifiées pour les deux autres listes de sommets de notre exemple. Remarquons que pour ce jeu, il est possible de construire plusieurs solutions différentes. Enfin, il n'est pas possible de construire une solution avec strictement moins que quatre arêtes.

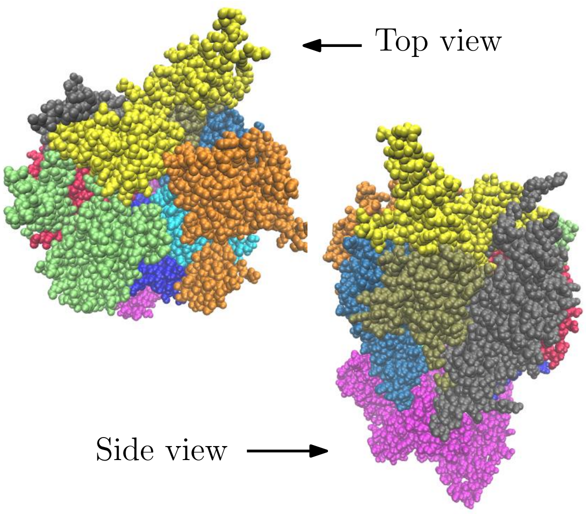


Exemple de graphe non valide. La figure suivante montre un graphe non valide car pour la troisième liste, le chemin entre le sommet *2* et le sommet *5* passe par les sommets *1* et *4* qui ne sont pas dans cette troisième liste.



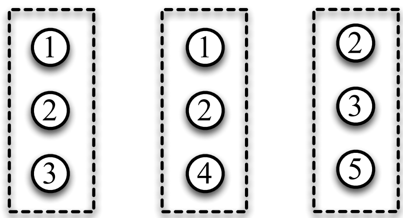
4.2.2 Application en biologie (structurale)

Le problème de déterminer les contacts entre les protéines d'un assemblage macromoléculaire peut se représenter par ce jeu de l'inférence. Intuitivement et de manière simplifiée, les sommets représentent les protéines et les listes de sommets sont les compositions de différents complexes. Trouver les contacts entre les protéines revient à trouver les arêtes du graphe dans le jeu de l'inférence. Ce graphe est une première étape dans la détermination (plus fine) de la structure d'une molécule. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans un article scientifique en anglais : `https://hal.inria.fr/hal-00837496`.

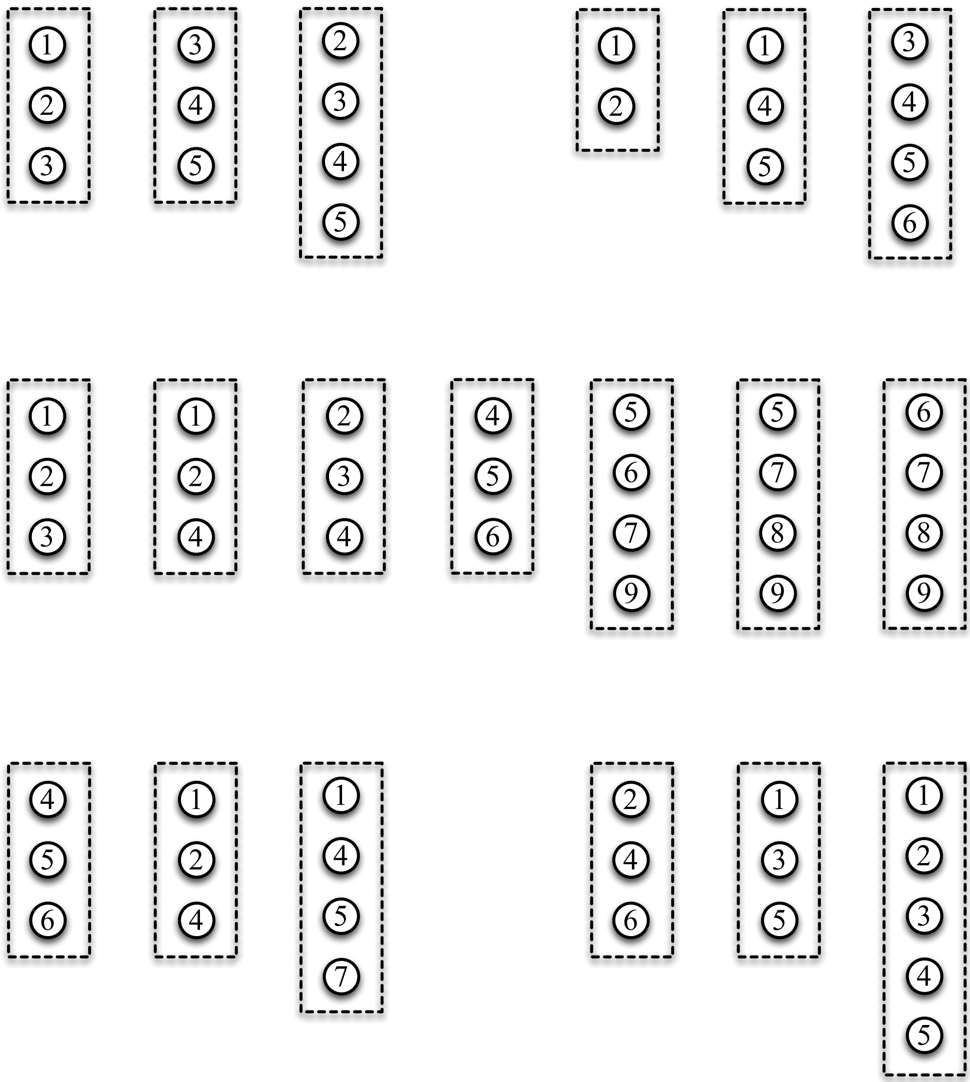


4.2.3 Listes de sommets pour jouer

Jeu 1.

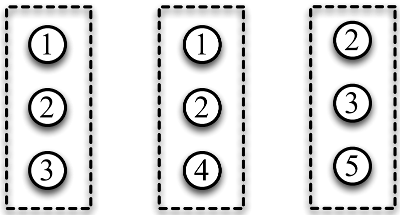


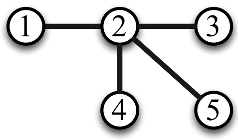
Jeux 2 à 6. La figure suivante décrit 5 jeux de l'inférence.



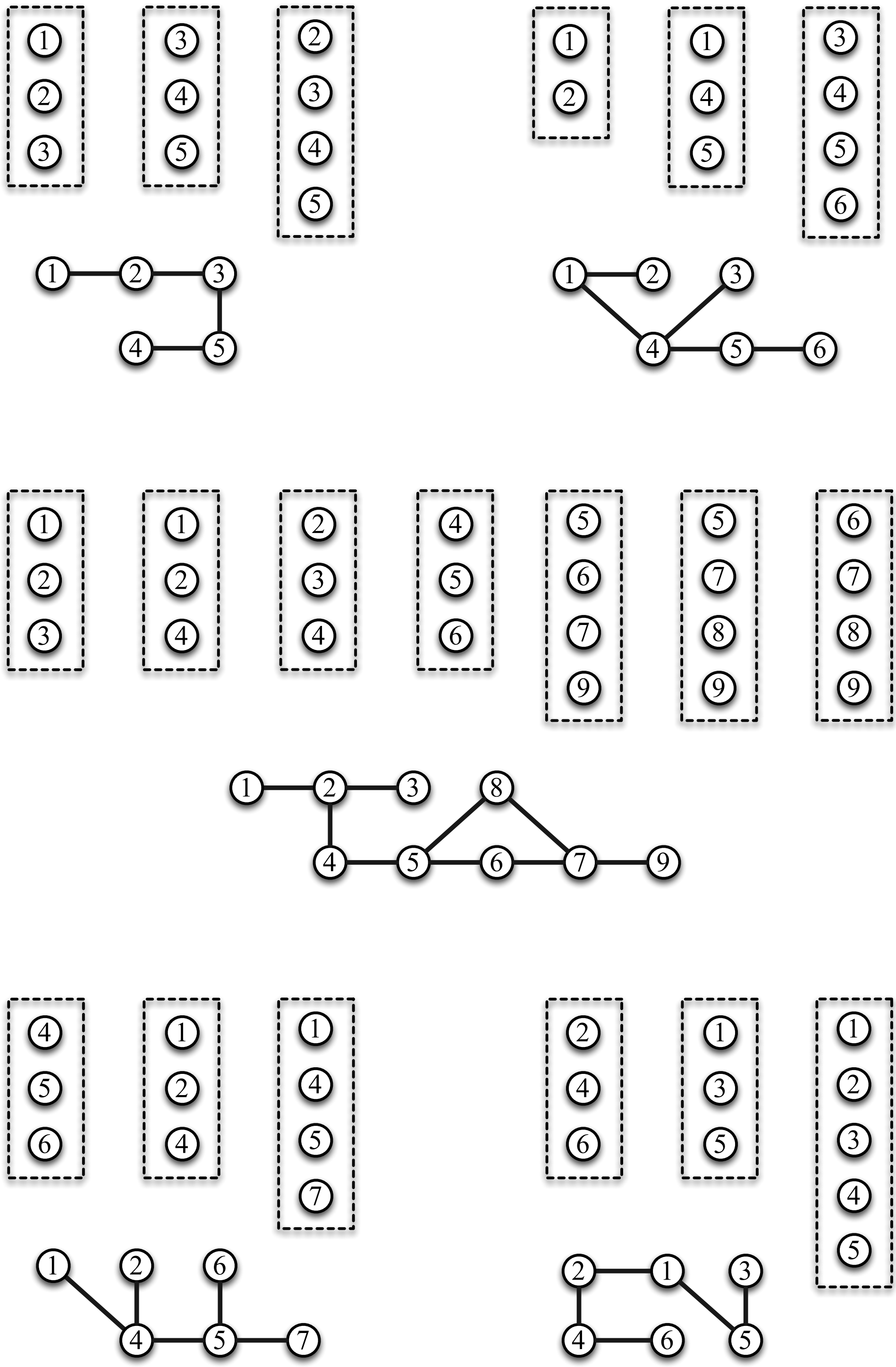
4.2.4 Solutions des jeux

Solution du jeu 1.





Solutions des jeux 2 à 6. La figure suivante décrit des solutions pour les cinq jeux de l'inférence (il existe possiblement d'autres solutions).

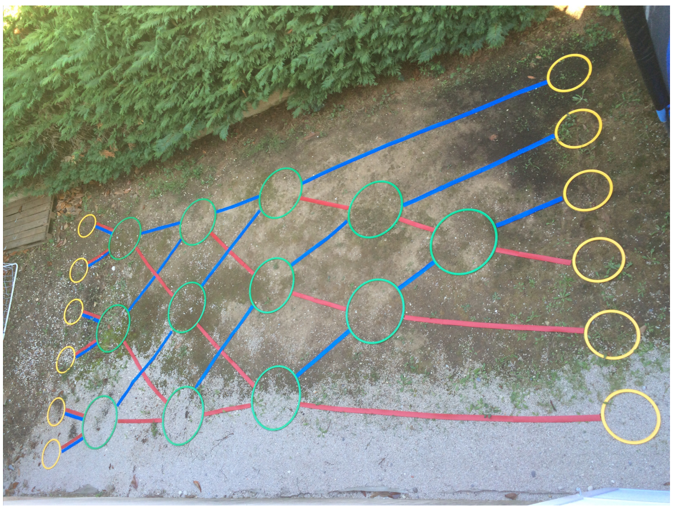


Chapitre 5

Algorithmes dans les graphes

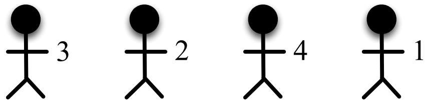
5.1 Trions !

Nous allons construire des graphes orientés permettant de trier une liste de nombres. Les joueurs auront chacun un nombre attribué et des règles vont permettre aux joueurs de se déplacer dans le graphe orienté et à la fin les nombres seront triés de manière croissante. Le jeu peut s'effectuer sans dévoiler initialement le principe de tri. Pour cela, il suffit d'expliquer les règles du jeu, d'effectuer le jeu et de faire remarquer ensuite que les nombres sont triés dans l'ordre croissant. Il est possible d'effectuer ce jeu pour trier des joueurs selon un autre ordre (par exemple selon l'ordre alphabétique sur les prénoms). L'esprit de ce document est de présenter des activités qui peuvent être proposées grandeur nature avec, par exemple, des cerceaux et des lattes en plastique. La figure suivante représente un graphe orienté pour trier six nombres (`https://youtu.be/pd3EnV-gbbo`).

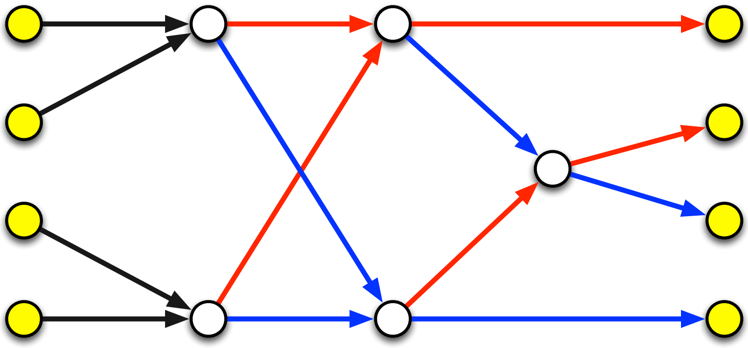


5.1.1 Règles du jeu et exemple

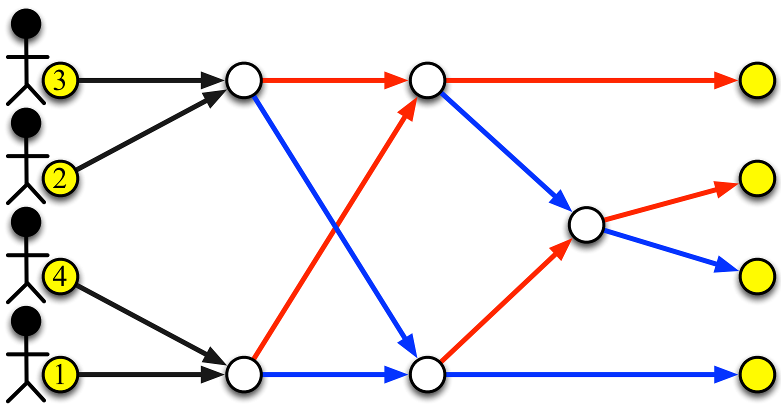
Joueurs. Initialement chaque joueur a un nombre attribué. Les nombres sont tous différents. Le jeu est collaboratif (il n'y a pas de gagnant ni de perdant). Par exemple, considérons quatre joueurs avec les nombres 1, 2, 3 et 4.



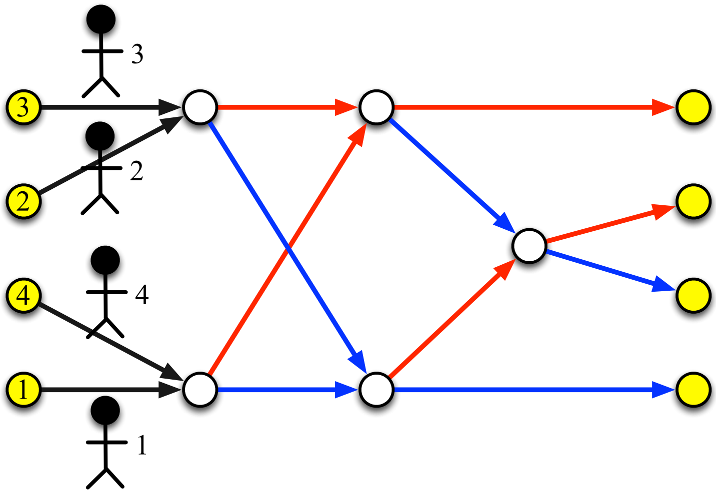
Graphe orienté. Pour trier quatre nombres, nous utiliserons le graphe orienté suivant. Les sommets jaunes de gauche sont les points de départ des joueurs et les sommets jaunes de droite sont les points d'arrivée des joueurs.



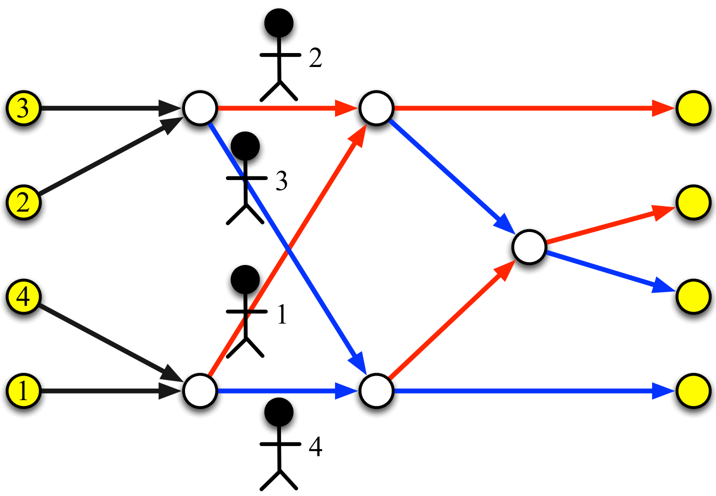
Avant le jeu. Les joueurs sont initialement positionnés sur les sommets jaunes de gauche. Les joueurs peuvent se positionner dans n'importe quel ordre (mais il y a un seul joueur par sommet). Dans notre exemple, l'ordre initial est 3, 2, 4 et 1.



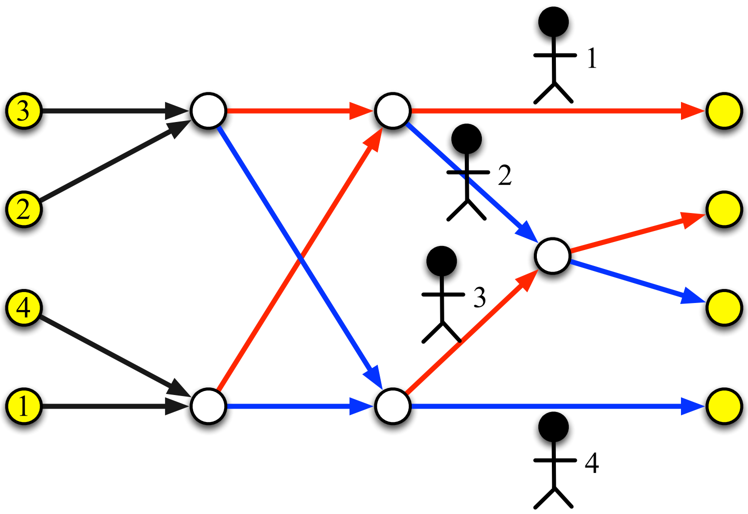
Déroulement du jeu. En premier lieu, les joueurs se déplacent sur l'arc sortant de leur sommet initial. Chaque joueur va rencontrer un autre joueur sur le prochain sommet.



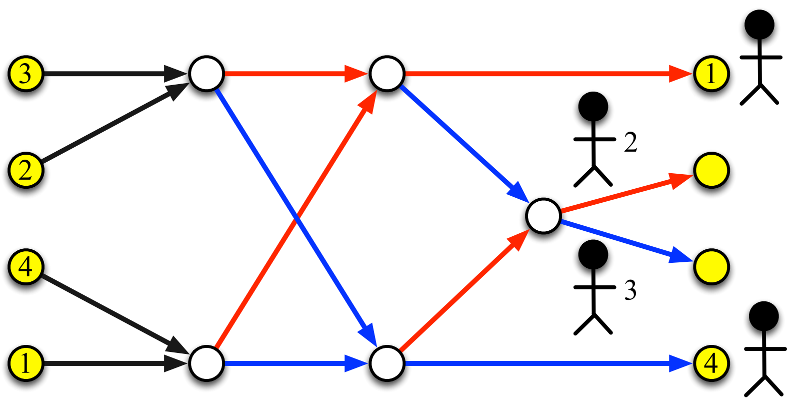
Sur chaque sommet où deux joueurs se rencontrent, ces deux derniers comparent leurs nombres. Les joueurs doivent toujours attendre d'être deux sur un sommet avant d'effectuer un déplacement. Le joueur avec le plus petit nombre se dirige sur l'arc rouge et le joueur avec le plus grand nombre se dirige sur l'arc bleu.



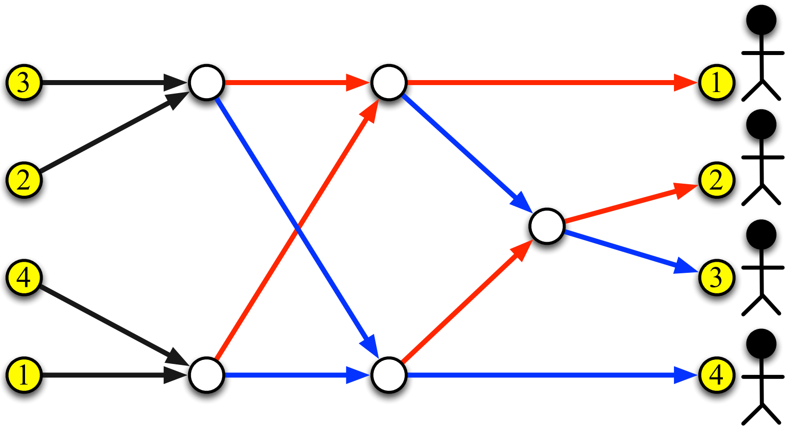
Pour chaque sommet où deux joueurs se rencontrent, les deux joueurs comparent leurs nombres. Les joueurs doivent toujours attendre d'être deux sur un sommet avant d'effectuer un déplacement. Le joueur avec le plus petit nombre se dirige sur l'arc rouge et le joueur avec le plus grand nombre se dirige sur l'arc bleu.



Si le prochain sommet d'un joueur est un sommet d'arrivée, alors ce joueur a fini le jeu. Dans notre exemple, c'est le cas pour les joueurs avec les nombres 1 et 4. Pour les autres joueurs, une comparaison est effectuée suivant le même principe que précédemment.



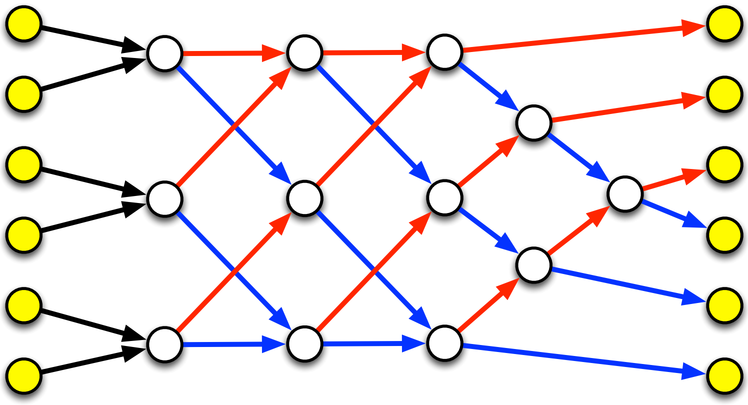
Lorsque tous les joueurs ont atteint un sommet d'arrivée, le jeu est terminé et les nombres sont triés de manière croissante (lecture de haut en bas sur la figure).



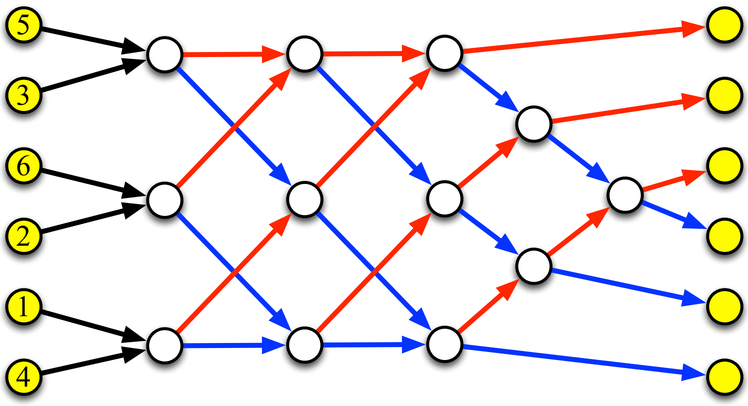
La photographie suivante illustre la fin du jeu pour trier six nombres.

5.1.2 Graphe orienté pour trier six nombres

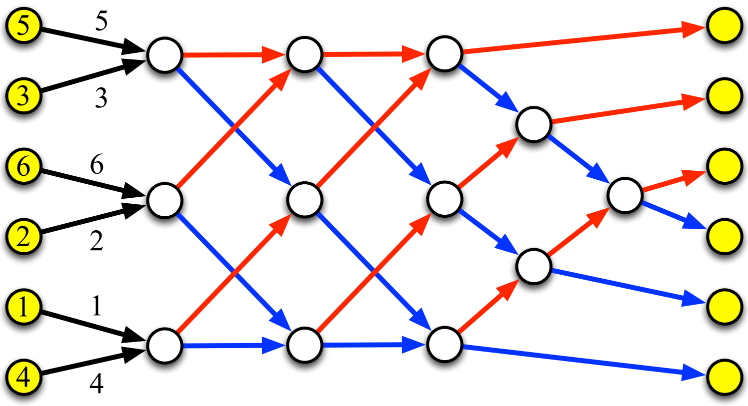
Nous donnons dans la suite un exemple de graphe orienté pour trier six nombres.



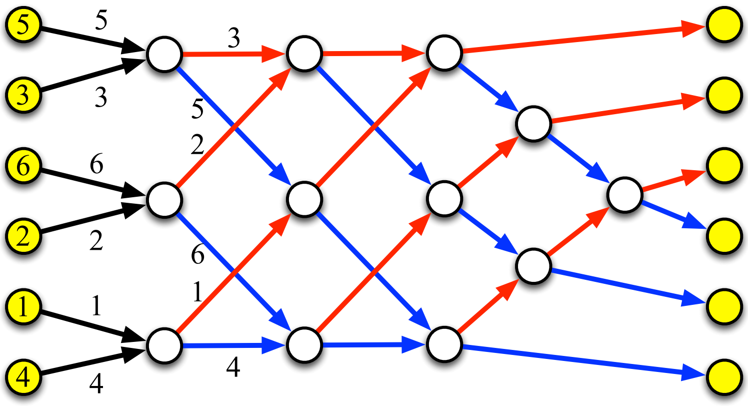
Les joueurs se positionnent sur les sommets de départ (sommets jaunes de gauche). L'ordre initial des nombres est 5, 3, 6, 2, 1 et 4.



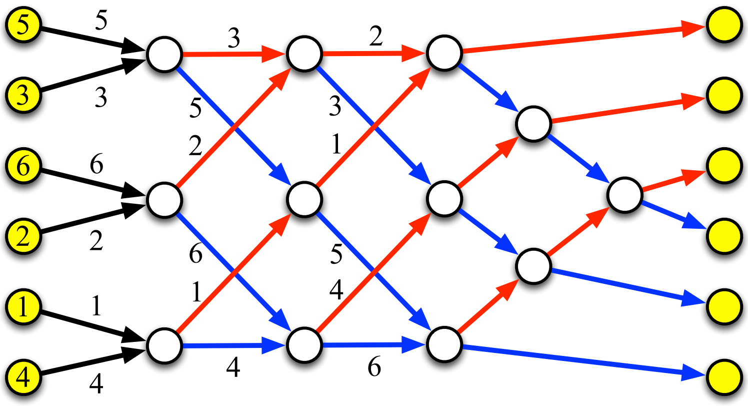
Les joueurs avancent vers le prochain sommet.



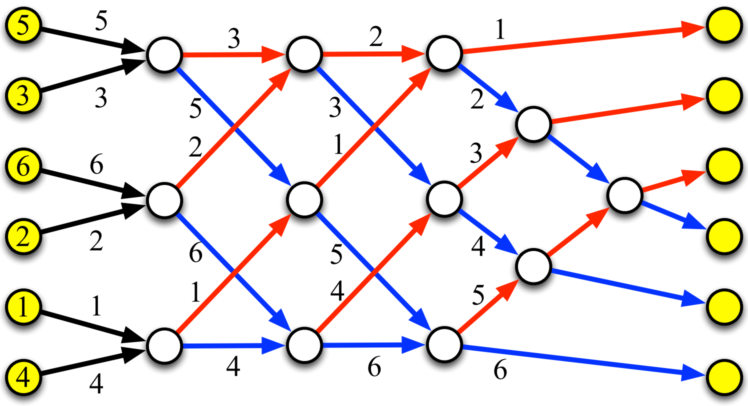
Les joueurs sur un même sommet comparent leurs nombres (le plus petit suit l'arc rouge et le plus grand suit l'arc bleu).



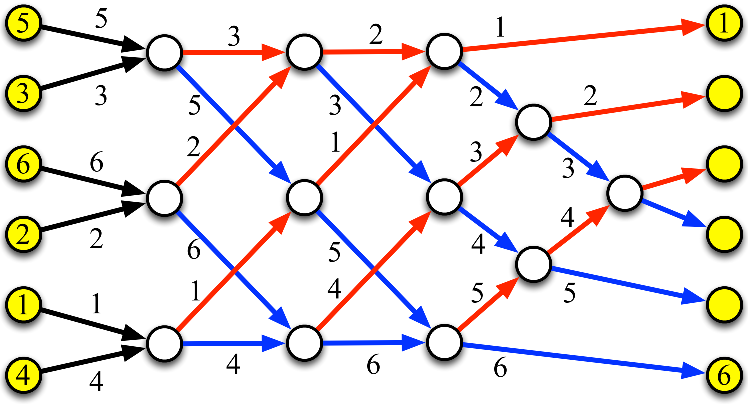
Différentes comparaisons sont à nouveau effectuées.



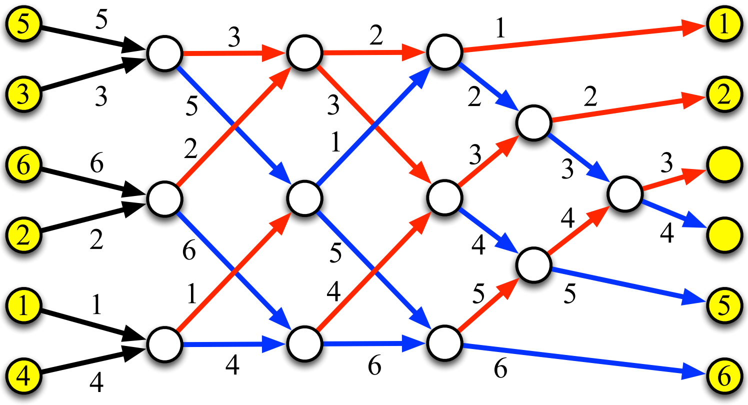
Des comparaisons sont une nouvelle fois effectuées.



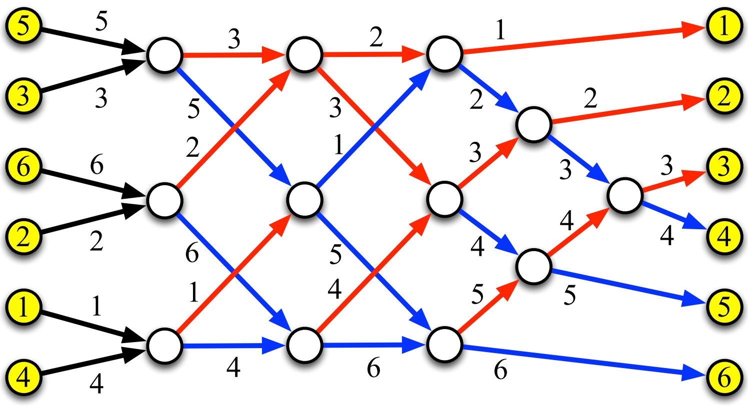
Il y a deux joueurs qui terminent le jeu en atteignant des sommets d'arrivée (sommets jaunes de droite).



Il reste deux joueurs qui n'ont pas terminé le jeu.



Tous les joueurs ont atteint un sommet d'arrivée (sommet jaune de droite) et le jeu est terminé. Les nombres sont triés de manière croissante (lecture de haut en bas dans la figure).



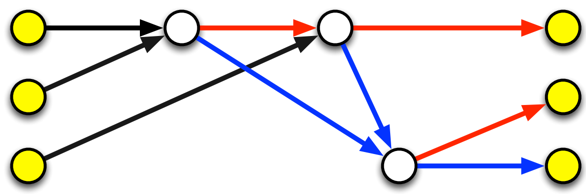
5.1.3 Application des algorithmes de tri

Le problème qui consiste à trier (des nombres, des noms, des prix, des distances...) est très important et les méthodes (algorithmes) pour trier un ensemble d'éléments sont très largement utilisées. Le jeu présenté précédemment permet de comprendre le principe d'un tri effectué par un ordinateur : succession de comparaisons de deux éléments. Les algorithmes utilisés dans les ordinateurs sont plus génériques car ils permettent de s'adapter au nombre d'éléments à trier. Mais le principe est similaire : succession de comparaisons deux à deux. L'avantage de l'ordinateur, par rapport à nous humains, est qu'il peut effectuer un très grand nombre de comparaisons par seconde. Ainsi, il est posible de trier un grand nombre d'éléments en très peu de temps. À titre de comparaison, le jeu décrit précédemment pour trier six éléments peut prendre quelques dizaines de secondes. Un ordinateur (ou un programme informatique) va utiliser ces algorithmes pour trier une colonne de nombres dans un logiciel tableur (de plus petit au plus grand), pour trier des biens à vendre dans un site Web marchand (de moins cher au plus cher), pour trier des mots (selon l'ordre alphabétique)... Vous trouverez plus de détails sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_tri`.

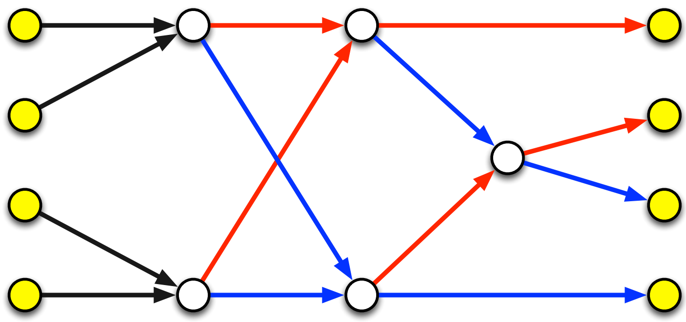
5.1.4 Graphes orientés pour trier

Dans cette section, nous présentons des graphes orientés pour trier des ensembles de nombres de différentes tailles. Ces tailles sont pour la plupart des nombres paires car cela permet à chaque joueur d'effectuer une comparaison lors de la première étape. Mais les réseaux de tri existent évidemment pour trier un ensemble de nombres de taille impaire.

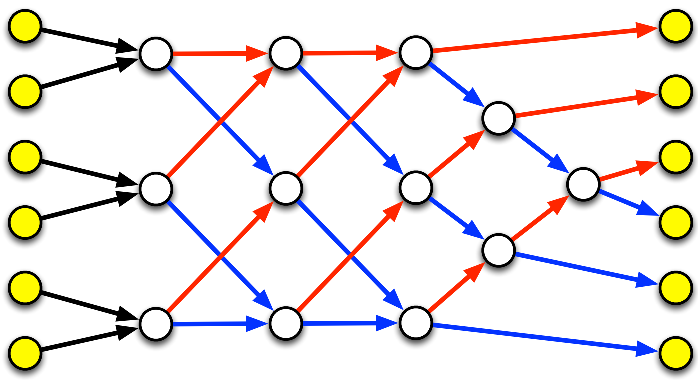
Graphe orienté pour trier trois nombres.



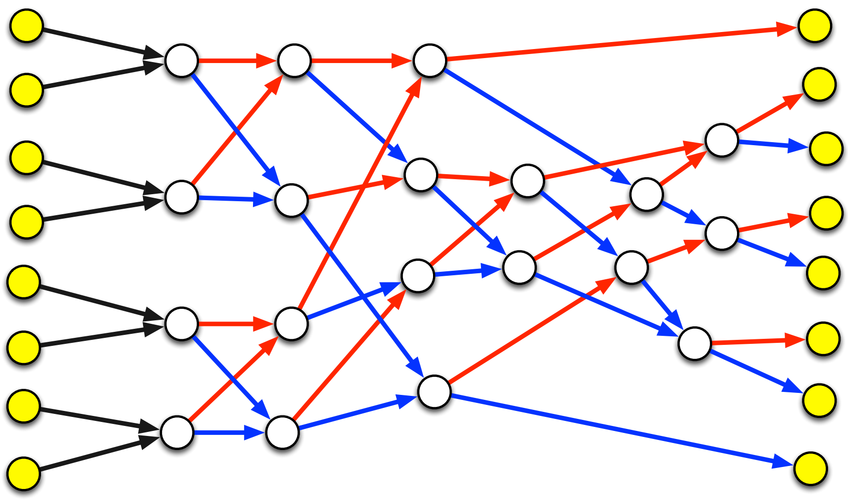
Graphe orienté pour trier quatre nombres.



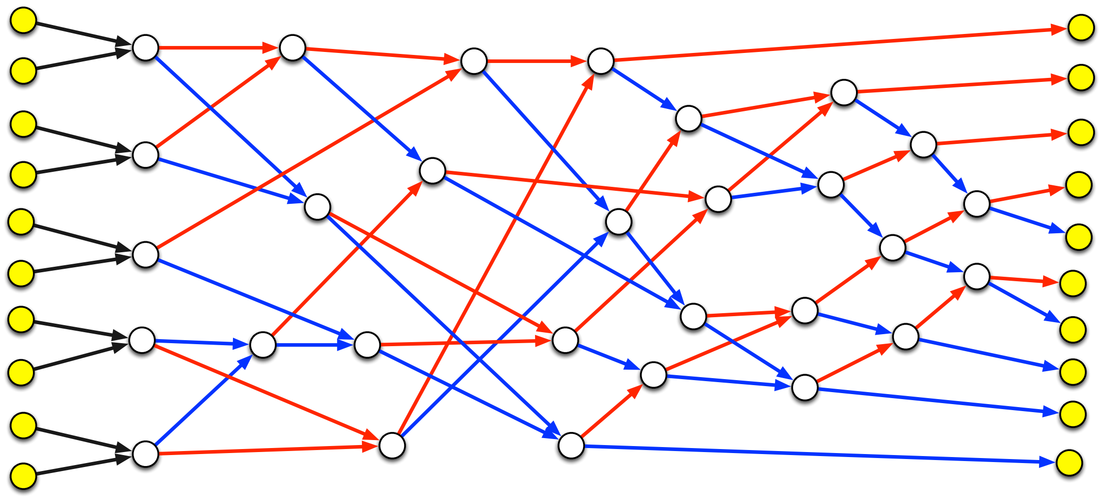
Graphe orienté pour trier six nombres.



Graphe orienté pour trier huit nombres.



Graphe orienté pour trier dix nombres.



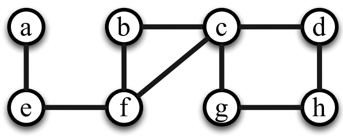
5.2 Arbre couvrant de poids minimum

Dans cette section, nous présentons un algorithme (une méthode) pour calculer un *arbre couvrant de poids minimum.* Étant donné un graphe avec des poids sur les arêtes, nous voulons calculer un ensemble d'arêtes tel que tous les sommets soient reliés entre eux par ces arêtes et tel que le coût (somme des poids des arêtes choisies) soit minimum. Nous présentons tout d'abord les règles du jeu (c'est-à-dire la méthode utilisée pour trouver un arbre couvrant de poids minimum) et décrivons une des applications possibles en lien avec un *problème de construction de réseaux électriques.* Nous présentons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

5.2.1 Règles du jeu et exemple

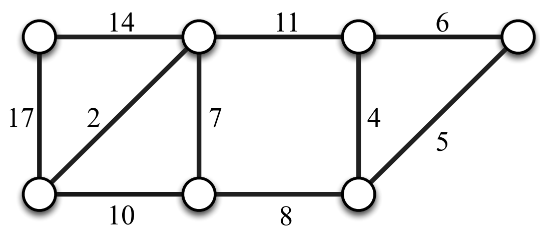
Nous définissons tout d'abord la notion de cycle, qui est centrale pour ce jeu.

Qu'est-ce qu'un cycle ? Un cycle est un chemin tel que le premier sommet et le dernier sommet sont reliés par une arête. Un chemin est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs dans cette liste sont nécessairement reliés par une arête. Par exemple, la suite de sommets b, c, f est un cycle du graphe décrit ci-dessous, car c'est un chemin et le sommet f et le sommet b sont reliés par une arête. Autre exemple, la suite de sommets c, d, h, g forme également un cycle dans le graphe.

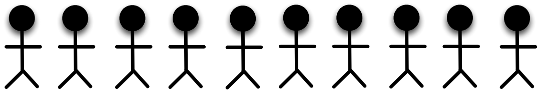


Qu'est-ce qu'un arbre ? Un arbre est un graphe qui ne contient aucun cycle. Entre deux sommets quelconques d'un arbre, il existe un unique chemin.

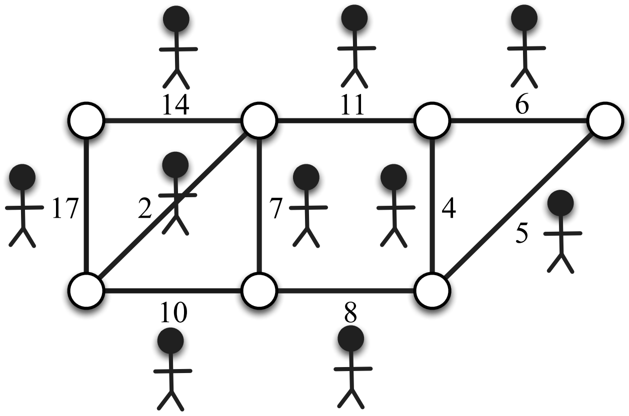
Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque. Chaque arête a une valeur (également appelée poids) qui est un entier positif. Pour faire simple, nous supposons que les arêtes ont toutes des valeurs différentes. Considérons le graphe suivant composé de dix arêtes.



Nombre de joueurs. Il y a autant de joueurs que d'arêtes dans le graphe. Le jeu est collaboratif (il n'y a pas de gagnant ni de perdant). Dans notre exemple, il y a dix arêtes et donc dix joueurs.

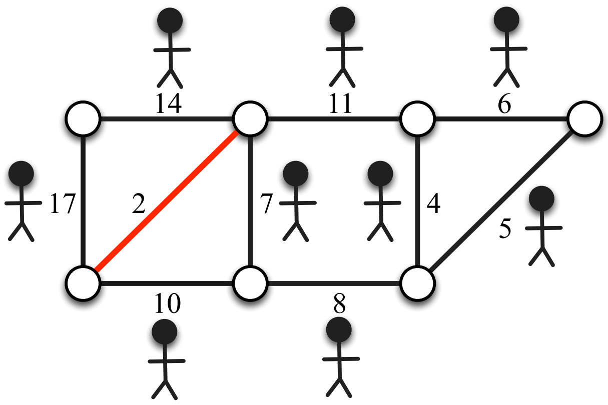


Avant le jeu. Les joueurs se positionnent sur les arêtes du graphe (un joueur par arête).

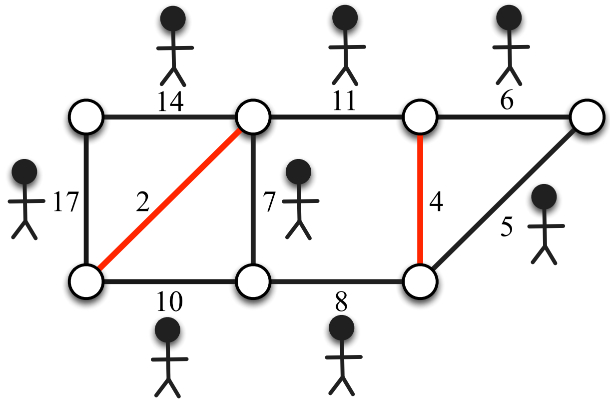


Déroulement du jeu. Le jeu est divisé en étapes. À chaque étape, une arête va être sélectionnée et possiblement ajoutée à la solution (si elle ne crée pas de cycle avec les arêtes de la solution).

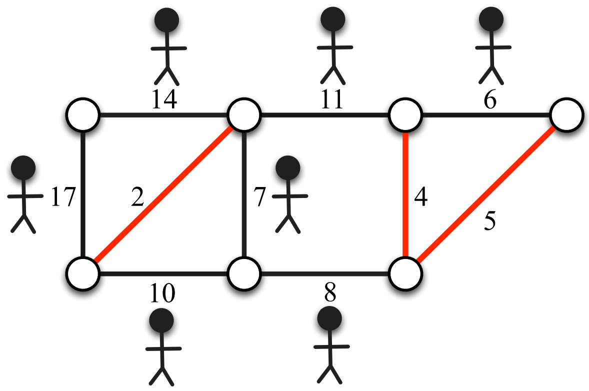
Lors de la première étape, l'arête de plus petite valeur est sélectionnée et ajoutée à la solution. Dans notre exemple, l'arête la plus petite est l'arête de poids 2. Le joueur sur cette arête l'ajoute à la solution (en rouge) et quitte le jeu.



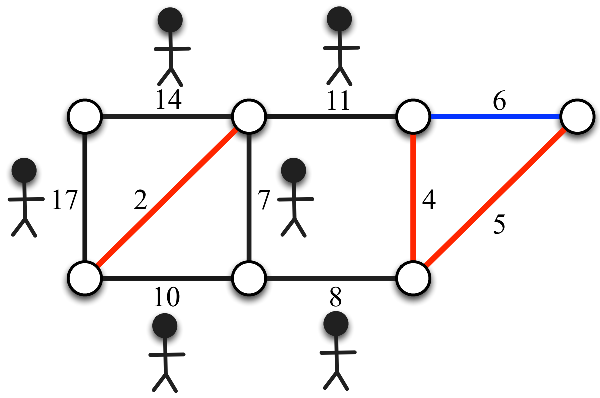
Lors de la deuxième étape, l'arête de plus petite valeur qui n'a pas déjà été choisie est sélectionnée. Elle est ajoutée à la solution si elle ne crée pas de cycle avec les arêtes de la solution (arêtes rouges). Dans notre exemple, c'est l'arête de poids 4 qui est selectionnée. Le joueur sur cette arête l'ajoute à la solution (en rouge) car elle ne crée pas de cycle avec l'arête de la solution (arête rouge). Il quitte ensuite le jeu.



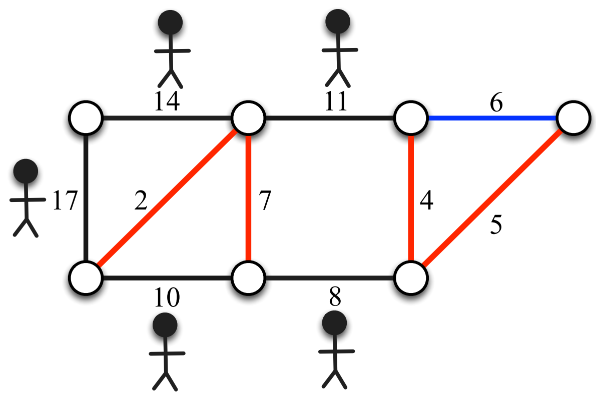
Lors de la troisième étape, l'arête de plus petite valeur qui n'a pas déjà été choisie est sélectionnée. Elle est ajoutée à la solution si elle ne crée pas de cycle avec les arêtes de la solution (arêtes rouges). Dans notre exemple, c'est l'arête de poids 5 qui est selectionnée. Le joueur sur cette arête l'ajoute à la solution (en rouge) car elle ne crée pas de cycle avec les arêtes de la solution (arêtes rouges). Il quitte ensuite le jeu.

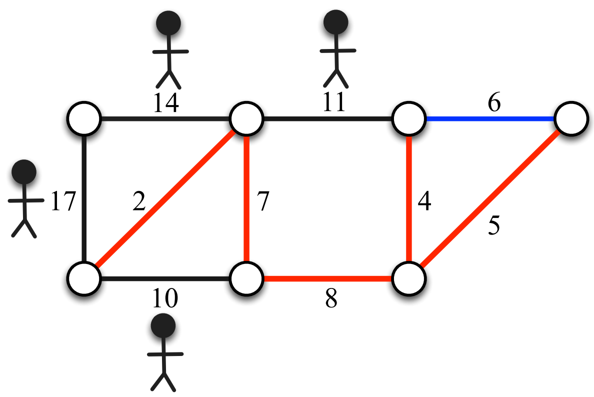


Lors de la quatrième étape, l'arête de plus petite valeur qui n'a pas déjà été choisie est sélectionnée. Elle est ajoutée à la solution si elle ne crée pas de cycle avec les arêtes de la solution (arêtes rouges). Dans notre exemple, c'est l'arête de poids 6 qui est selectionnée. Le joueur sur cette arête ne l'ajoute pas à la solution car elle crée un cycle avec les arêtes rouges (solution). Cette arête est maintenant bleue (déjà sélectionnée mais pas dans la solution). Il quitte ensuite le jeu.

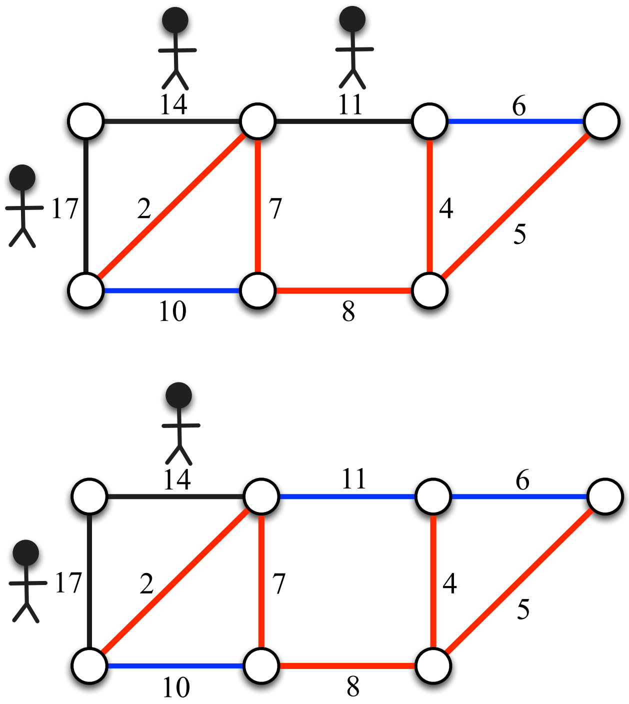


Et ainsi de suite tant que les arêtes n'ont pas toutes été sélectionnées. La figure suivante montre les étapes 5 et 6.

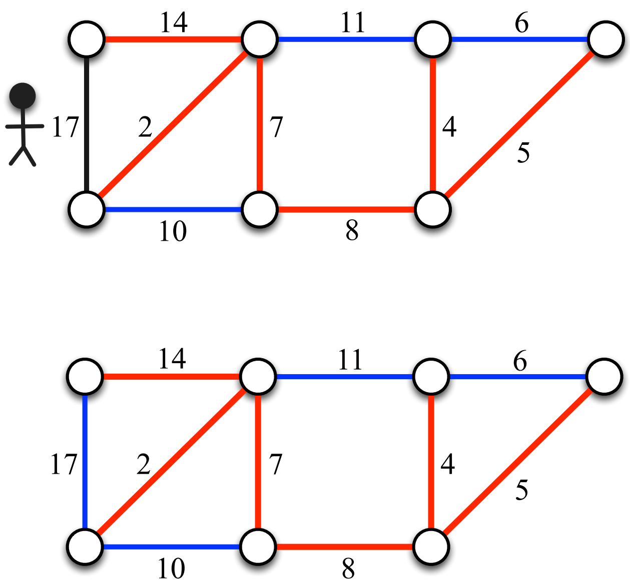




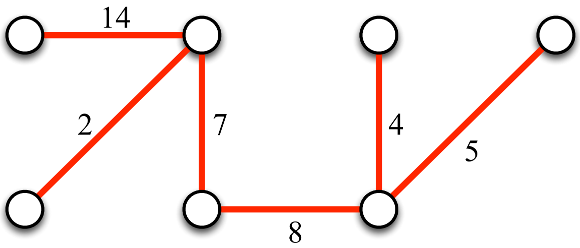
La figure suivante montre les étapes 7 et 8.



La figure suivante montre les étapes 9 et 10.



Après le jeu, les arêtes rouges forment un arbre couvrant de poids minimum. Tous les sommets sont reliés entre eux et la somme des valeurs des arêtes choisies est minimisé. La figure suivante représente un arbre couvrant de poids minimum pour notre exemple.



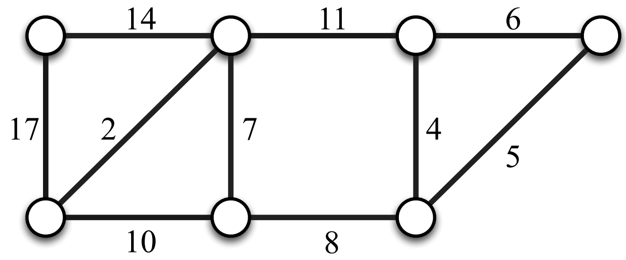
Il est possible de faire ce jeu (et d'appliquer la méthode décrite précédemment) même si certaines arêtes ont des valeurs égales. Dans ce cas, il faut préalablement déterminer un ordre parmi des arêtes de même valeur.

5.2.2 Lien avec la construction de réseaux électriques

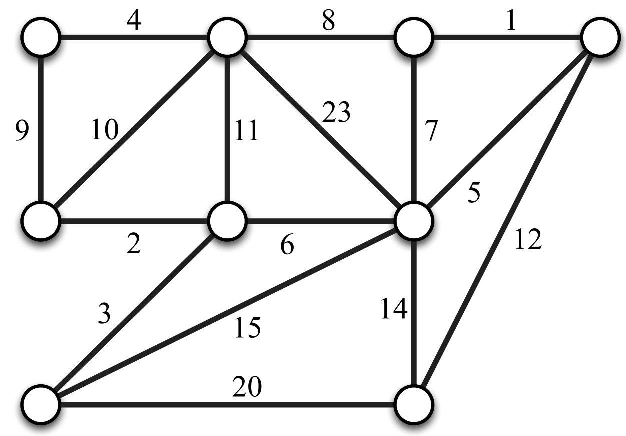
Les arbres couvrants (de poids minimum) sont utilisés pour construire différents types de réseaux. Citons notamment les réseaux téléphoniques et les réseaux électriques. Pour ces derniers, de manière simplifiée, les sommets représentent des villes et les arêtes sont les lignes électriques possiblement constructibles. La valeur sur une arête représente le coût de construction (de la ligne). Le réseau électrique doit être construit de telle sorte que toutes les villes soient connectées entre elles et que le coût total soit minimum. Cela revient à calculer un arbre couvrant de poids minimum dans le graphe mentionné précédemment. En effet, s'il y a un cycle dans une solution, alors il est possible d'enlever une arête, sans déconnecter les villes entre elles, pour diminuer strictement le coût total. Vous trouverez plus de détails sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Kruskal`.

5.2.3 Graphes pour jouer

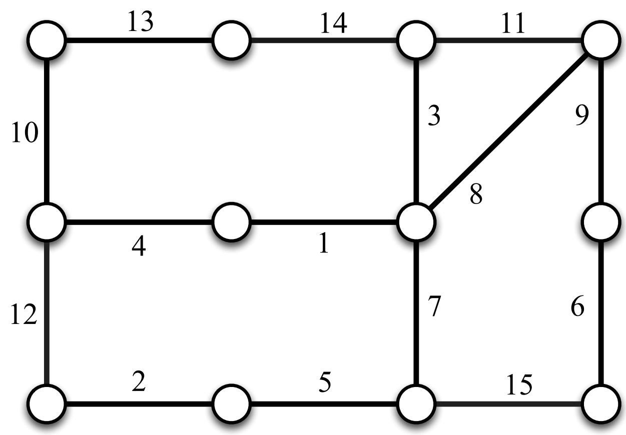
Jeu 1.



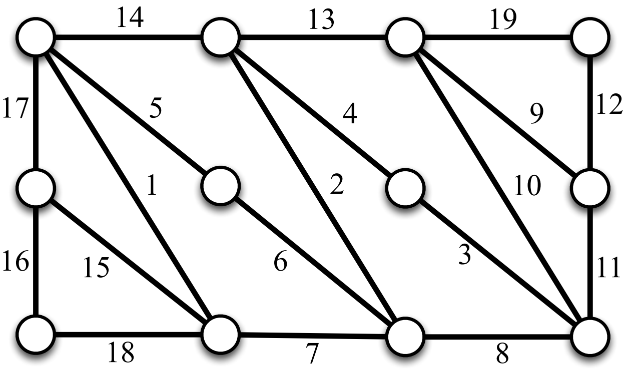
Jeu 2.



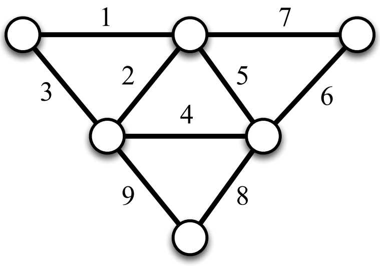
Jeu 3.

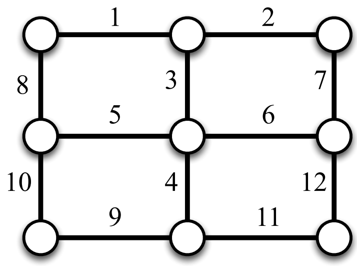


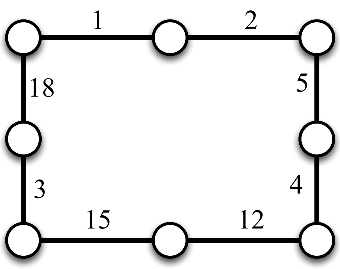
Jeu 4.

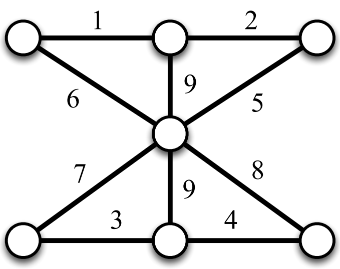


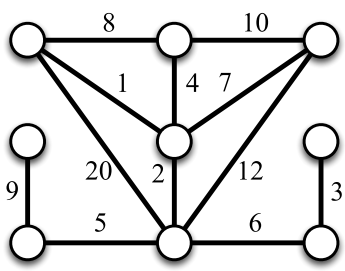
Jeux 5 à 10.

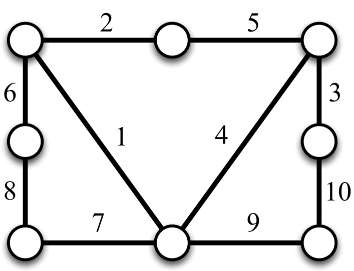








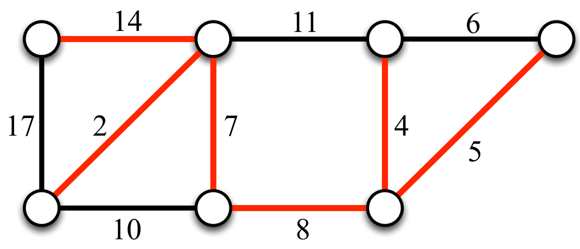




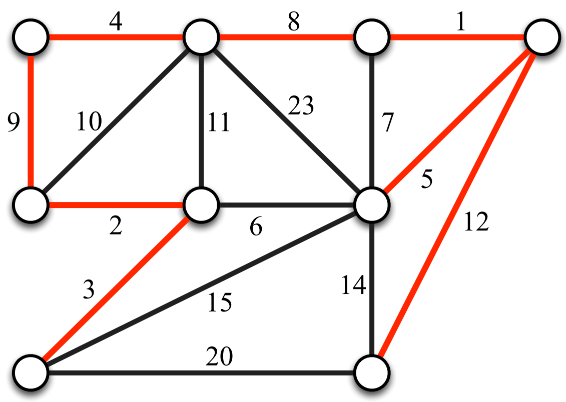
5.2.4 Solutions des jeux

Dans la suite, les arêtes rouges représentent les arêtes de l'arbre couvrant de poids minimum calculé par la méthode (algorithme) présentée précédemment.

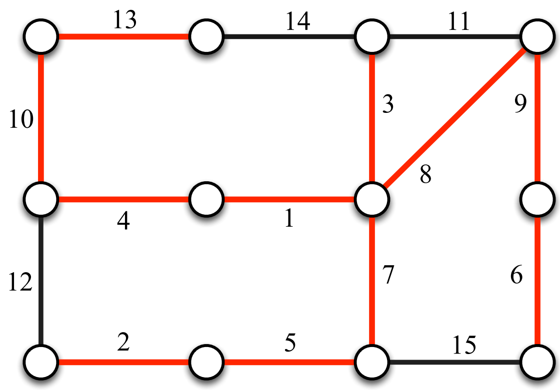
Solution du jeu 1.



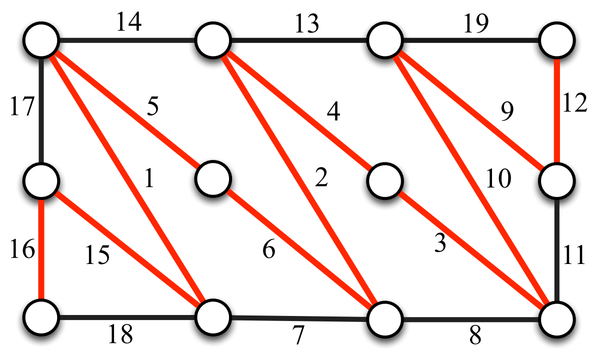
Solution du jeu 2.



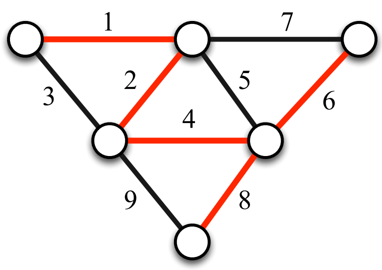
Solution du jeu 3.

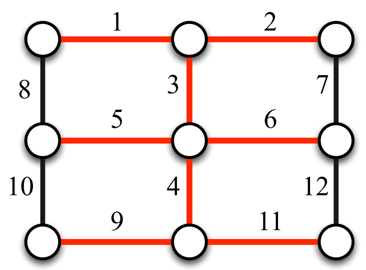


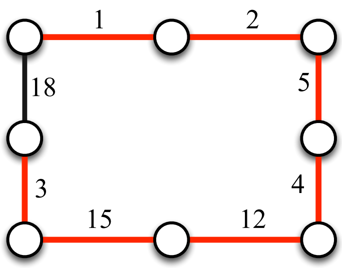
Solution du jeu 4.

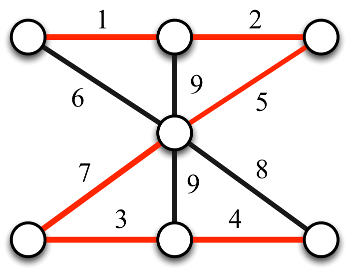


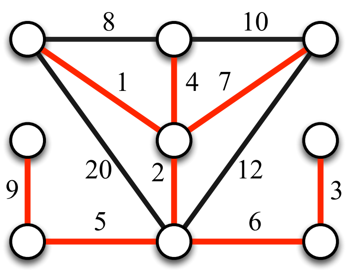
Solutions des jeux 5 à 10.

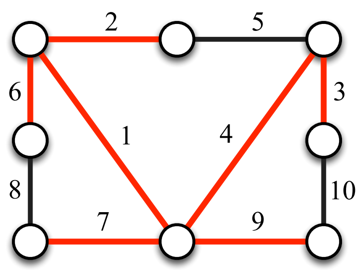










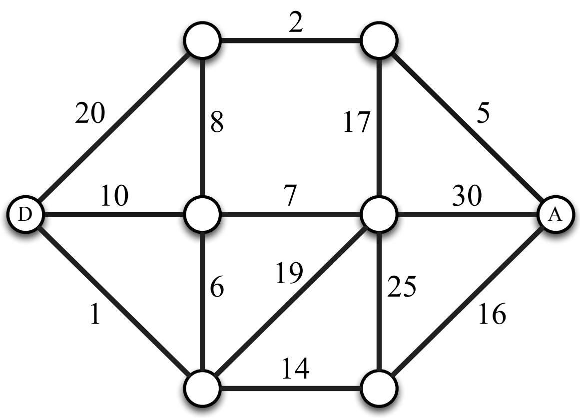


5.3 Plus court chemin entre deux sommets

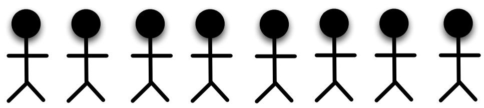
Dans cette section, nous présentons un algorithme (une méthode) pour calculer un *plus court chemin* entre deux sommets d'un graphe. Étant donné un graphe avec des poids sur les arêtes et deux sommets quelconques, nous voulons déterminer un chemin entre ces deux sommets tel que le coût (somme des poids des arêtes du chemin) soit minimum. Nous présentons tout d'abord les règles du jeu (c'est-à-dire la méthode utilisée pour trouver un plus court chemin) et décrivons une des applications possibles en lien avec un *problème d'optimisation de trajets routiers.* Nous présentons ensuite des graphes pour jouer et des solutions.

5.3.1 Règles du jeu et exemple

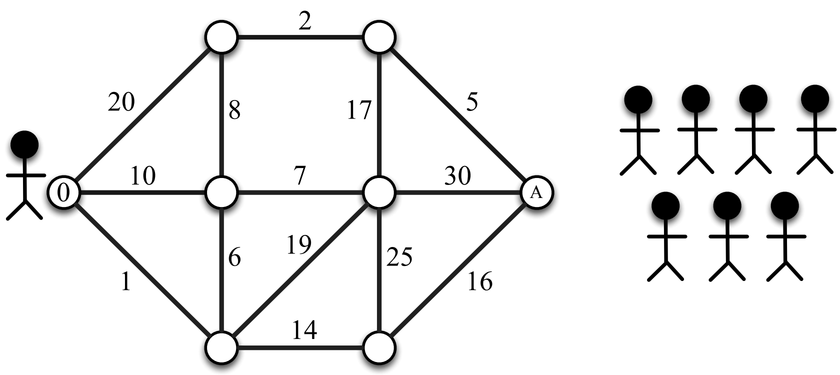
Graphe. Le jeu se déroule avec un graphe quelconque. Il y a un sommet de départ, appelé sommet D, et un sommet d'arrivée, appelé sommet A. Chaque arête a une valeur (également appelée poids) qui est un entier positif. Considérons le graphe suivant composé de huit sommets.



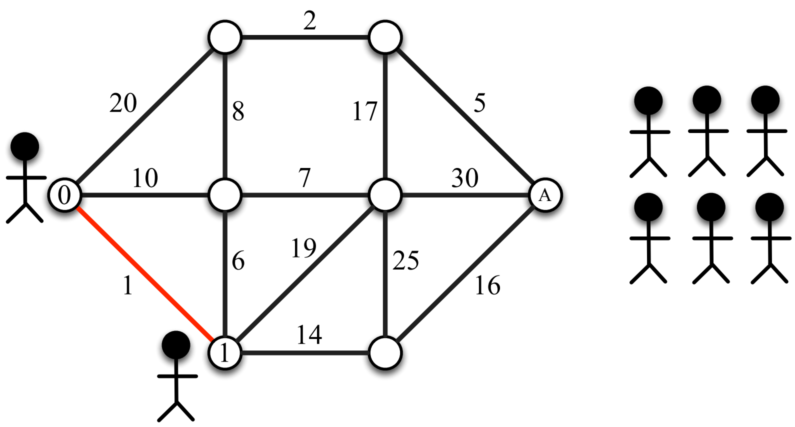
Nombre de joueurs. Il y a autant de joueurs que de sommets dans le graphe (même s'il est possible que certains joueurs ne fassent rien pendant le jeu). Le jeu est collaboratif (il n'y a pas de gagnant ni de perdant). Dans notre exemple, il y a huit sommets et donc huit joueurs.



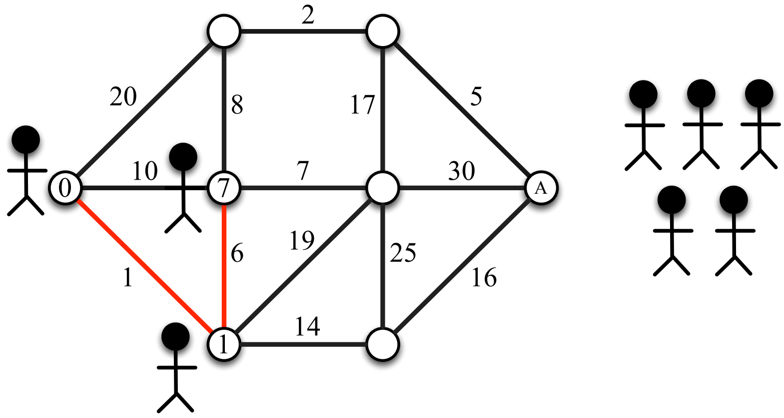
Avant le jeu. Un joueur se positionne sur le sommet D et inscrit sur celui-ci le nombre 0. Les autres joueurs restent en dehors du graphe pour le moment.



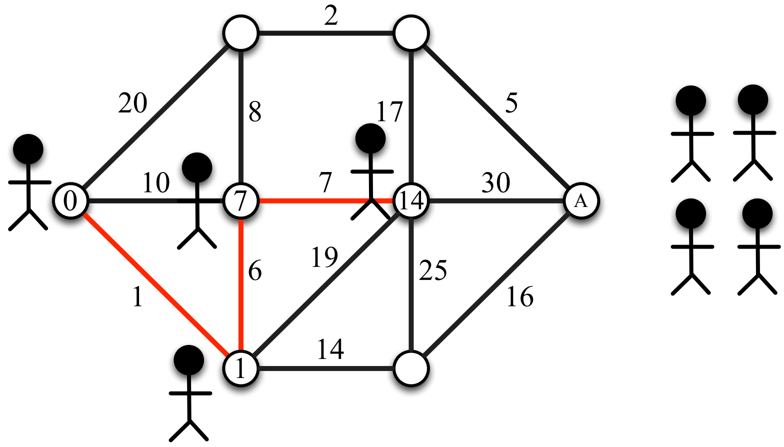
Déroulement du jeu. Le jeu est divisé en étapes. À chaque étape, un sommet va être sélectionné. Lors de la première étape, le sommet le plus proche du sommet D est sélectionné, c'est-à-dire le sommet qui partage une arête avec D et dont le poids est minimal. Une arête est partagée entre deux sommets si ces deux derniers sont les deux extrémités de cette arête. En cas d'égalité, un des sommets à égalité est choisi arbitrairement (au hasard). Un joueur qui est actuellement en dehors du graphe vient se positionner sur ce sommet, inscrit sur celui-ci le poids de l'arête et cette dernière est maintenant rouge. La figure suivante décrit cette étape pour notre exemple : un joueur se positionne sur le sommet sélectionné, inscrit 1 et l'arête de poids 1 est rouge.



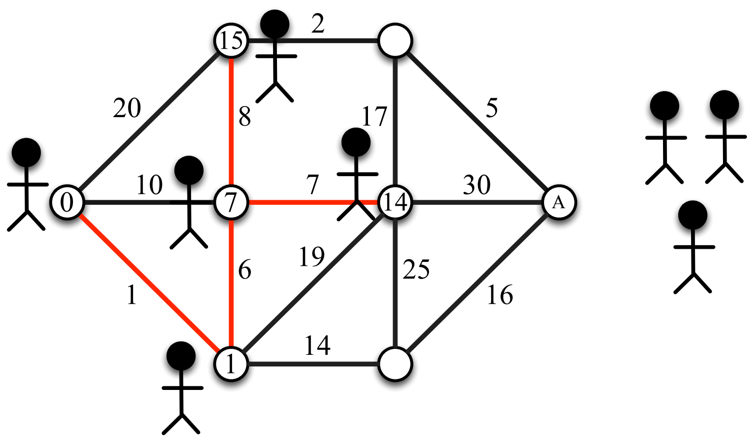
Lors de la deuxième étape, considérons toutes les arêtes entre un sommet avec un joueur positionné dessus et un sommet sans joueur positionné dessus. Parmi ces arêtes, choisissons celle dont la somme de son poids et de la valeur inscrite sur le sommet avec un joueur positionné qui est à une de ses extrémités, est minimale. Autrement dit, le sommet le plus proche du sommet D qui n'a pas encore été sélectionné (sans joueur positionné dessus) est sélectionné. Le sommet sélectionné est donc celui qui partage une arête avec un des sommets avec un joueur positionné dessus et tel que le poids de cette arête plus la valeur inscrite sur le sommet avec un joueur positioné dessus, est minimal. Un joueur qui est actuellement en dehors du graphe vient se positionner sur ce sommet, inscrit sur celui-ci la somme précédente et l'arête concernée est rouge. La figure suivante décrit cette étape pour notre exemple : un joueur se positionne sur le sommet sélectionné, inscrit $1 + 6 = 7$ et l'arête de poids 6 est rouge.



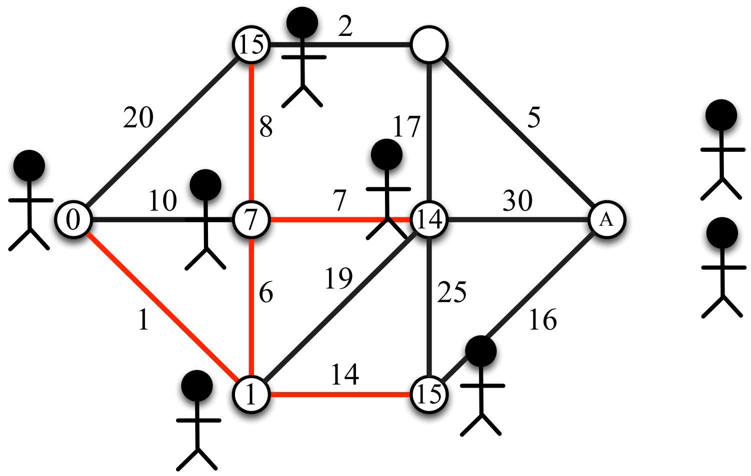
Troisième étape.



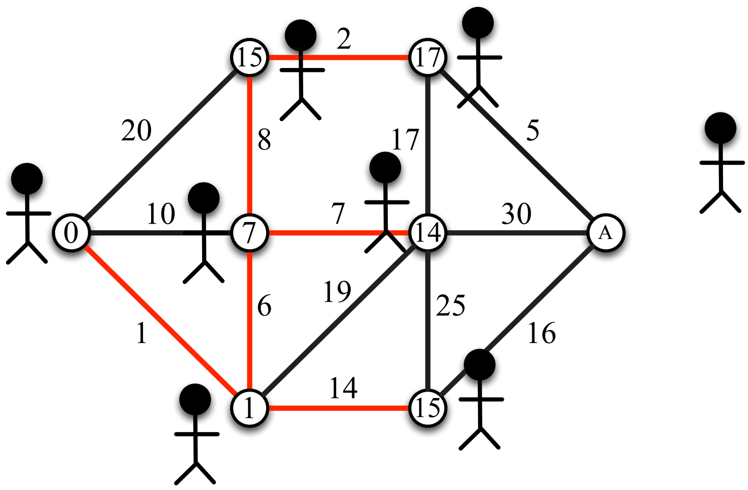
Quatrième étape.



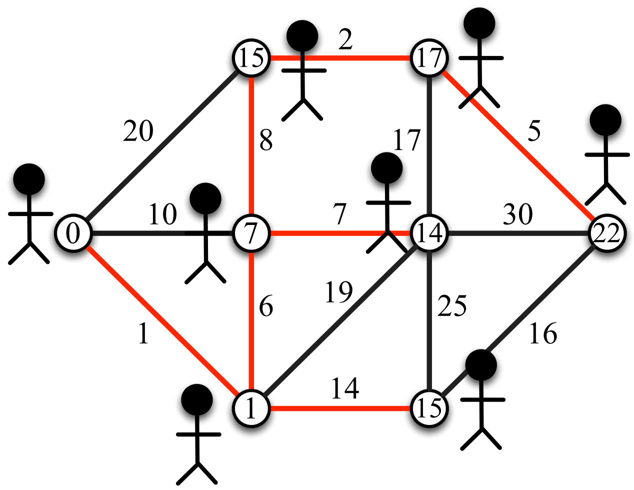
Cinquième étape.



Sixième étape.

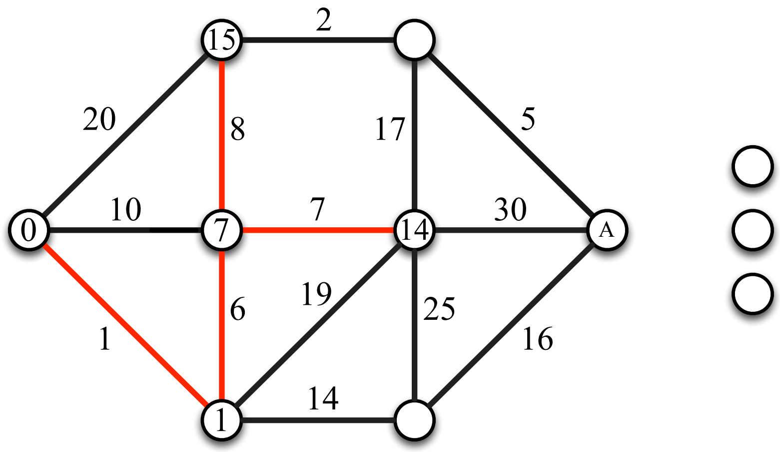


Septième étape.



Lorsqu'un joueur est possitionné sur le sommet A, alors le jeu est terminé. Le chemin rouge entre le sommet D et le sommet A est alors le plus court chemin entre ces deux sommets. En effet la sommes des poids des arêtes de ce chemin est mininmale. Dans notre exemple, la somme des arêtes du chemin rouge entre le sommet D et le sommet A est $1 + 6 + 8 + 2 + 5 = 22$.
Il est possible de faire ce jeu (et d'appliquer la méthode décrite précédemment) même si, pour certaines étapes, il y a des égalités. Dans ce cas, un choix se fera arbitrairement (au hasard).

Comment lire les figures qui vont suivre ? Dans la suite, les sommets avec un joueur positionné dessus seront ceux avec un nombre et les sommets situés à côté du graphe représenteront les joueurs qui sont acutellement en dehors du graphe. Dans notre exemple, la figure suivante décrit la quatrième étape.

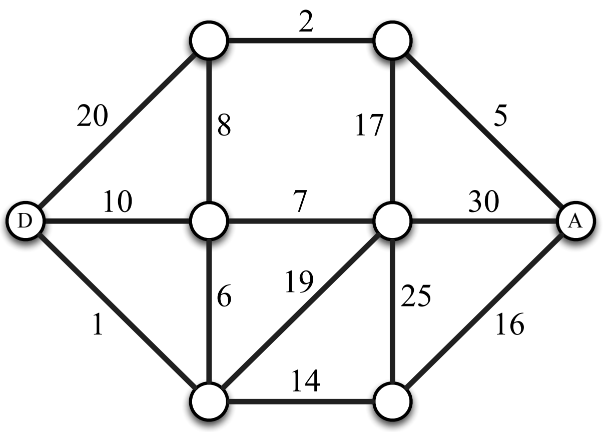


5.3.2 Lien avec l'optimisation de trajets routiers

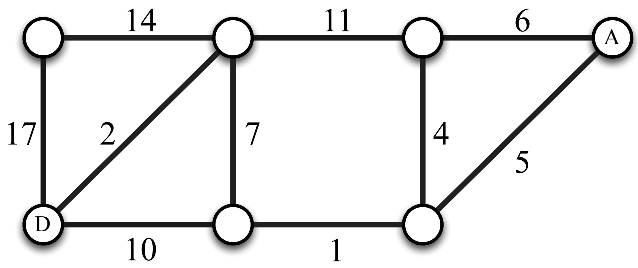
Le problème de plus court chemin est très important, par exemple pour le calcul du trajet automobile le plus court (en termes de temps ou en termes de distance). La méthode (algorithme) décrite précédemment est celle utilisée dans les GPS qui permet aux automobilistes d'aller d'un endroit à un autre en un minimum de temps. En effet, un ordinateur (un GPS) peut effectuer cette méthode (exécuter cet algorithme) de manière très efficace, c'est-à-dire en très peu de temps. En termes de graphe, les sommets représentent les villes et les arêtes sont les routes reliant les villes. Le poids (valeur) sur une arête représente la distance ou la durée nécessaire à relier les deux villes correspondantes aux deux extrémités de cette arête. Le jeu permet donc d'effectuer le calcul d'un GPS lorsqu'un automobiliste souhaite trouver le plus court chemin entre deux villes. Vous trouverez plus de détails sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Dijkstra`.

5.3.3 Graphes pour jouer

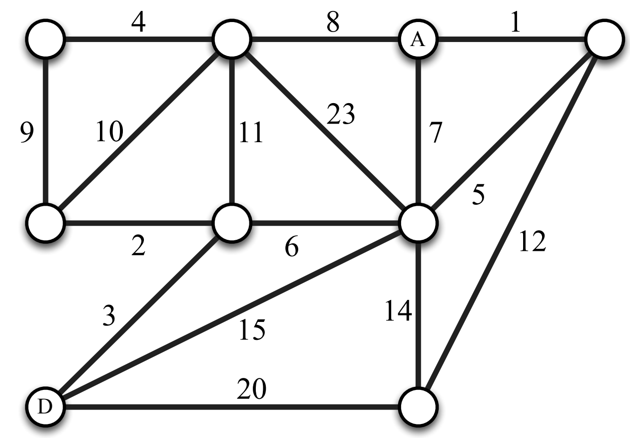
Jeu 1.



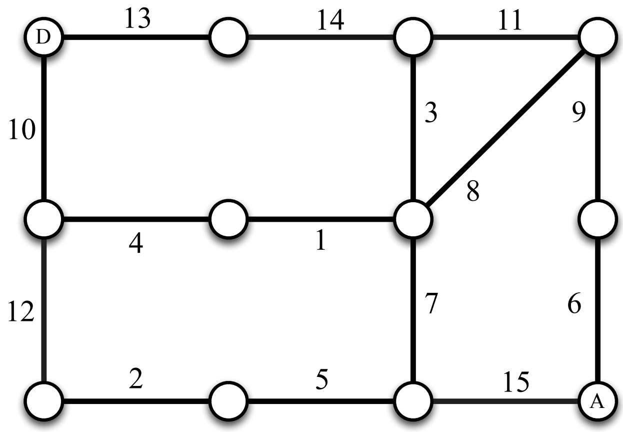
Jeu 2.



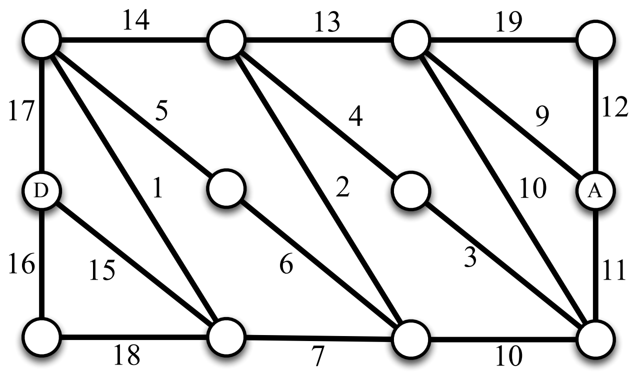
Jeu 3.



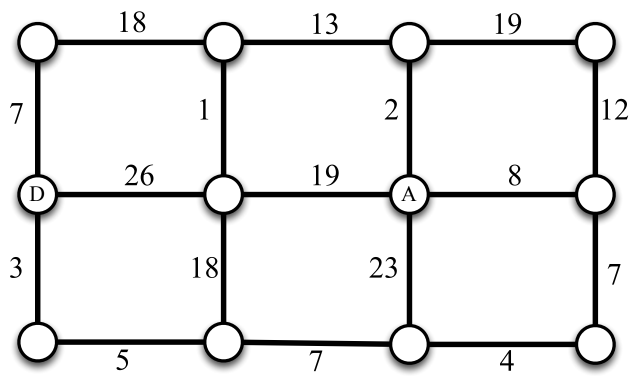
Jeu 4.



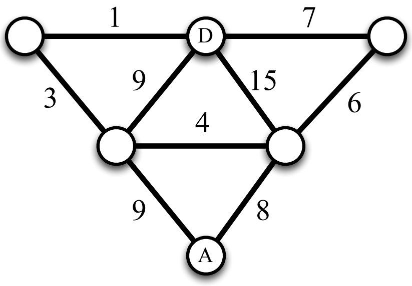
Jeu 5.

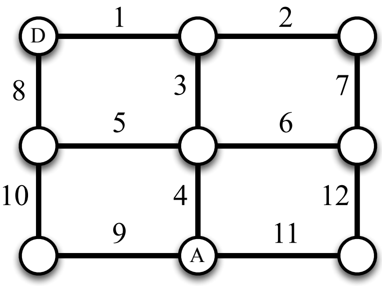


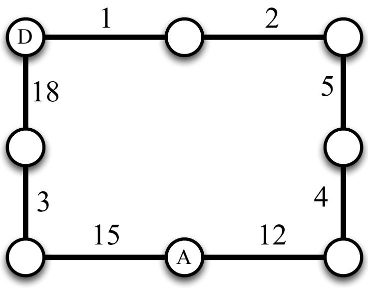
Jeu 6.

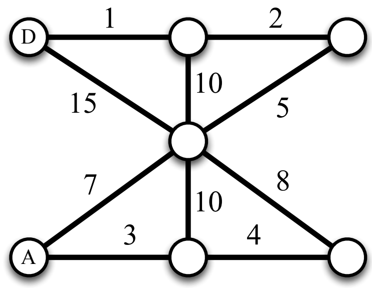


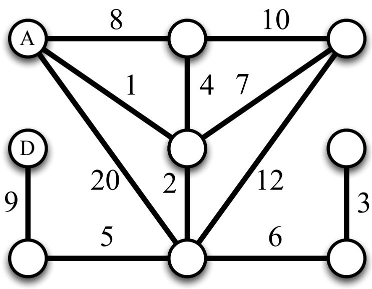
Jeux 7 à 13.

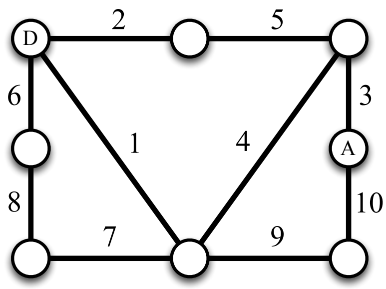

1
D
7
3
9
15
6
4
9
8
A

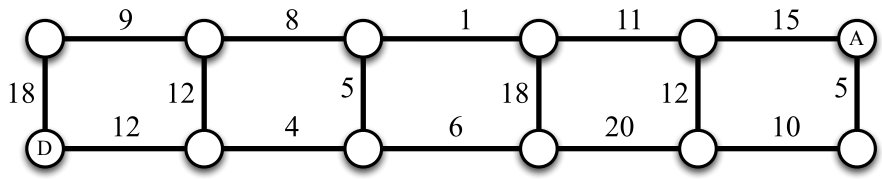

D
1
2
8
3
7
5
6
10
4
12
9
A
11


D
1
2
18
5
3
4
15
A
12


D
1
2
10
15
5
7
8
10
A
3
4

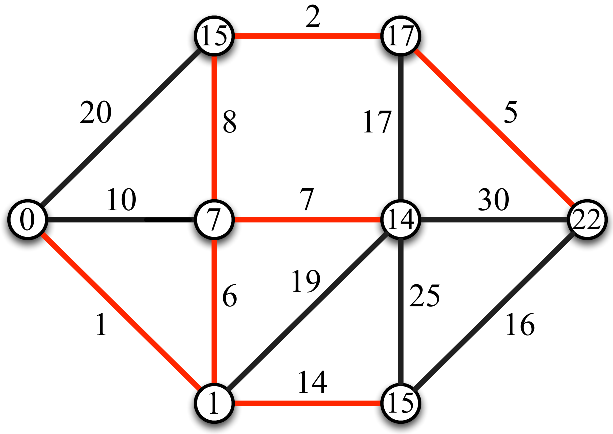

A
8
10
1
4
7
D
20
2
12
9
3
5
6


D
2
5
6
3
1
4
A
8
10
7
9

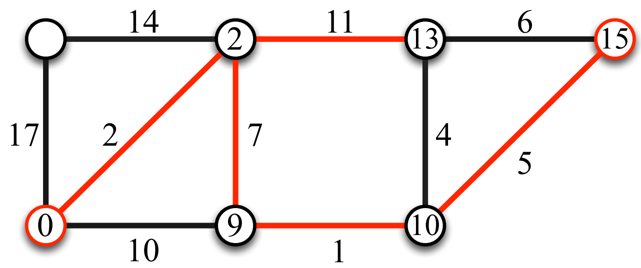

9
8
1
11
15
A
18
12
5
18
12
5
D
12
4
6
20
10

5.3.4 Solutions des jeux

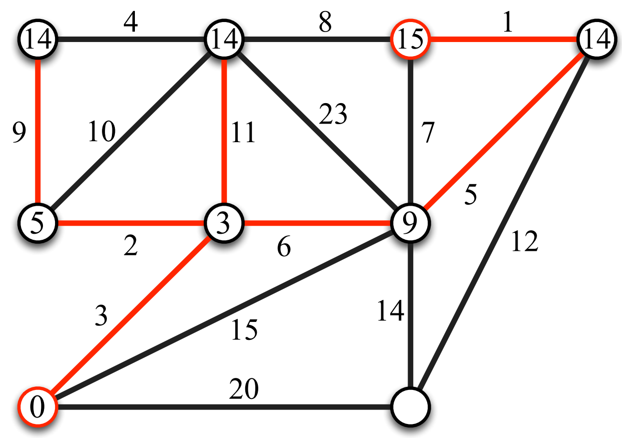
Solution du jeu 1.



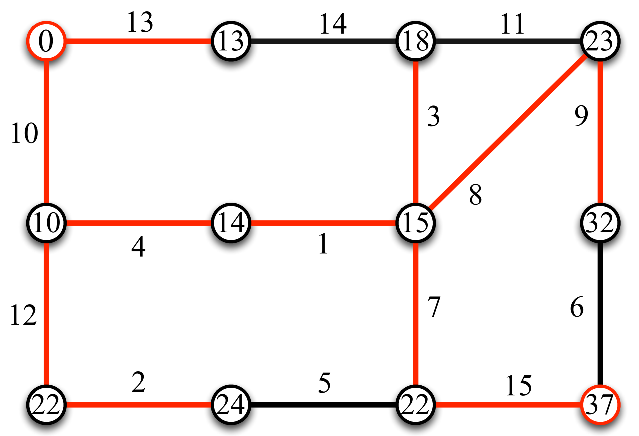
Solution du jeu 2.



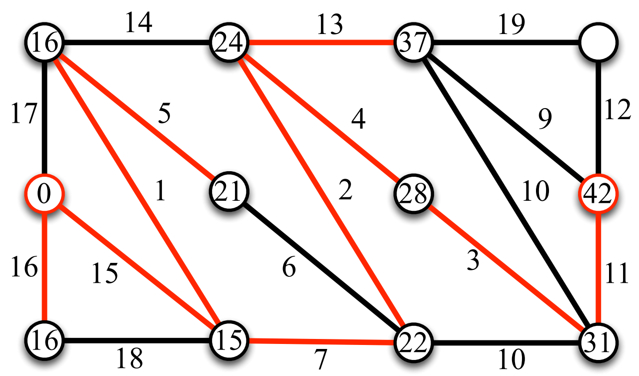
Solution du jeu 3.



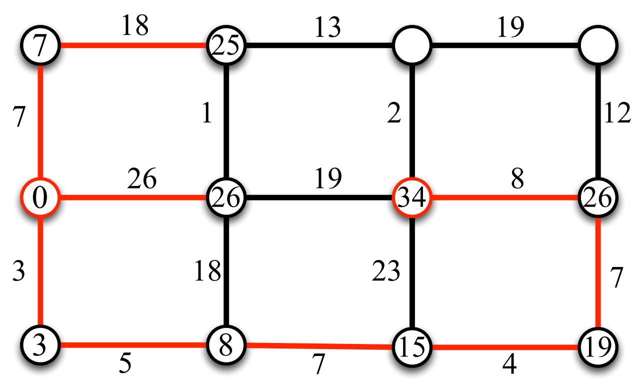
Solution du jeu 4.



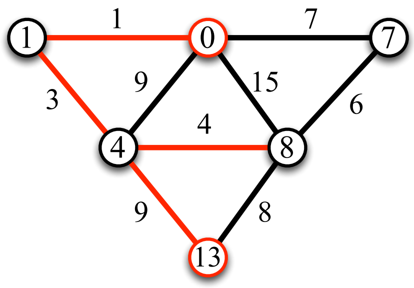
Solution du jeu 5.

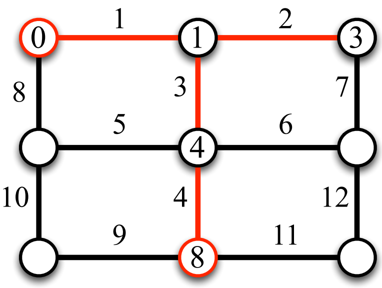


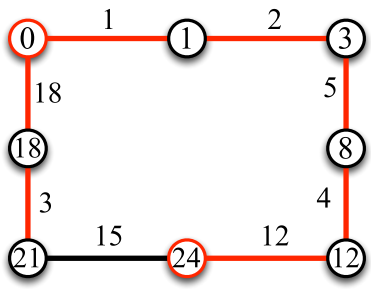
Solution du jeu 6.

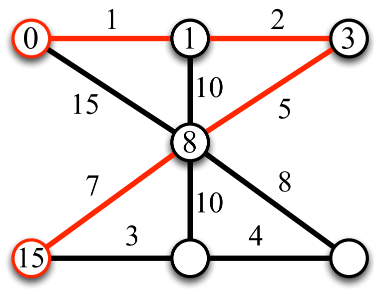


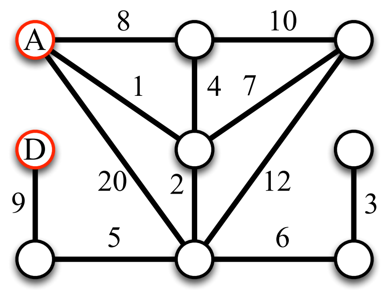
Solutions des jeux 7 à 13.

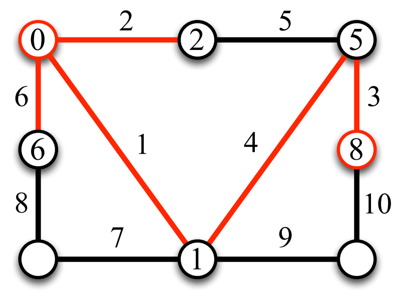


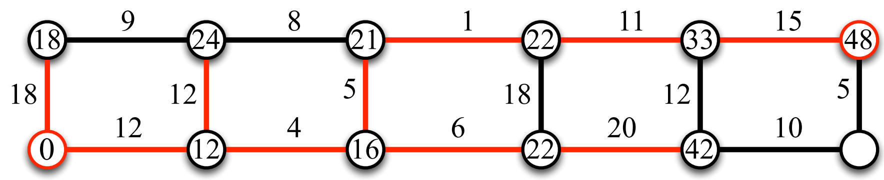










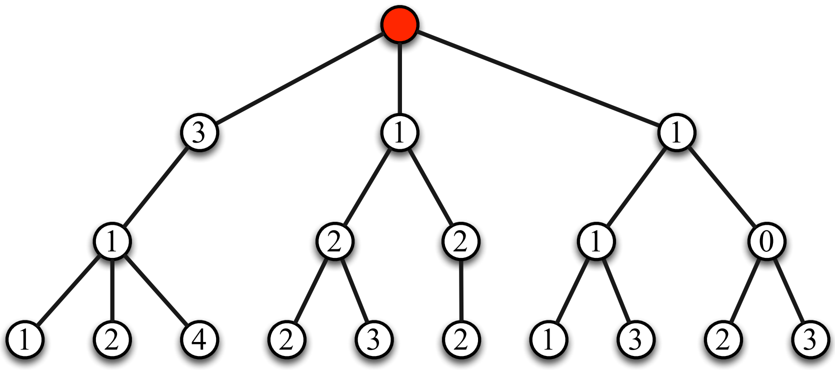


5.4 Mon premier algorithme de programmation dynamique

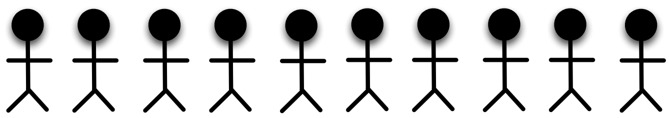
Afin de donner l'intuition de ce qu'est la programmation dynamique, nous nous intéressons dans cette partie au problème de trouver le chemin de plus grande valeur dans un arbre enraciné. Nous présentons tout d'abord les règles du jeu en les illustrant avec un exemple. Nous décrivons ensuite des instances pour jouer.

5.4.1 Règles du jeu et exemple

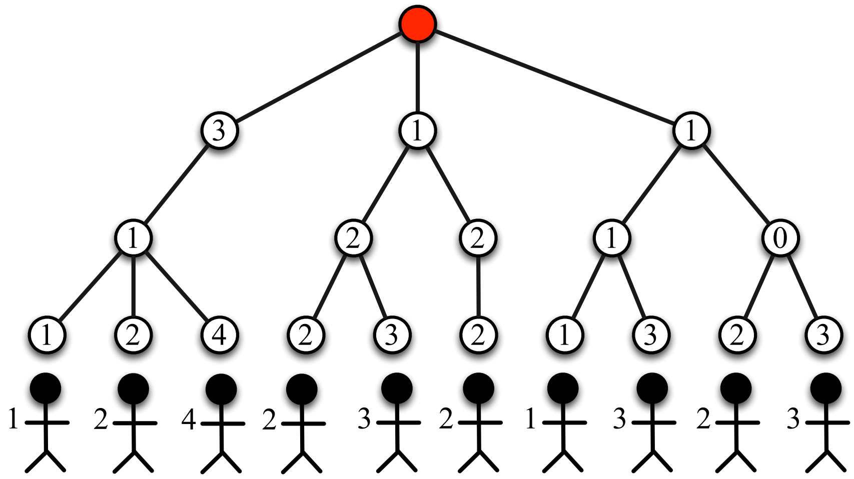
Arbre. Le jeu se déroule avec un arbre enraciné quelconque. Un arbre est un graphe qui ne contient aucun cycle. Autrement dit, pour deux sommets quelconques d'un arbre, il existe un unique chemin entre ces derniers. La racine d'un arbre est un sommet (en rouge dans l'exemple ci-dessous). Il y a une valeur (également appelée poids) par sommet qui est un entier positif ou nul sauf sur la racine de l'arbre. Considérons par exemple l'arbre enraciné en le sommet rouge suivant.



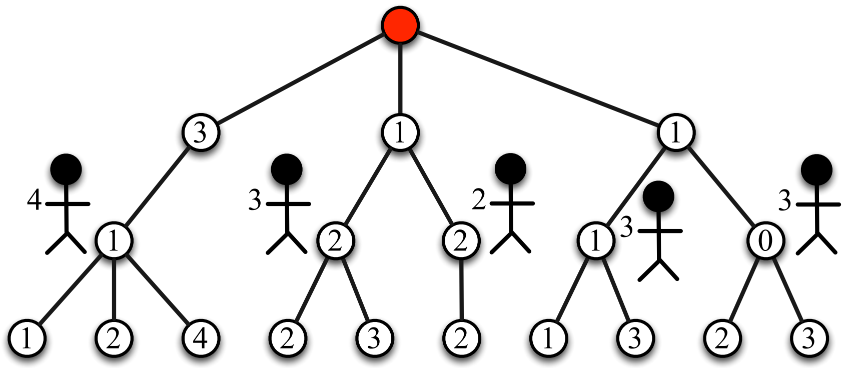
Nombre de joueurs. Il y a autant de joueurs que de feuilles dans l'arbre. Le jeu est collaboratif (il n'y a pas de gagnant ni de perdant). Dans notre exemple il y a dix feuilles et donc dix joueurs.



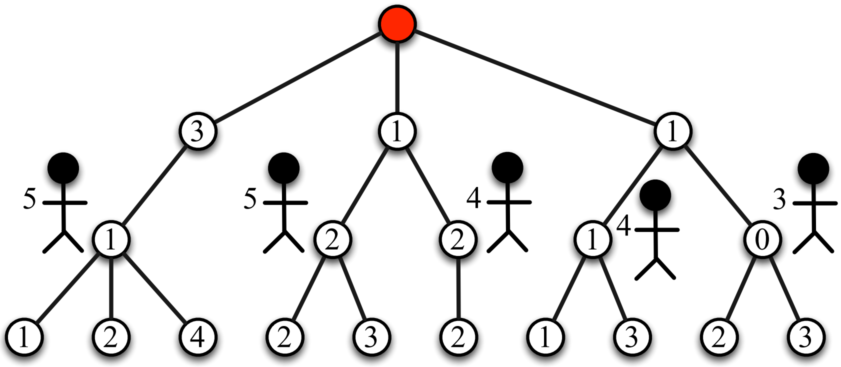
Déroulement du jeu. Tout d'abord, les joueurs se positionnent sur les feuilles de l'arbre (un joueur par feuille). Lors de la première étape, les joueurs mémorisent la valeur de leur feuille (le nombre sur la feuille).



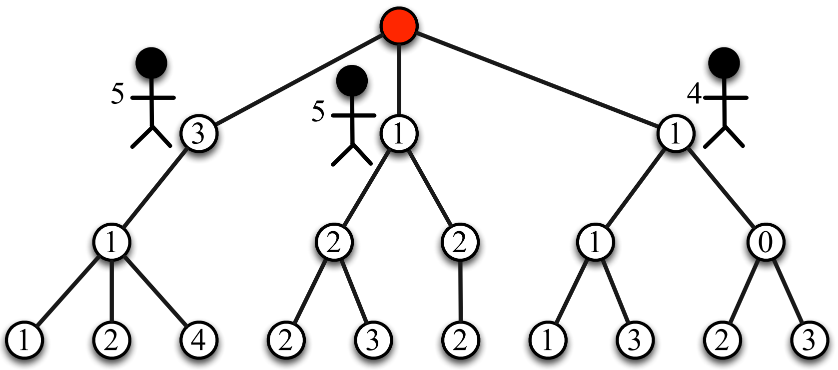
Les joueurs se déplacent ensuite sur le sommet du dessus (le sommet voisin qui est plus proche de la racine que le sommet actuel). Pour chaque sommet qui contient au moins deux joueurs, le joueur qui a mémorisé la plus grande valeur reste, les autres joueurs quittent la partie.



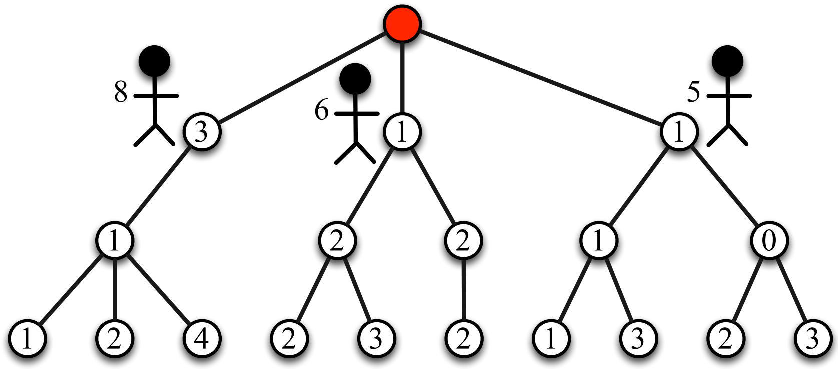
Chaque joueur restant mémorise une nouvelle valeur : la somme de la valeur mémorisée précédemment et de la valeur du sommet où il est actuellement. Par exemple, la valeur mémorisée par le joueur le plus à gauche est maintenant $4 + 1 = 5$.



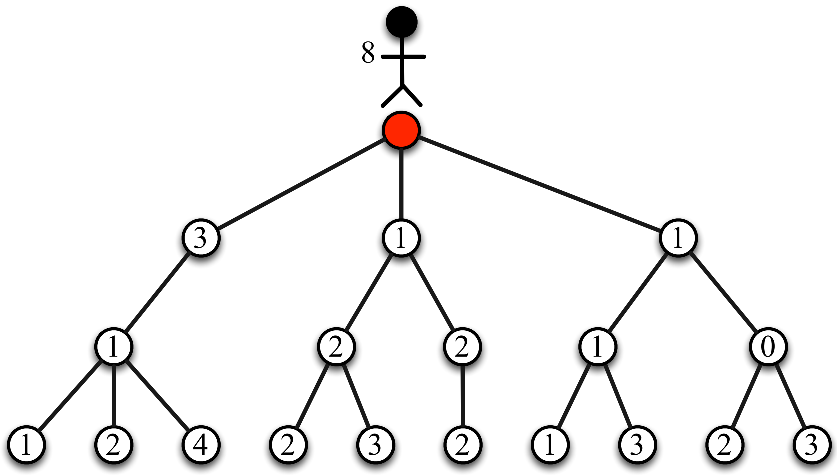
Les joueurs se déplacent ensuite sur le sommet du dessus (le sommet voisin qui est plus proche de la racine que le sommet actuel). Pour chaque sommet qui contient au moins deux joueurs, le joueur qui a mémorisé la plus grande valeur reste, les autres joueurs quittent la partie.



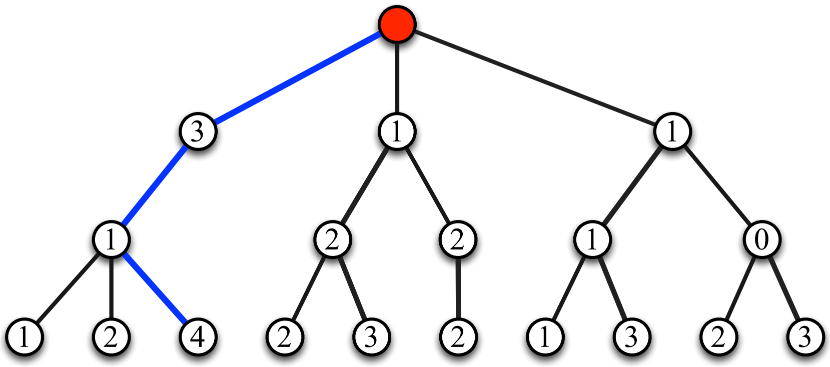
Chaque joueur restant mémorise une nouvelle valeur : la somme de la valeur mémorisée précédemment et de la valeur du sommet où il est actuellement. Par exemple, la valeur mémorisée par le joueur le plus à gauche est maintenant $5 + 3 = 8$.



Et ainsi de suite jusqu'au moment où tous les joueurs se retrouvent sur la racine de l'arbre (sommet rouge). Le joueur avec la plus grande valeur mémorisée reste, les autres quittent la partie. Dans notre exemple, le joueur avec la valeur 8 est le seul qui n'a pas quitté la partie.



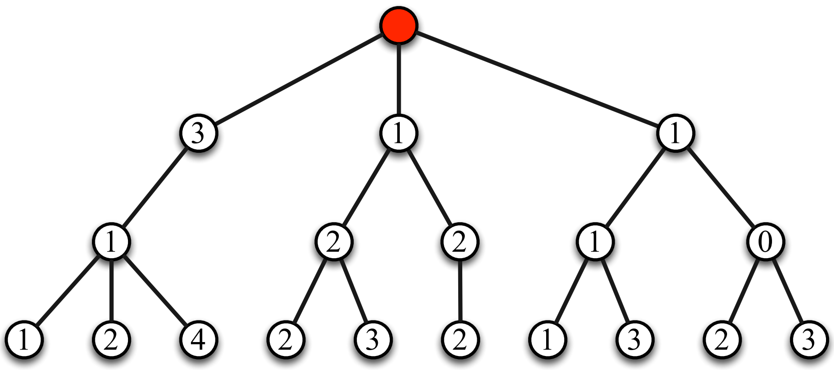
Le chemin (bleu) parcouru par le joueur qui reste seul sur la racine, est le chemin de plus grande valeur.



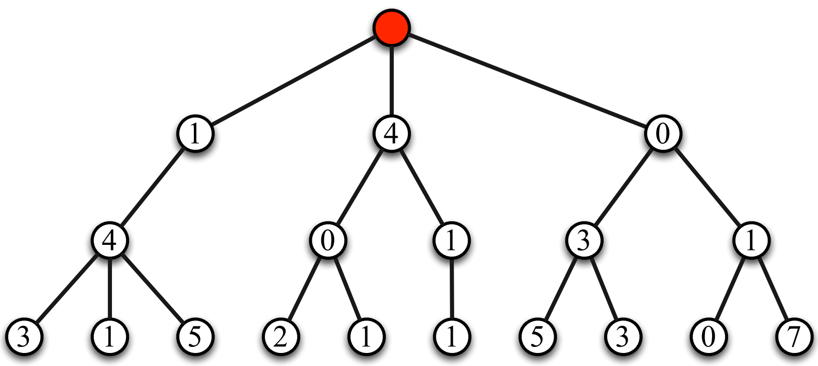
But du jeu. L'objectif du jeu est de calculer le chemin entre une feuille et la racine qui a la plus grande valeur. Ce chemin est le chemin parcouru par le joueur restant sur la racine à la fin de la partie. Il est possible que plusieurs joueurs restent sur la racine (en cas d'égalité). Dans ce cas, plusieurs chemins sont des chemins de plus grande valeur et il suffit d'en choisir un arbitrairement. Également, ces égalités peuvent survenir dans les autres sommets de l'arbre. Dans ce cas, un joueur est choisi arbitrairement pour continuer le jeu et les autres joueurs quittent la partie.

5.4.2 Arbres pour jouer

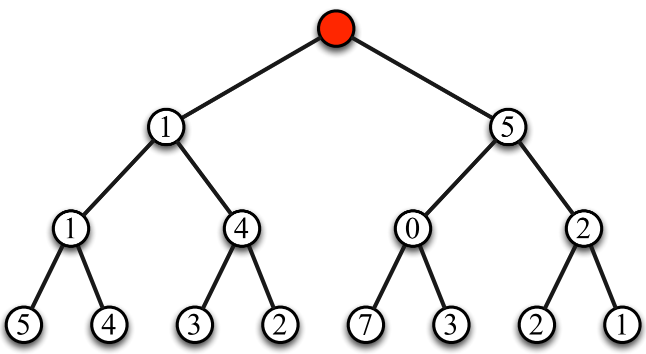
Jeu 1.



Jeu 2.



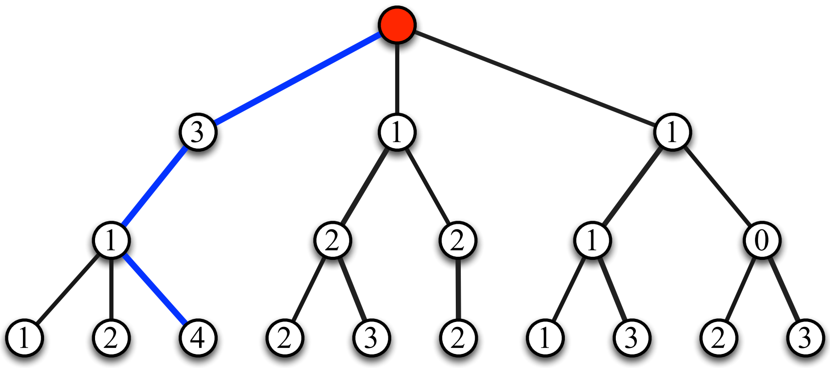
Jeu 3.



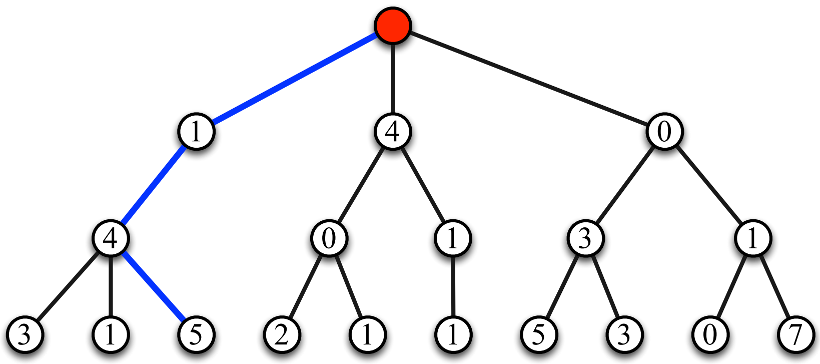
5.4.3 Solutions des jeux

Dans la suite, un chemin bleu entre la racine de l'arbre (sommet rouge) et une feuille représente le meilleur chemin (de plus grande valeur).

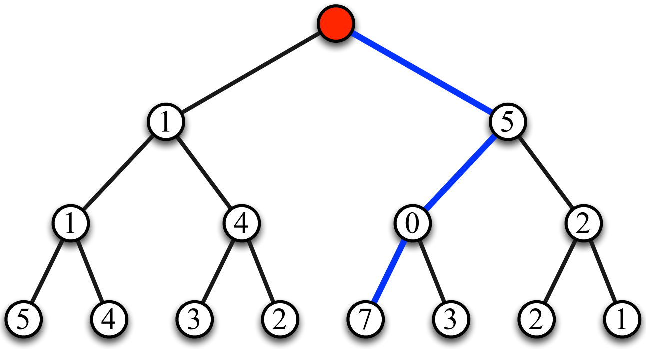
Solution du jeu 1. La figure suivante représente le meilleur chemin entre une feuille et la racine avec une valeur de $4 + 1 + 3 = 8$.



Solution du jeu 2. La figure suivante représente le meilleur chemin entre une feuille et la racine avec une valeur de $5 + 4 + 1 = 10$.



Solution du jeu 3. La figure suivante représente le meilleur chemin entre une feuille et la racine avec une valeur de $7 + 0 + 5 = 12$.

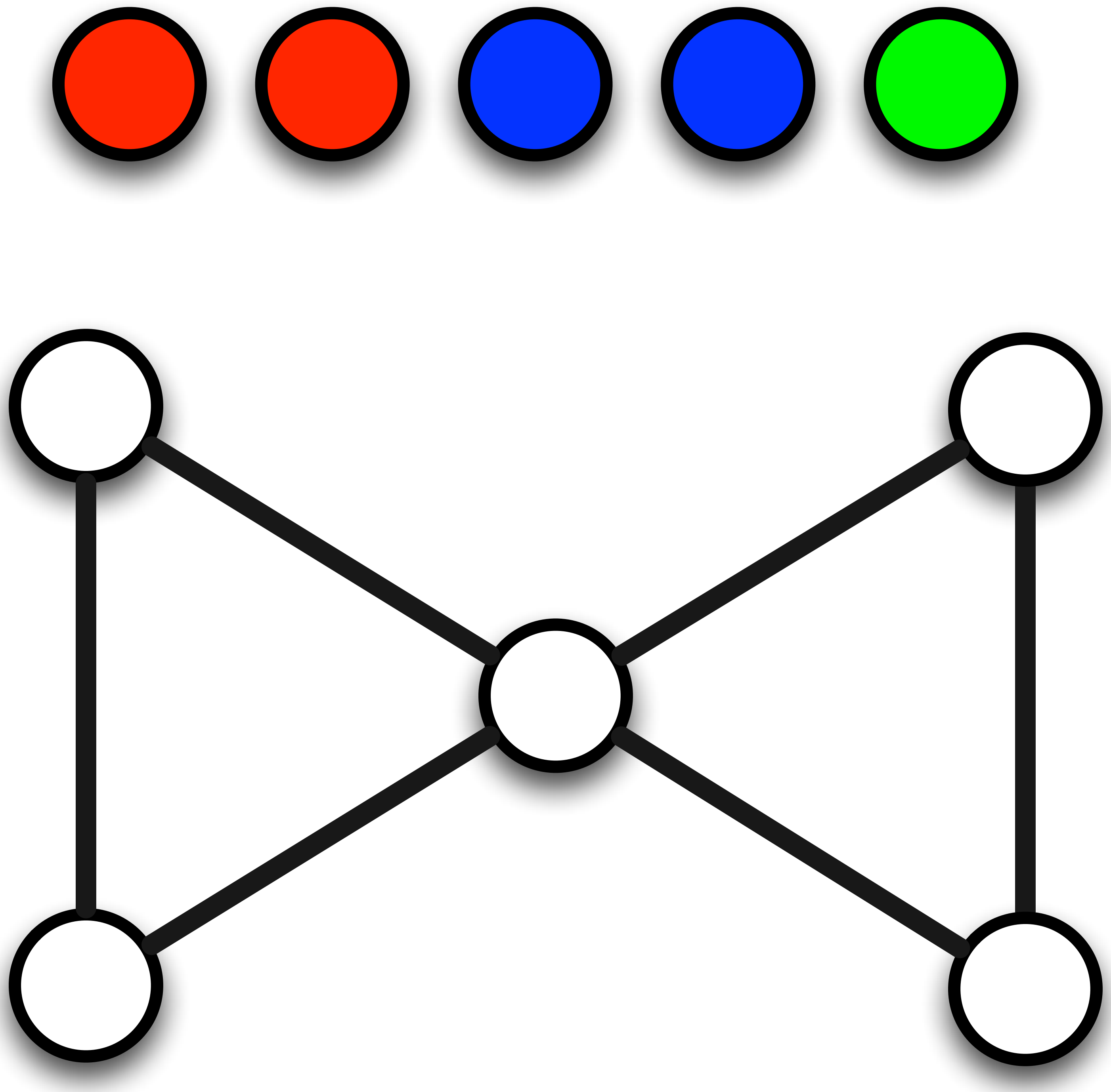


Chapitre 6

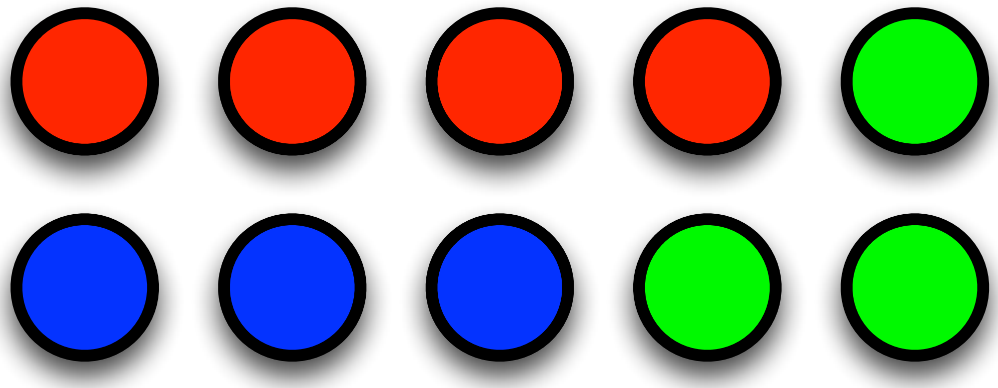
Fiches à imprimer pour jouer

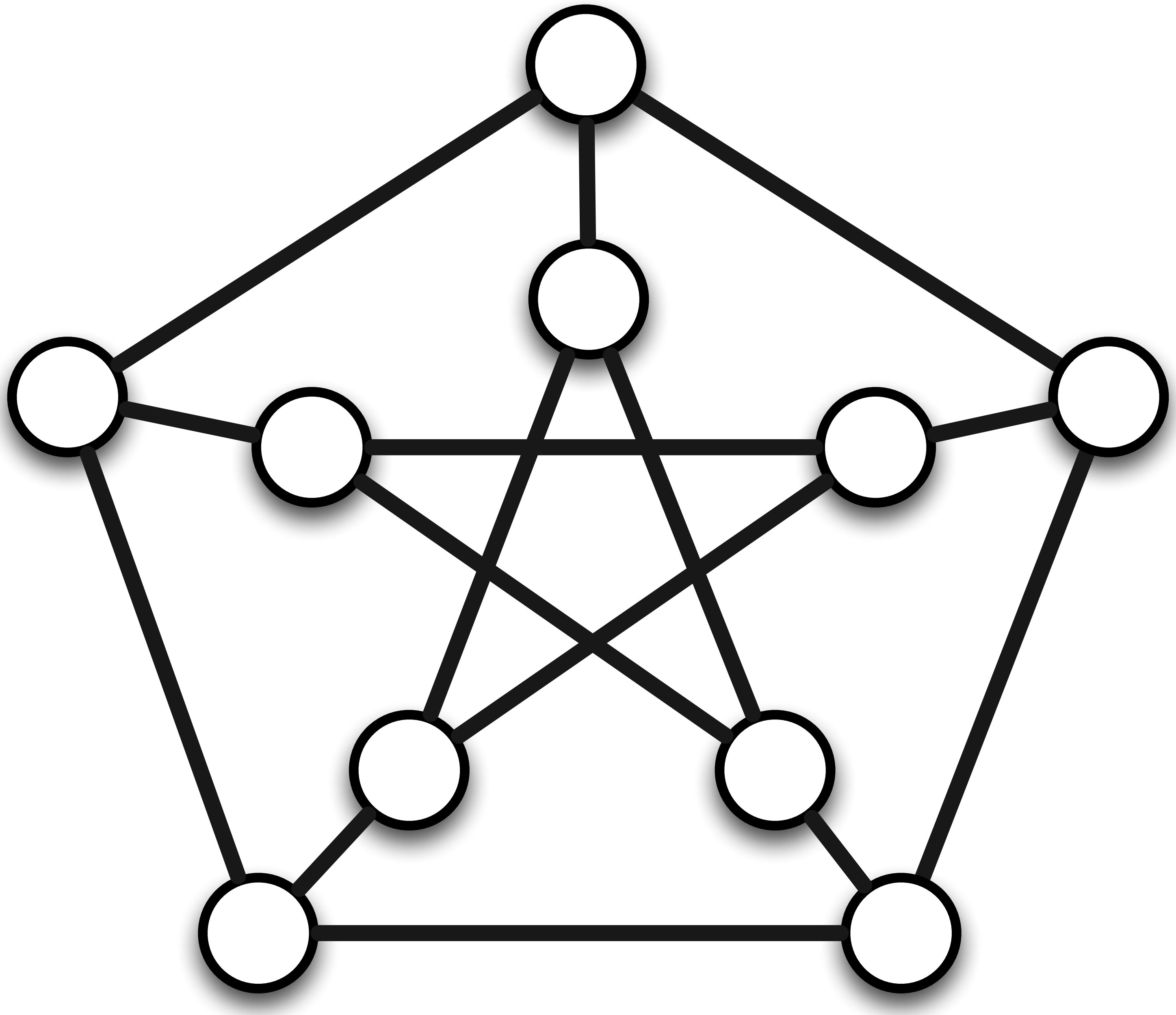
6.1 Coloration des sommets

Jeu 1 - Coloration des sommets

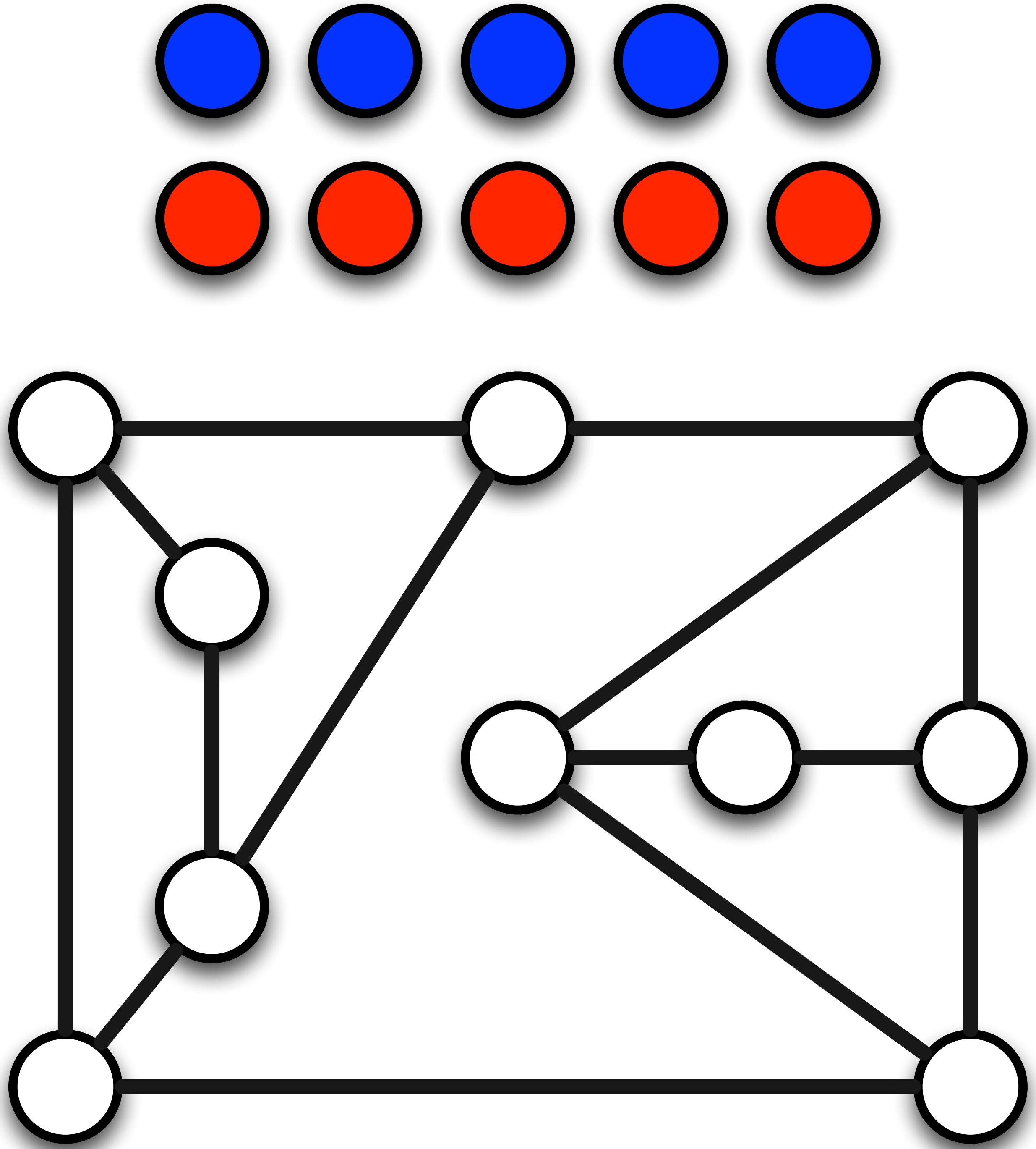


Jeu 2 - Coloration des sommets

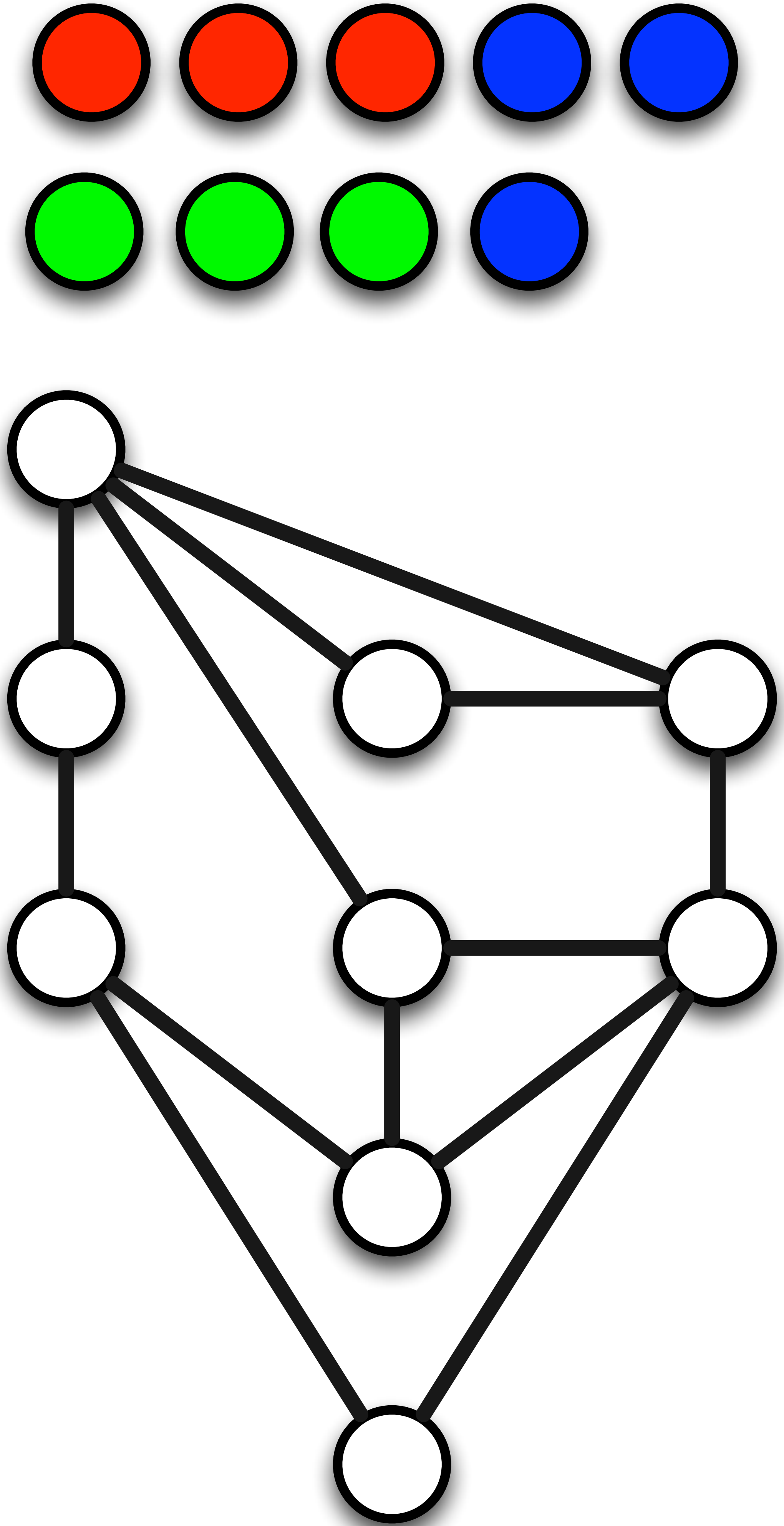




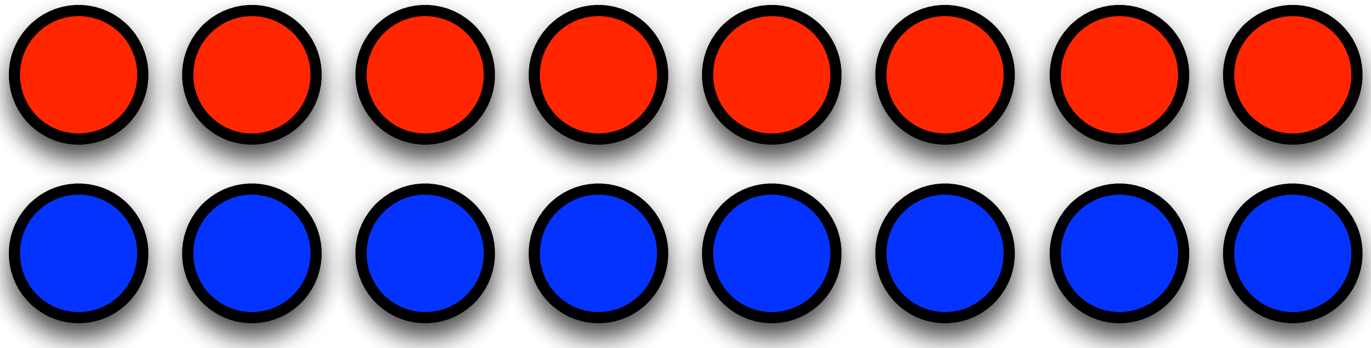
Jeu 3 - Coloration des sommets

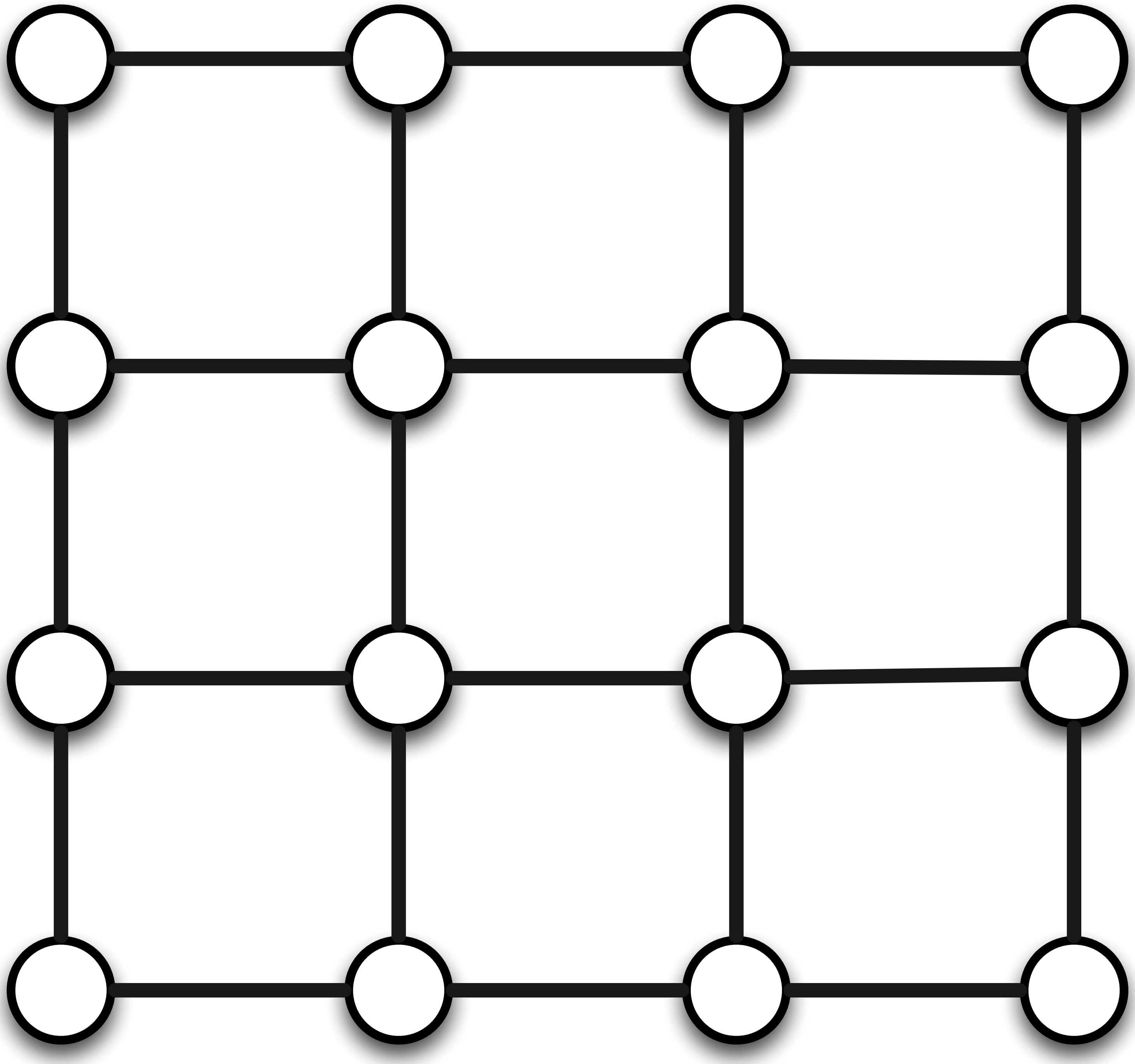


Jeu 4 - Coloration des sommets

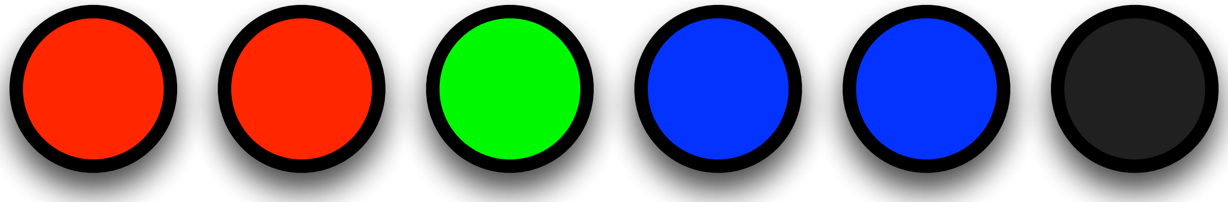


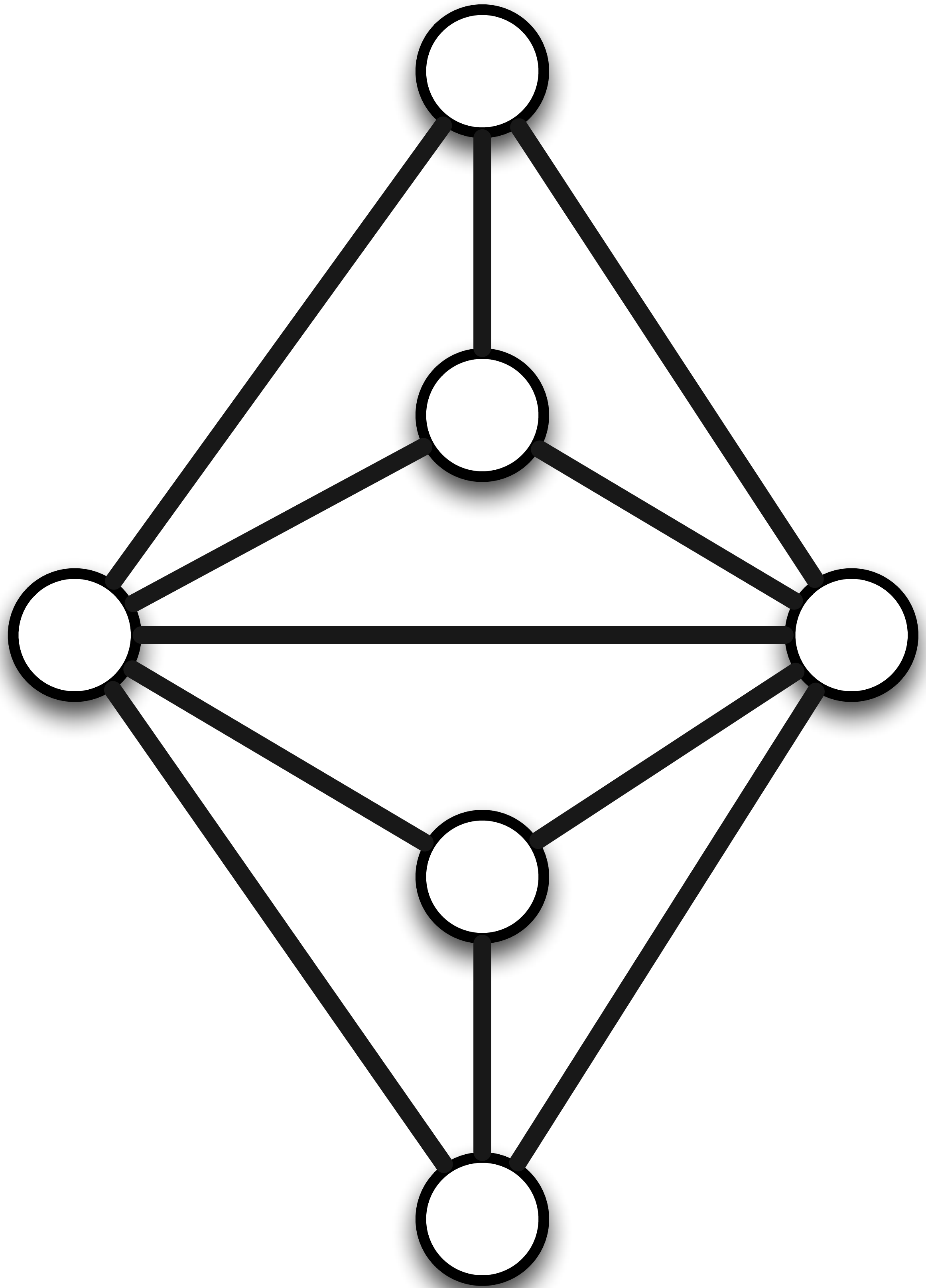
Jeu 5 - Coloration des sommets



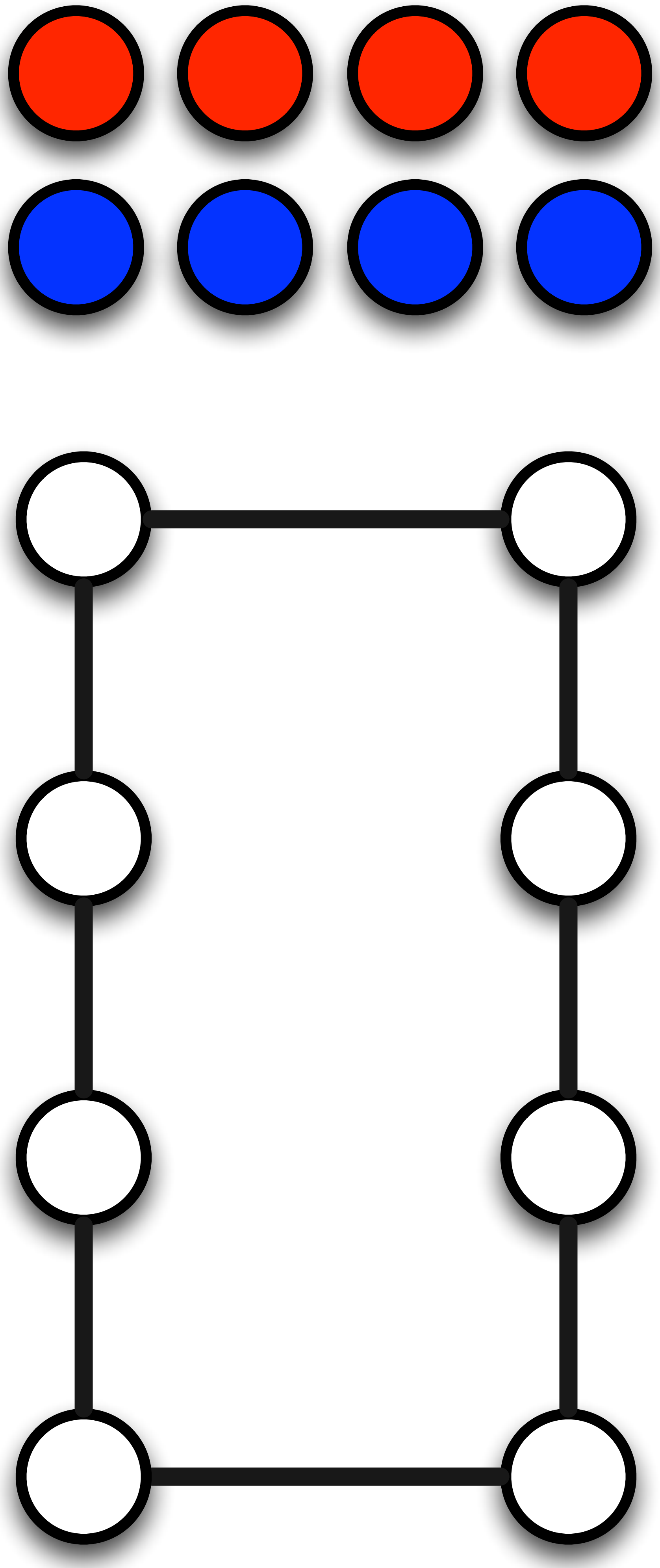


Jeu 6 - Coloration des sommets

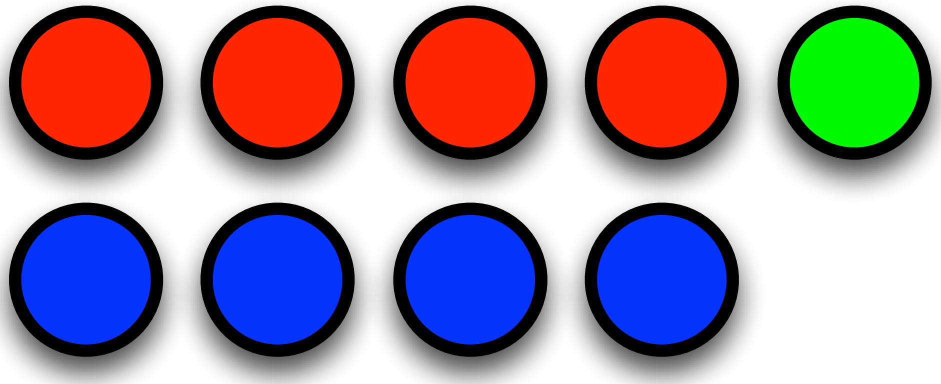


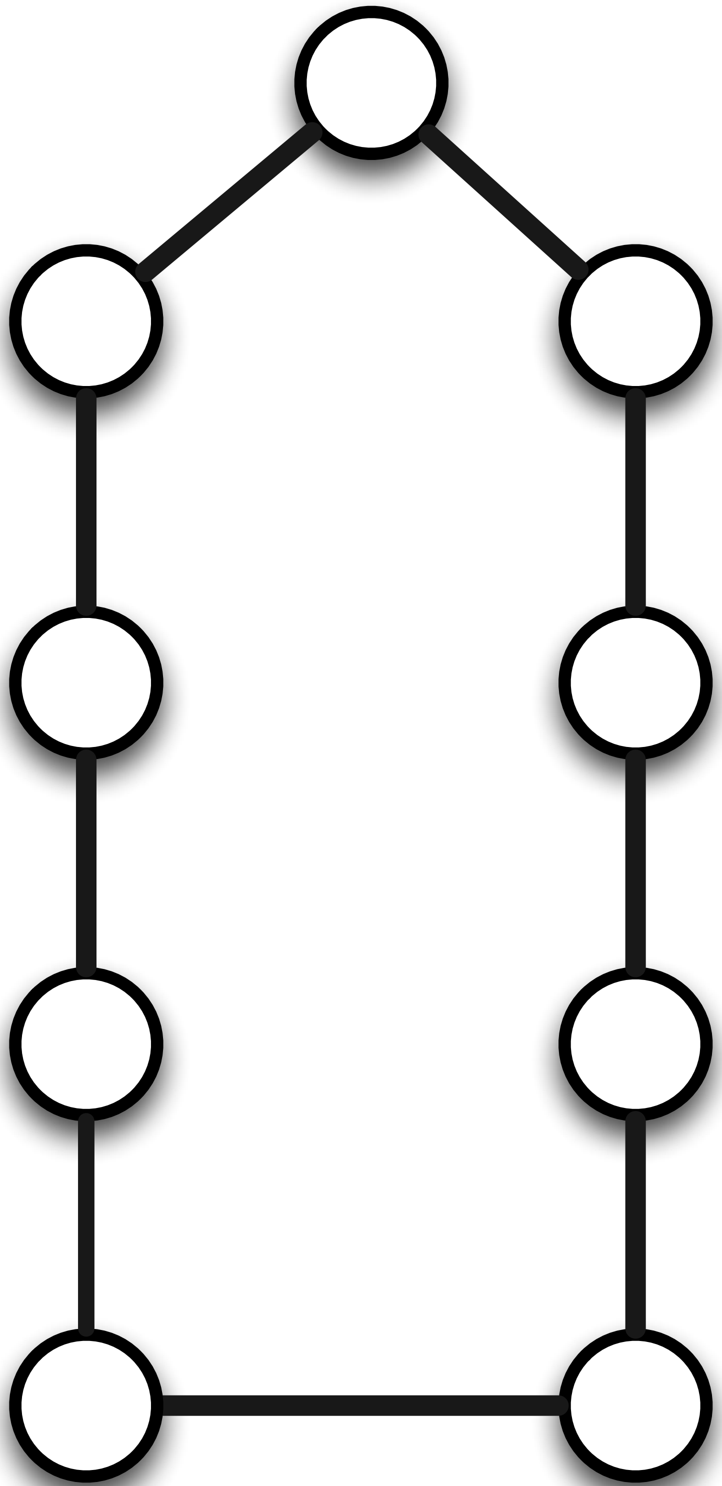


Jeu 7 - Coloration des sommets

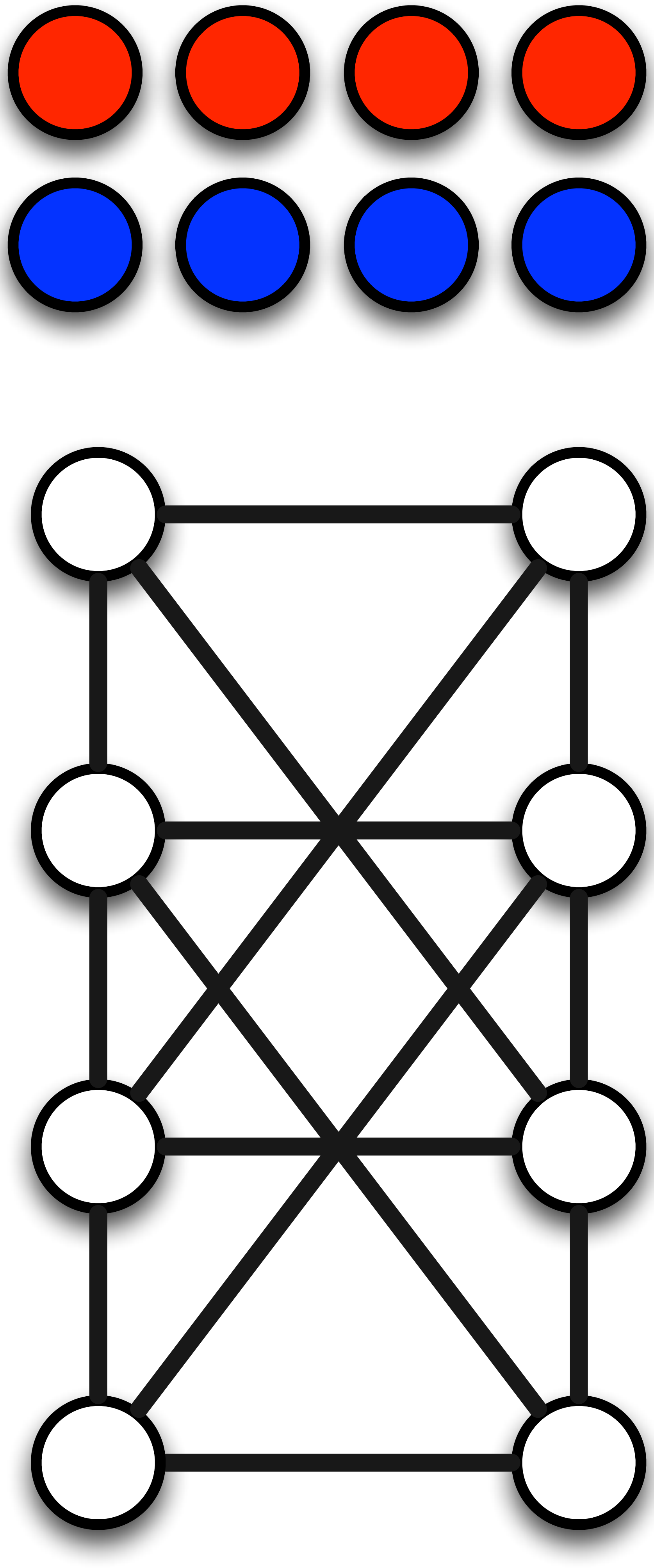


Jeu 8 - Coloration des sommets

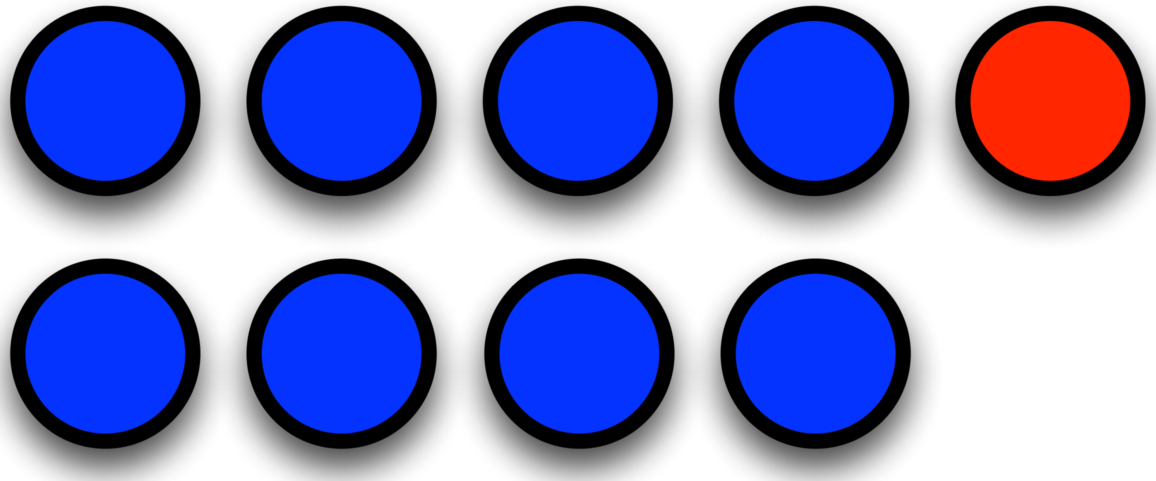


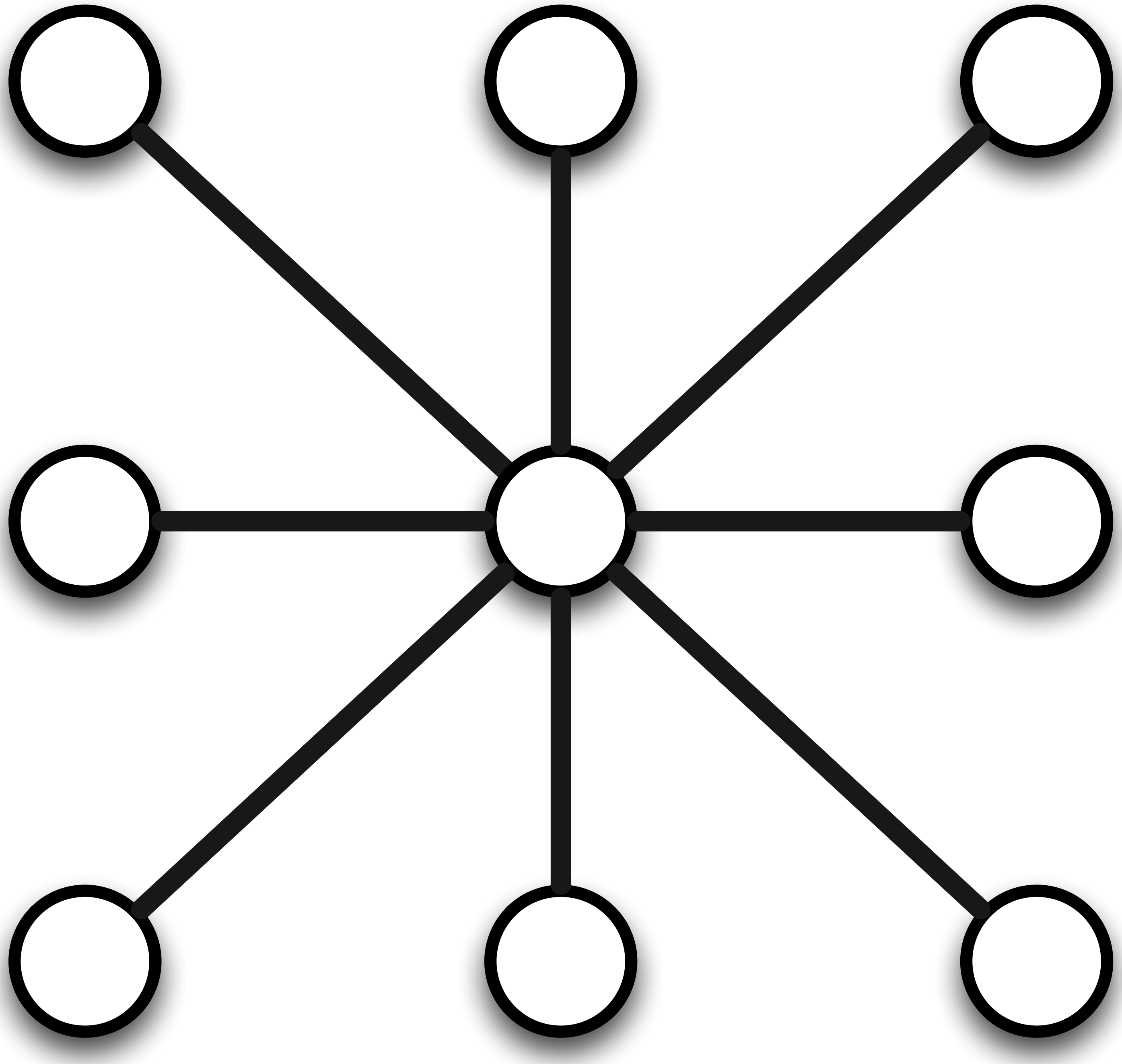


Jeu 9 - Coloration des sommets

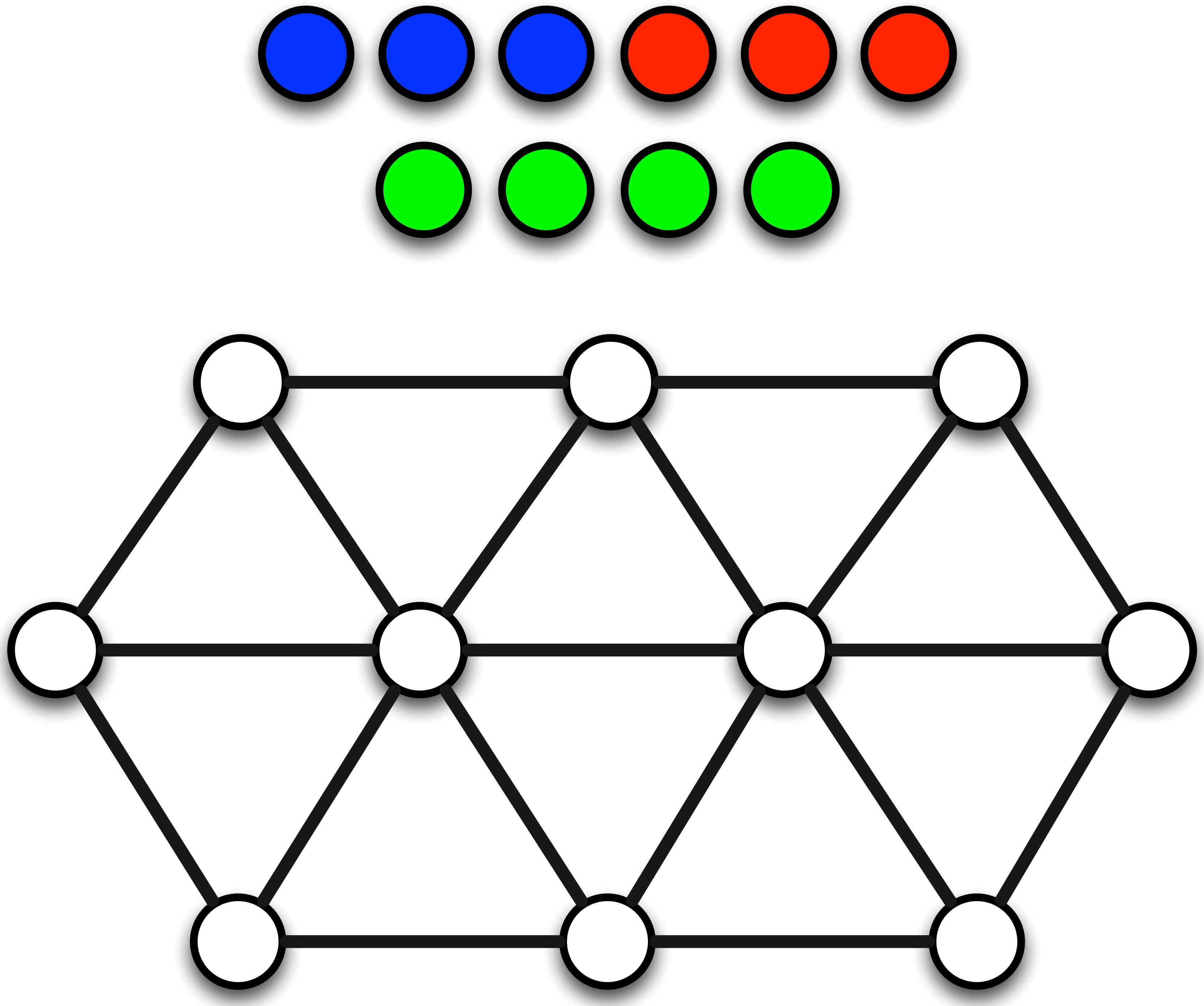


Jeu 10 - Coloration des sommets

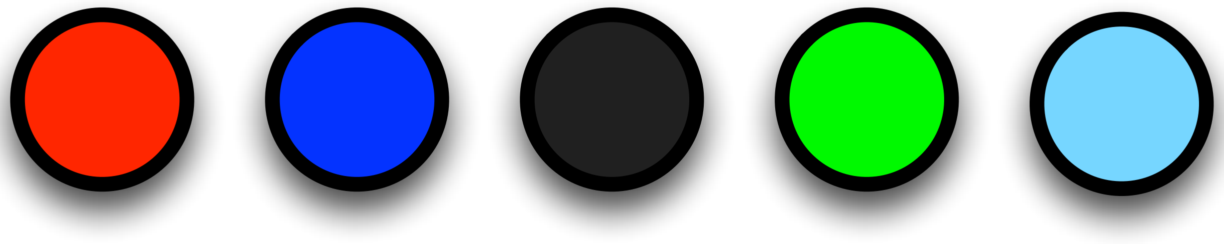


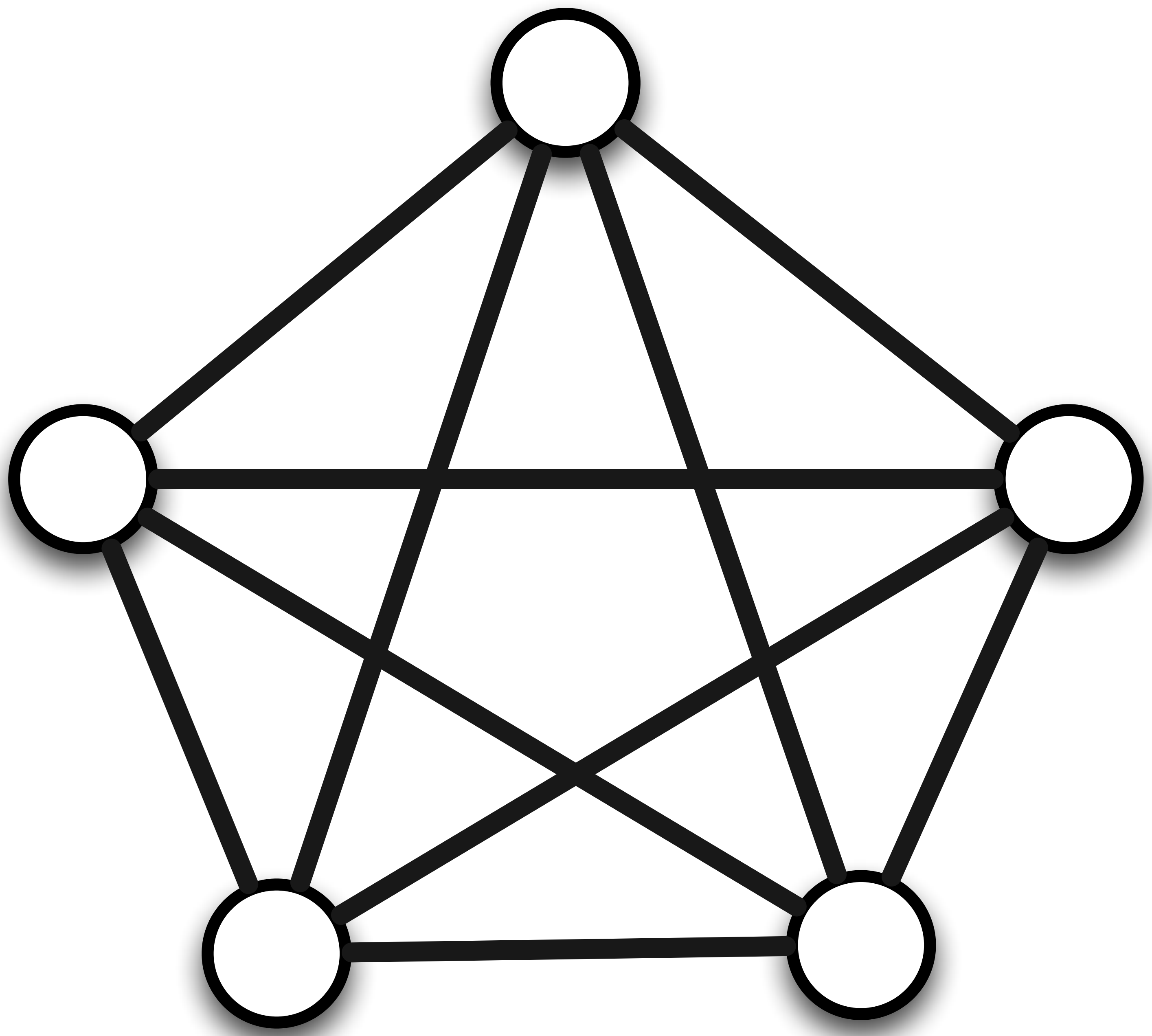


Jeu 11 - Coloration des sommets

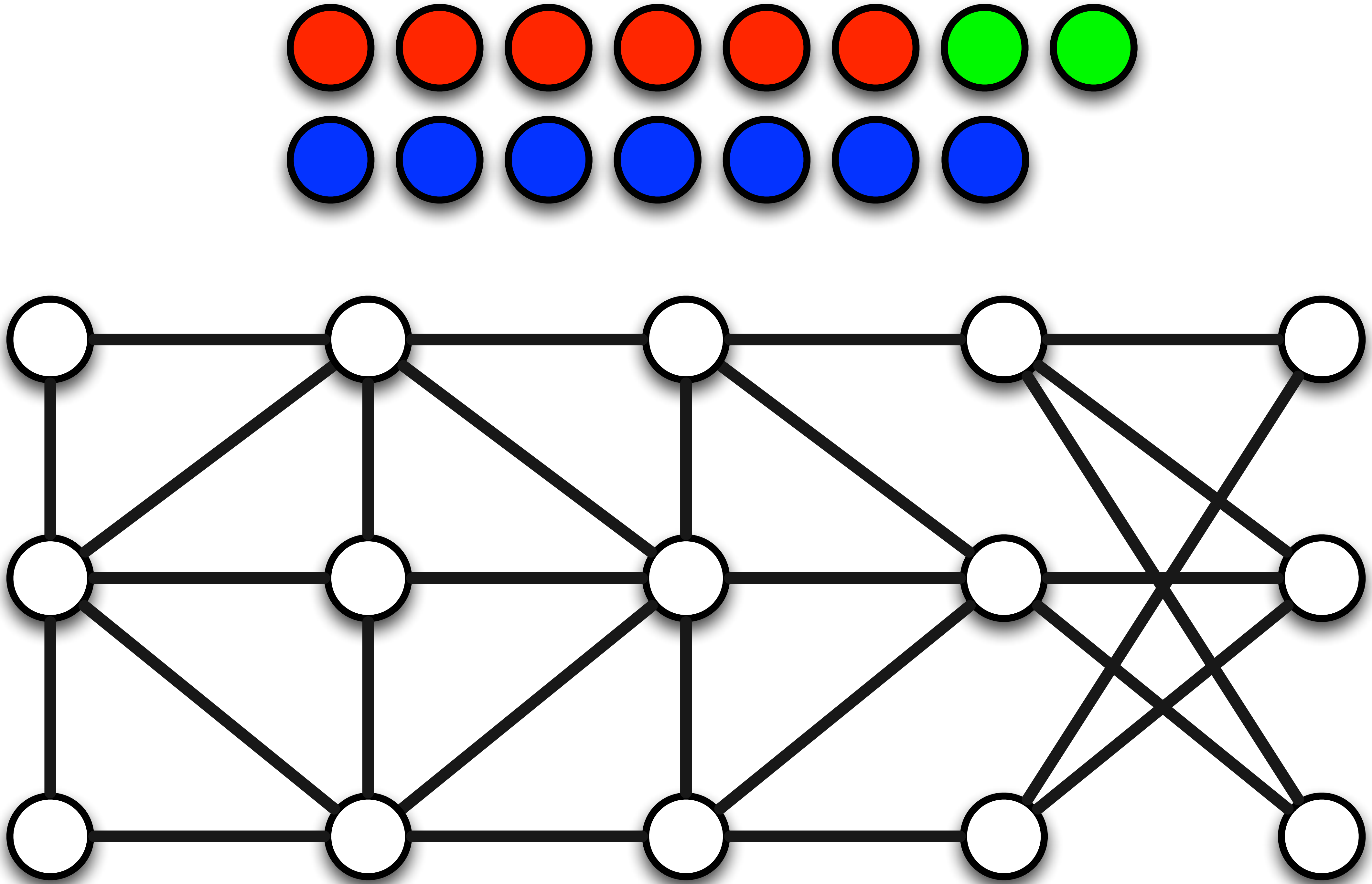


Jeu 12 - Coloration des sommets

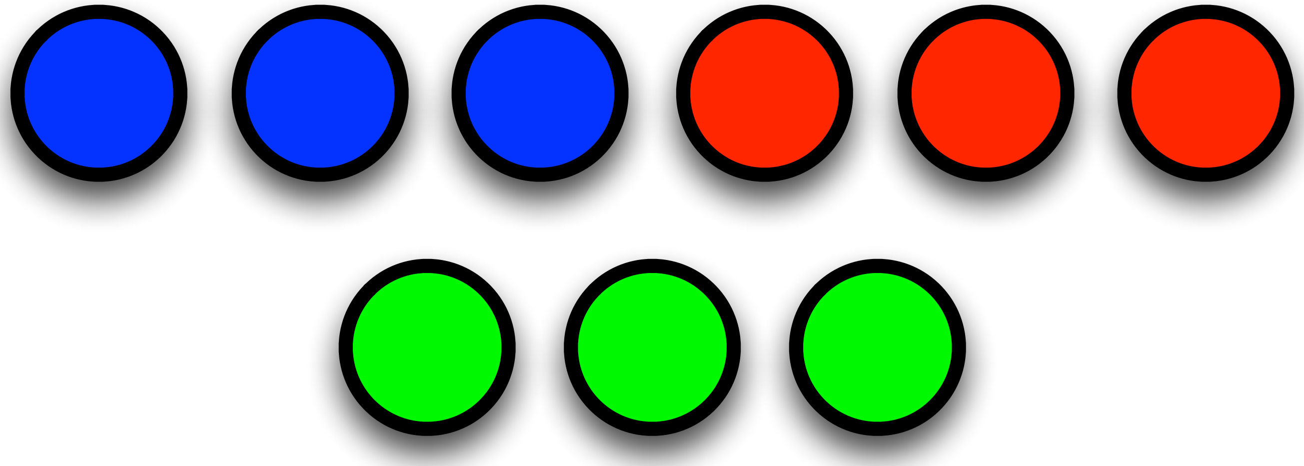


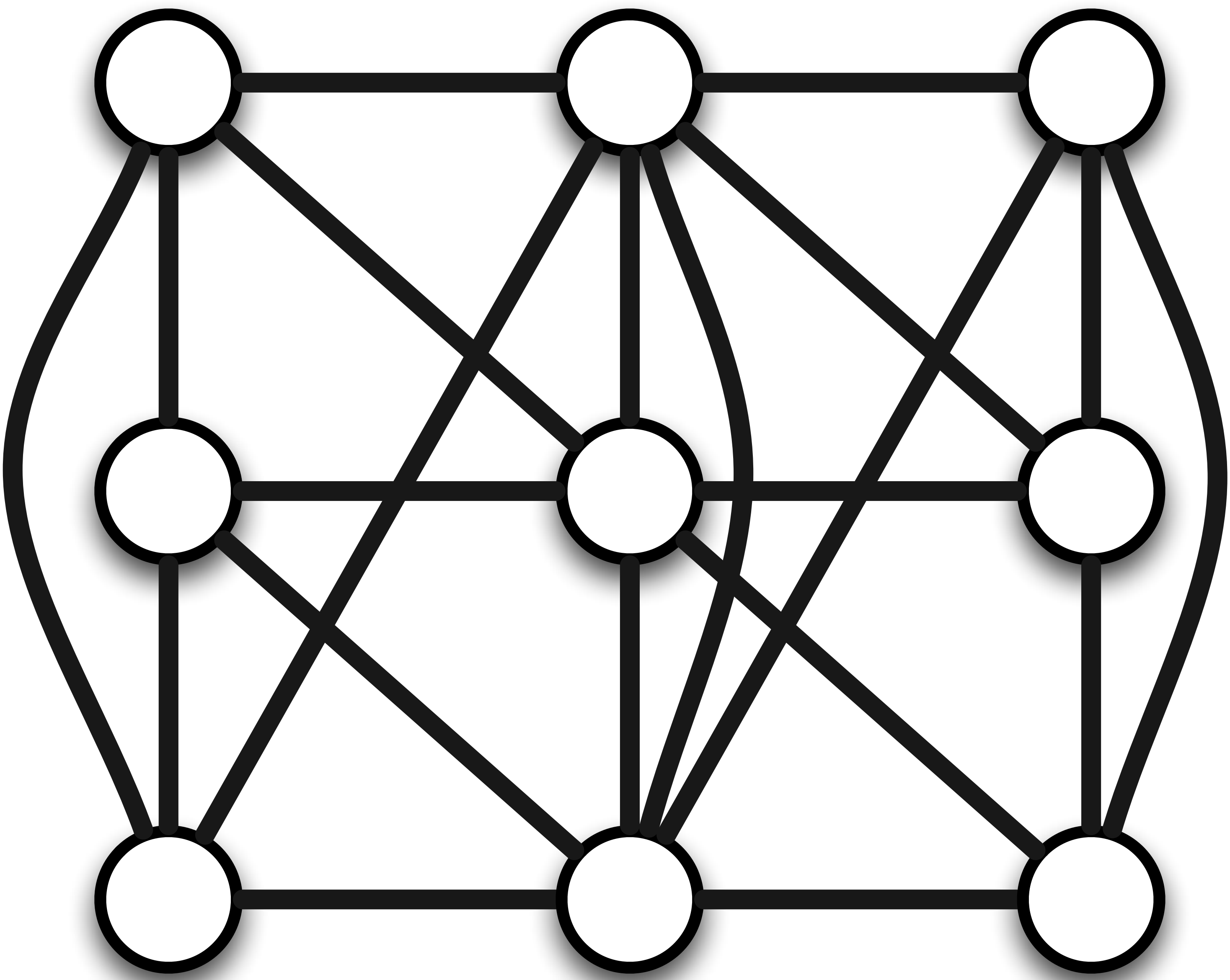


Jeu 13 - Coloration des sommets

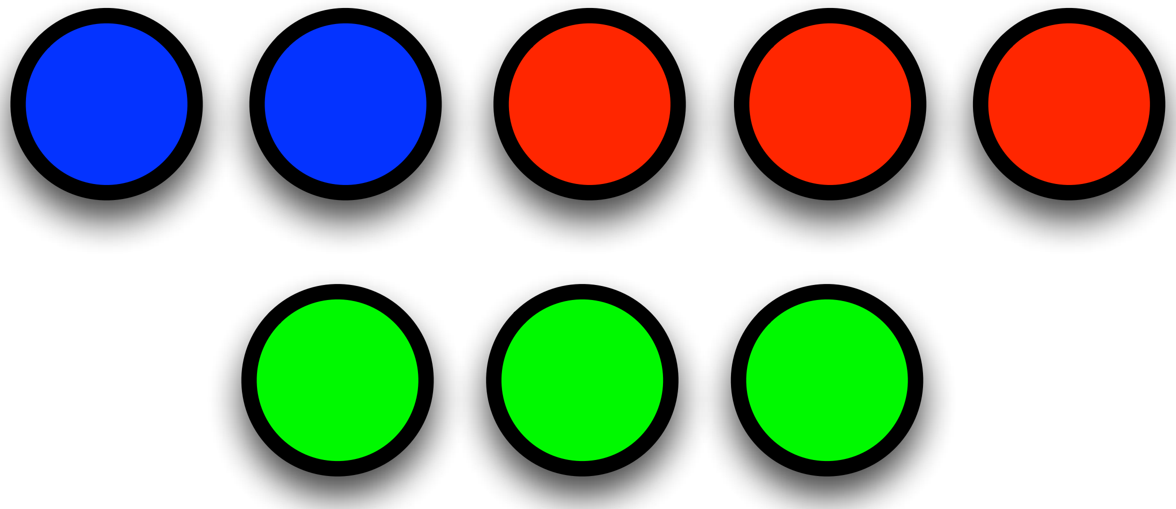


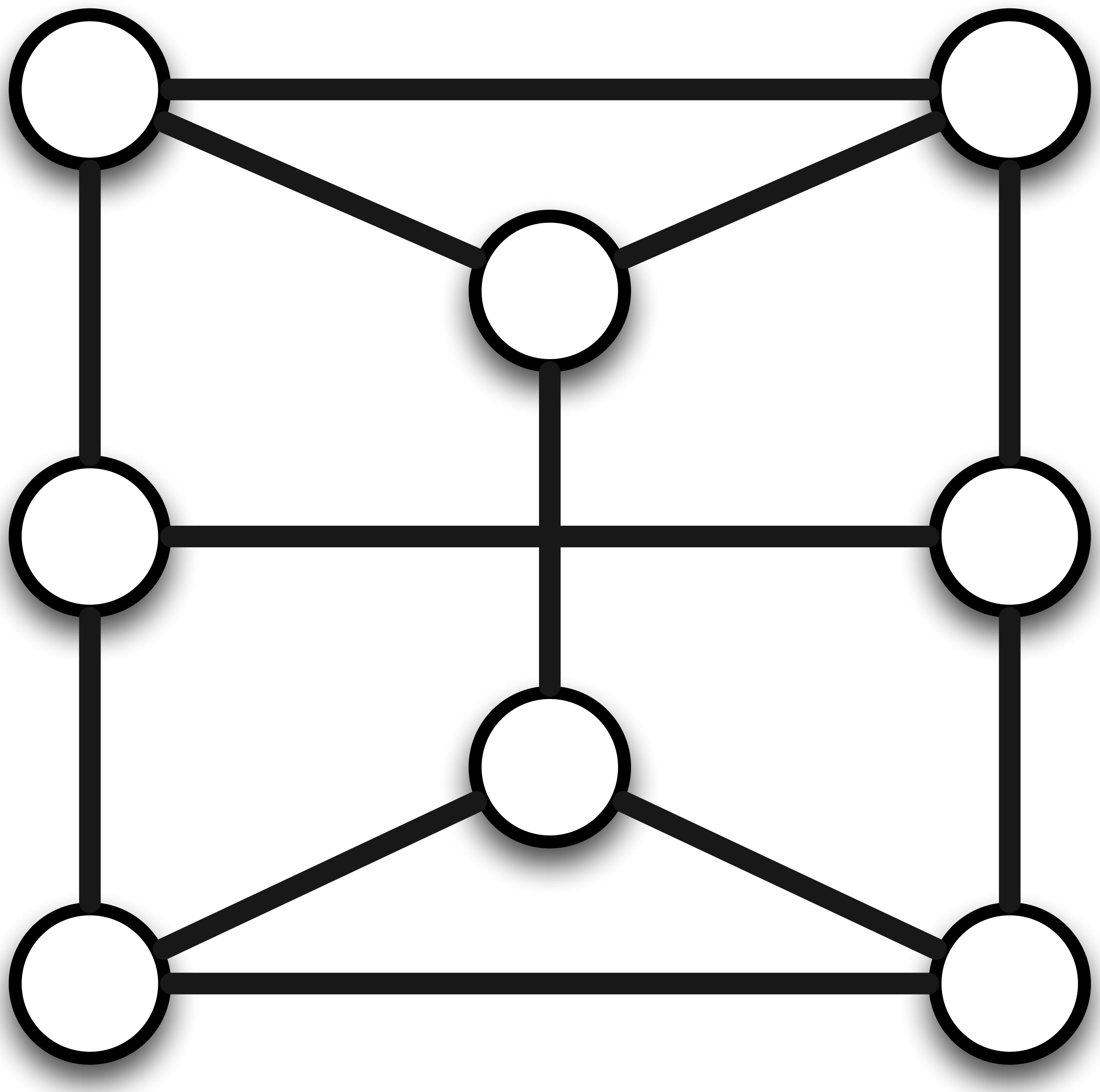
Jeu 14 - Coloration des sommets



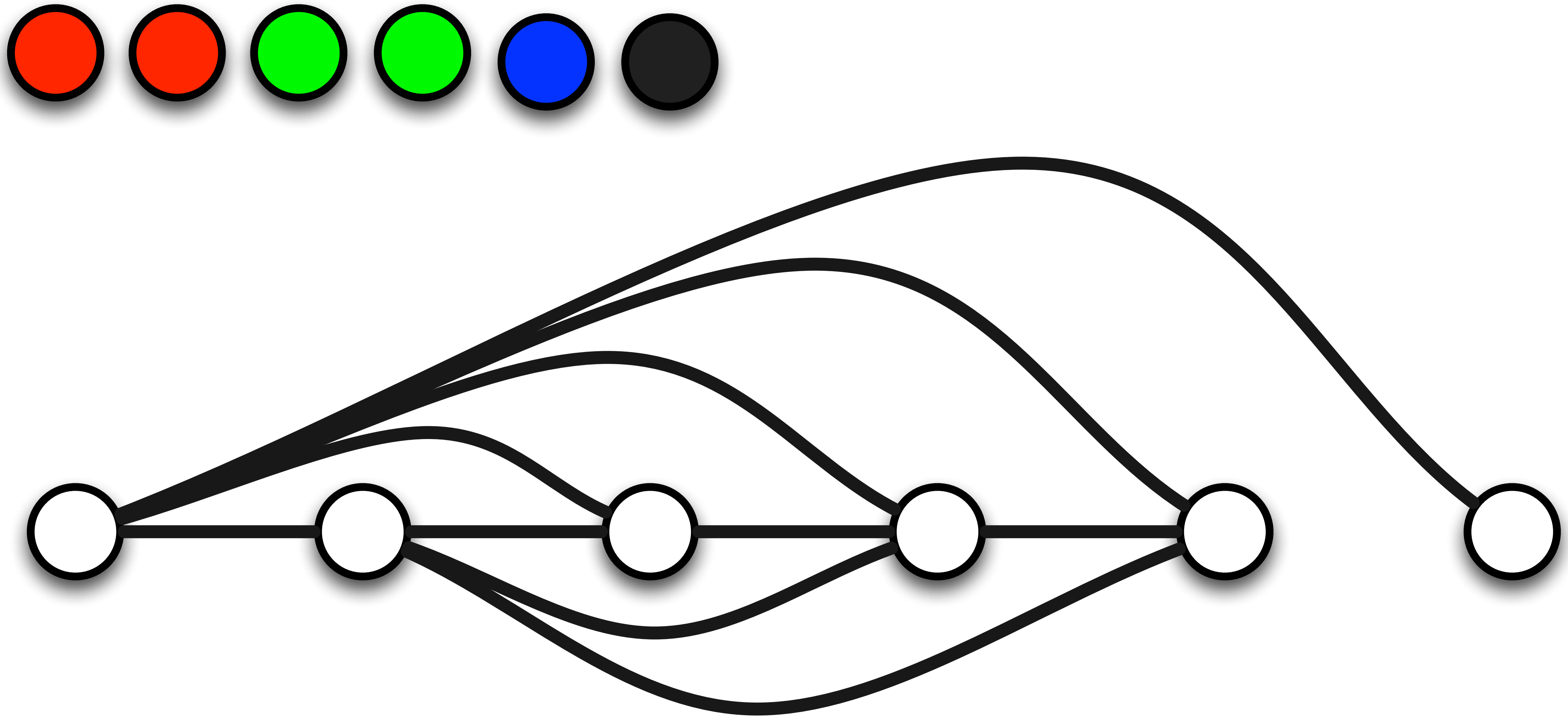


Jeu 15 - Coloration des sommets

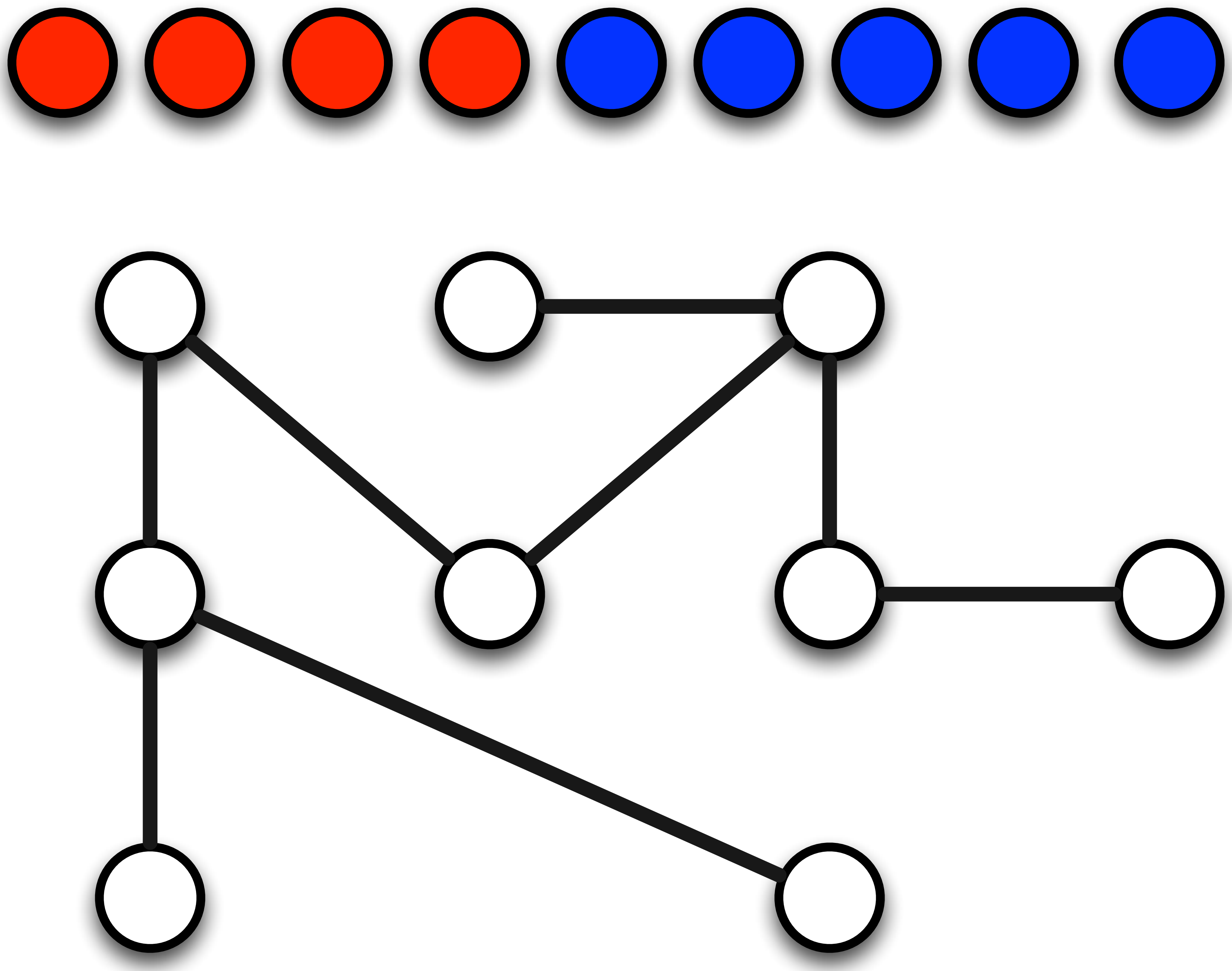




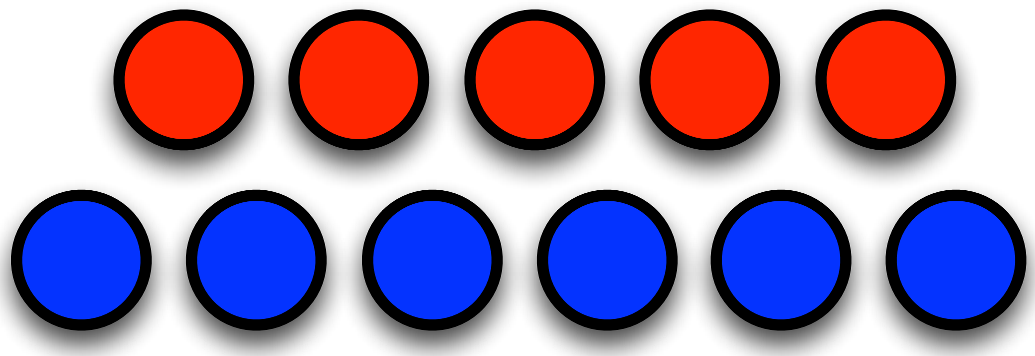
Jeu 16 - Coloration des sommets

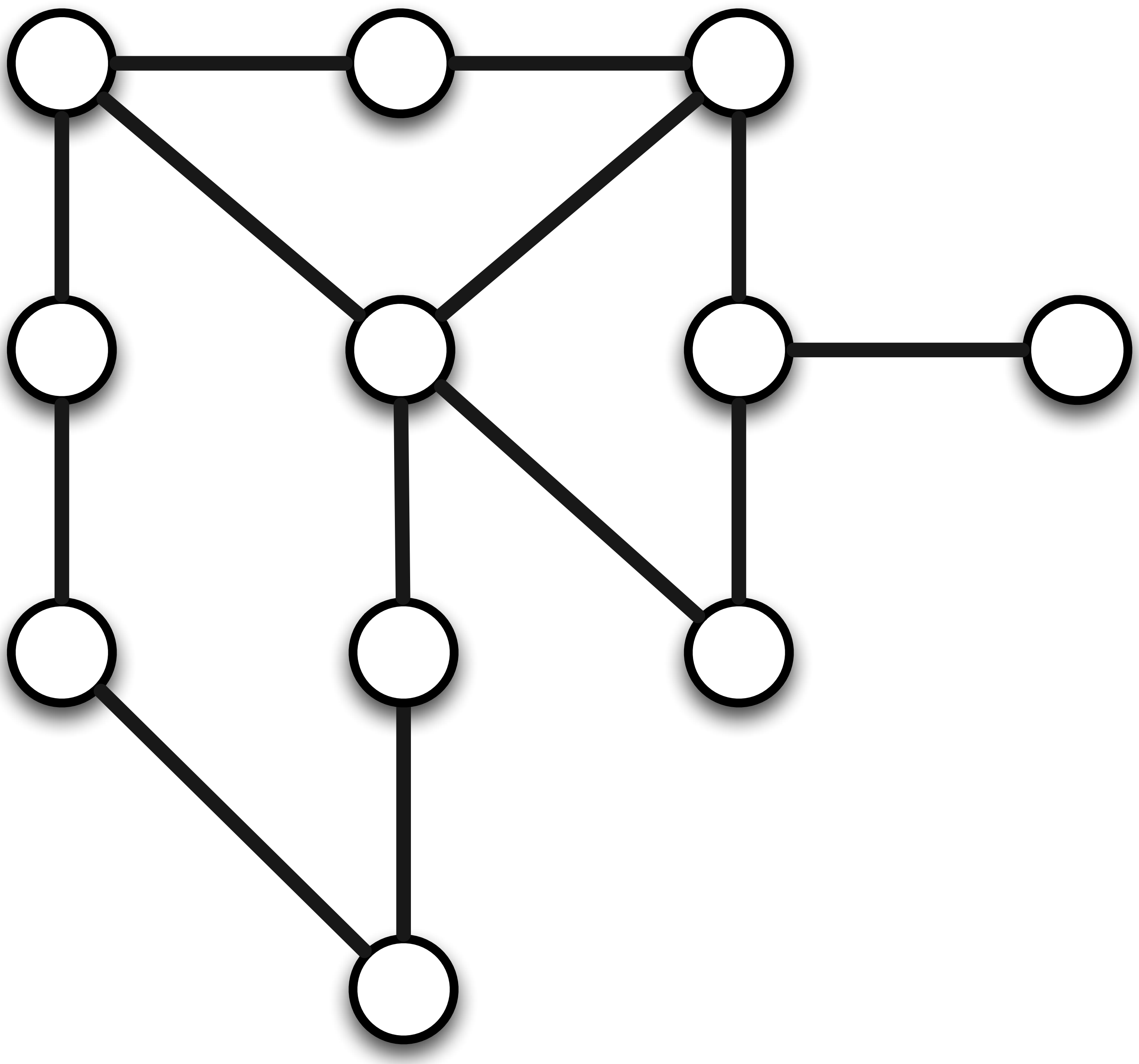


Jeu 17 - Coloration des sommets

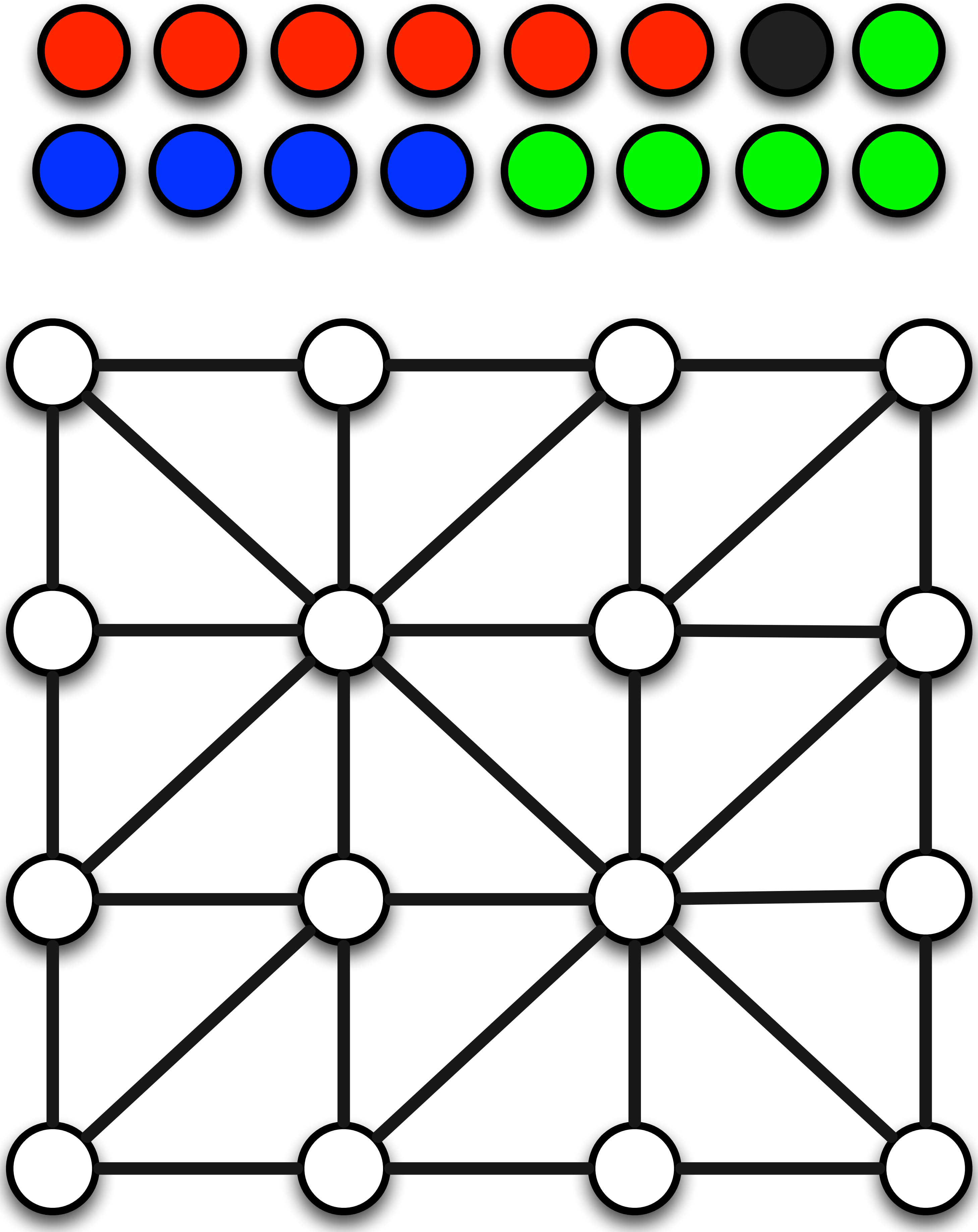


Jeu 18 - Coloration des sommets

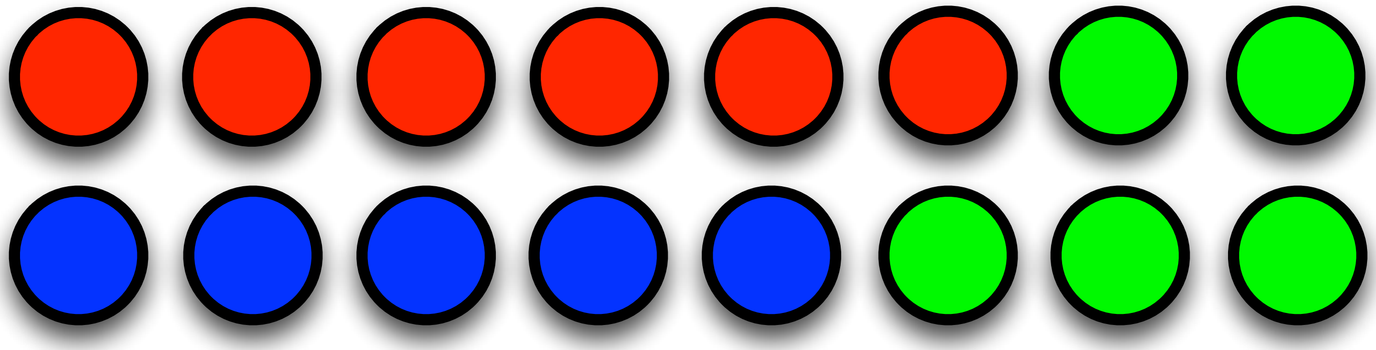


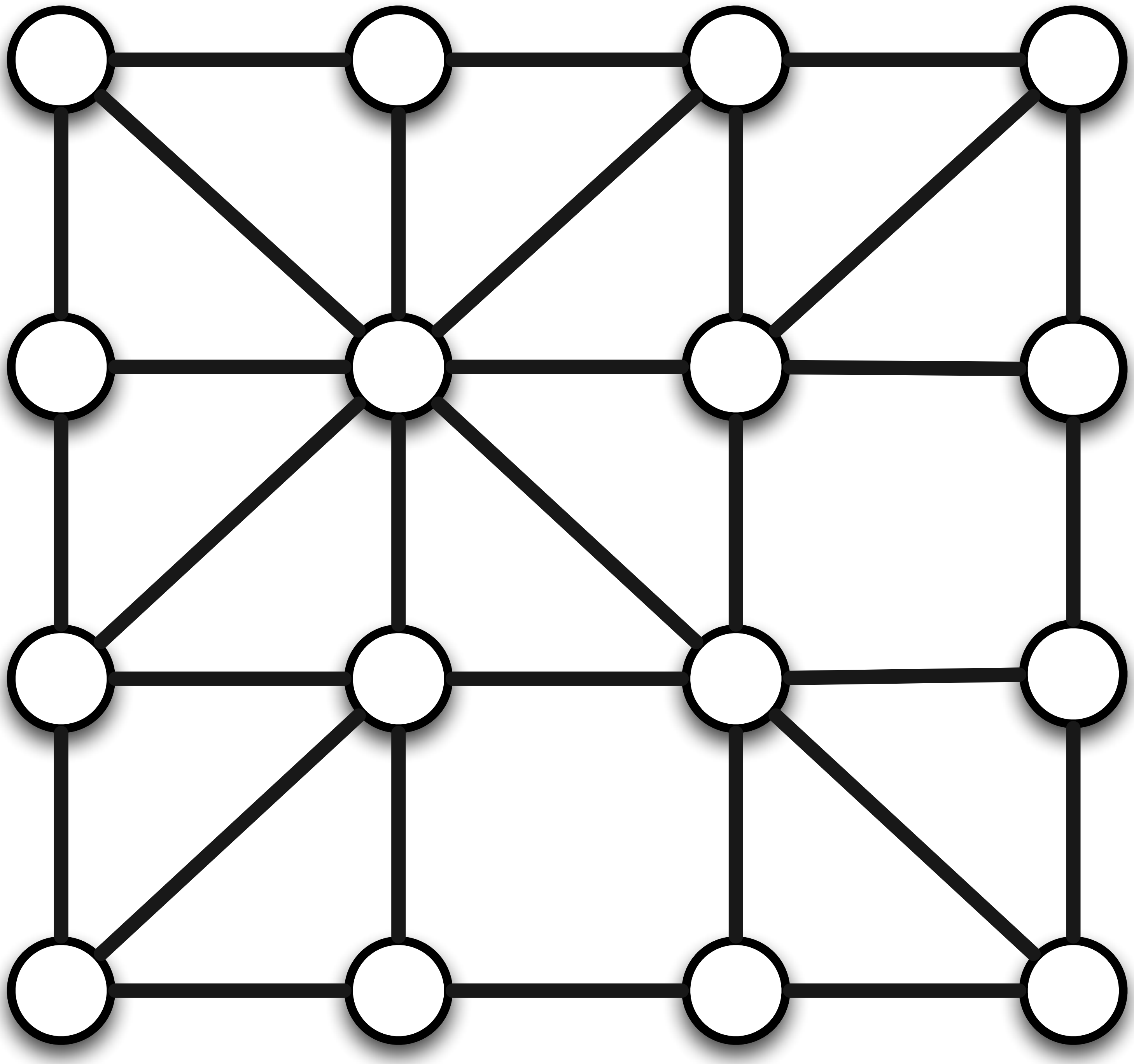


Jeu 19 - Coloration des sommets

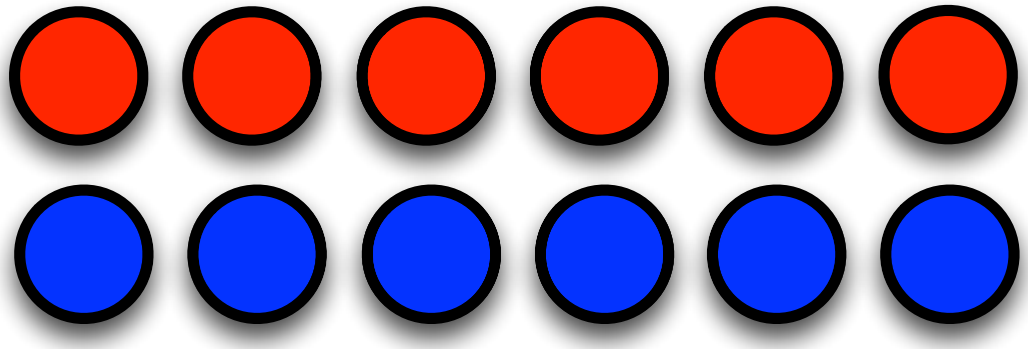


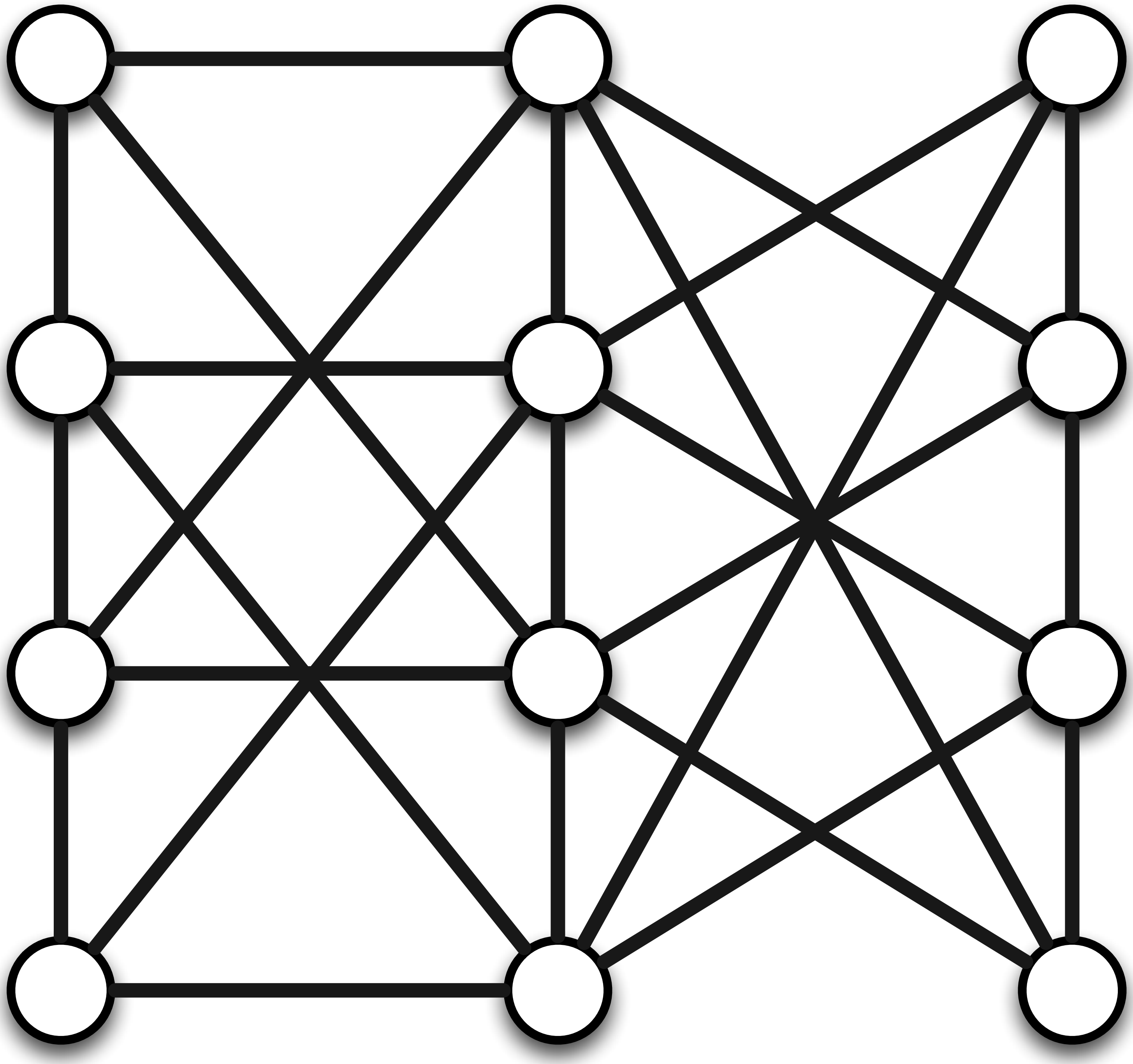
Jeu 20 - Coloration des sommets



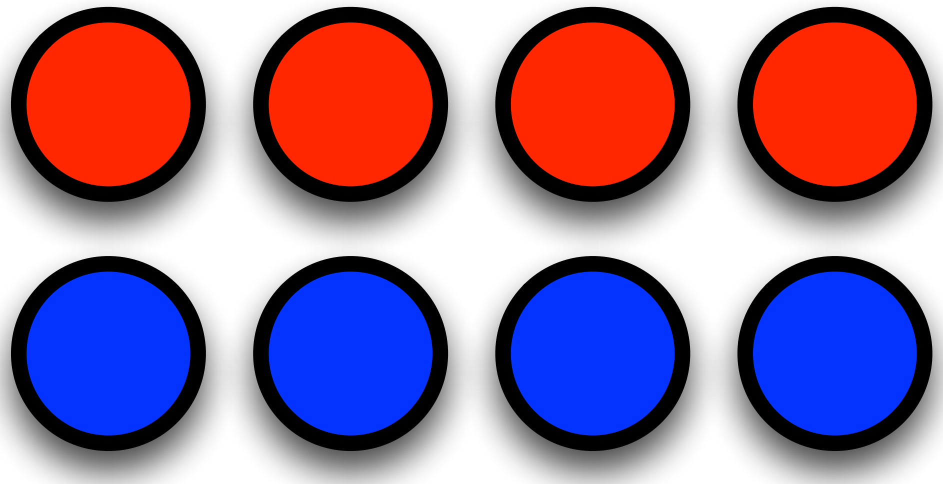


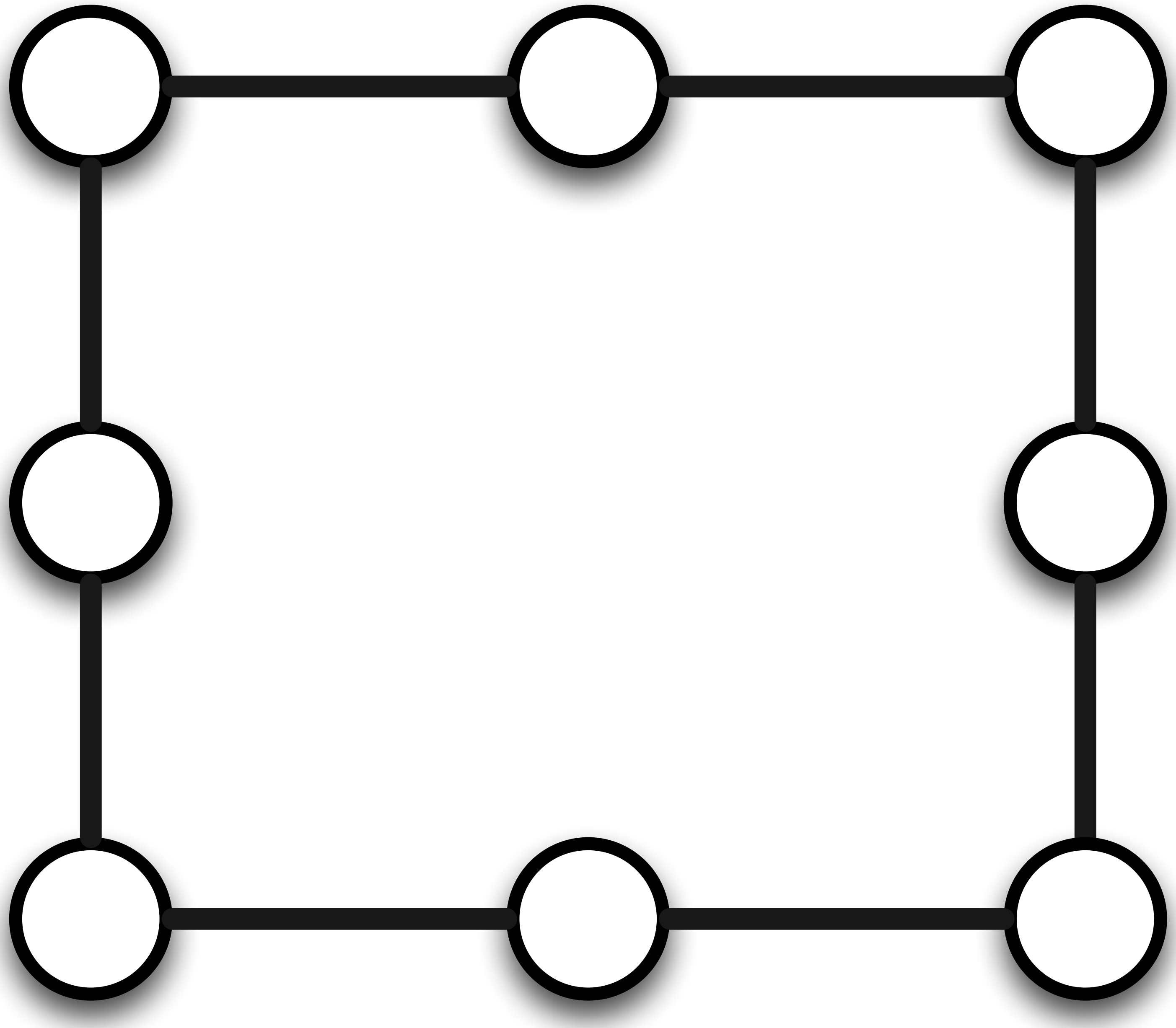
Jeu 21 - Coloration des sommets



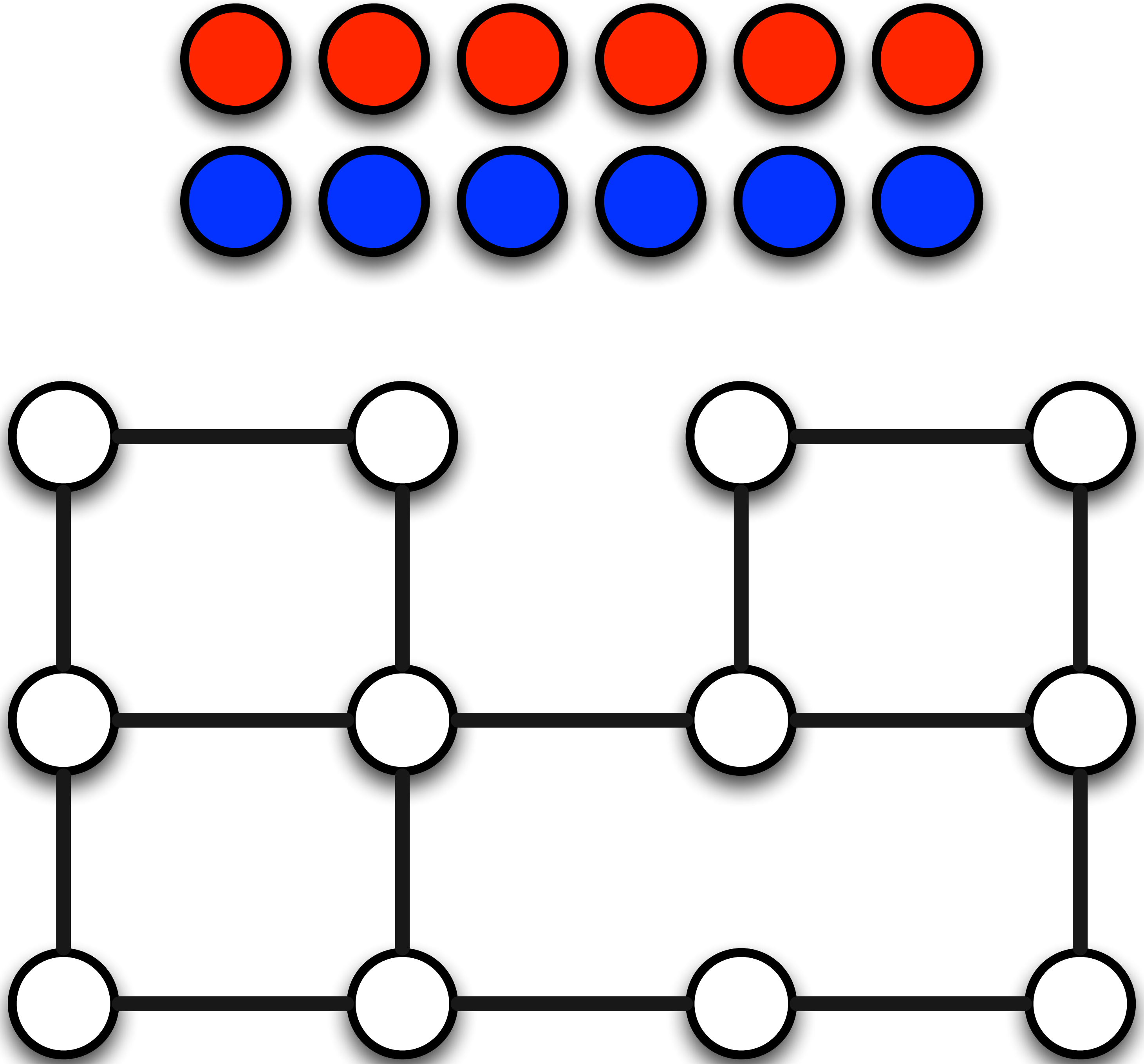


Jeu 22 - Coloration des sommets

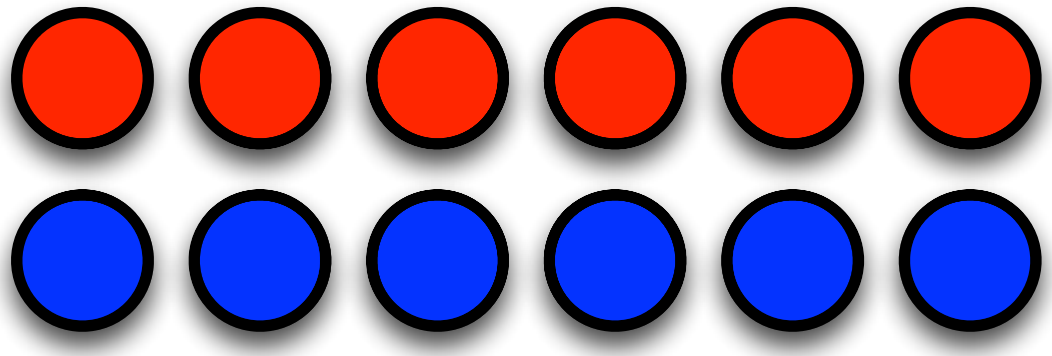


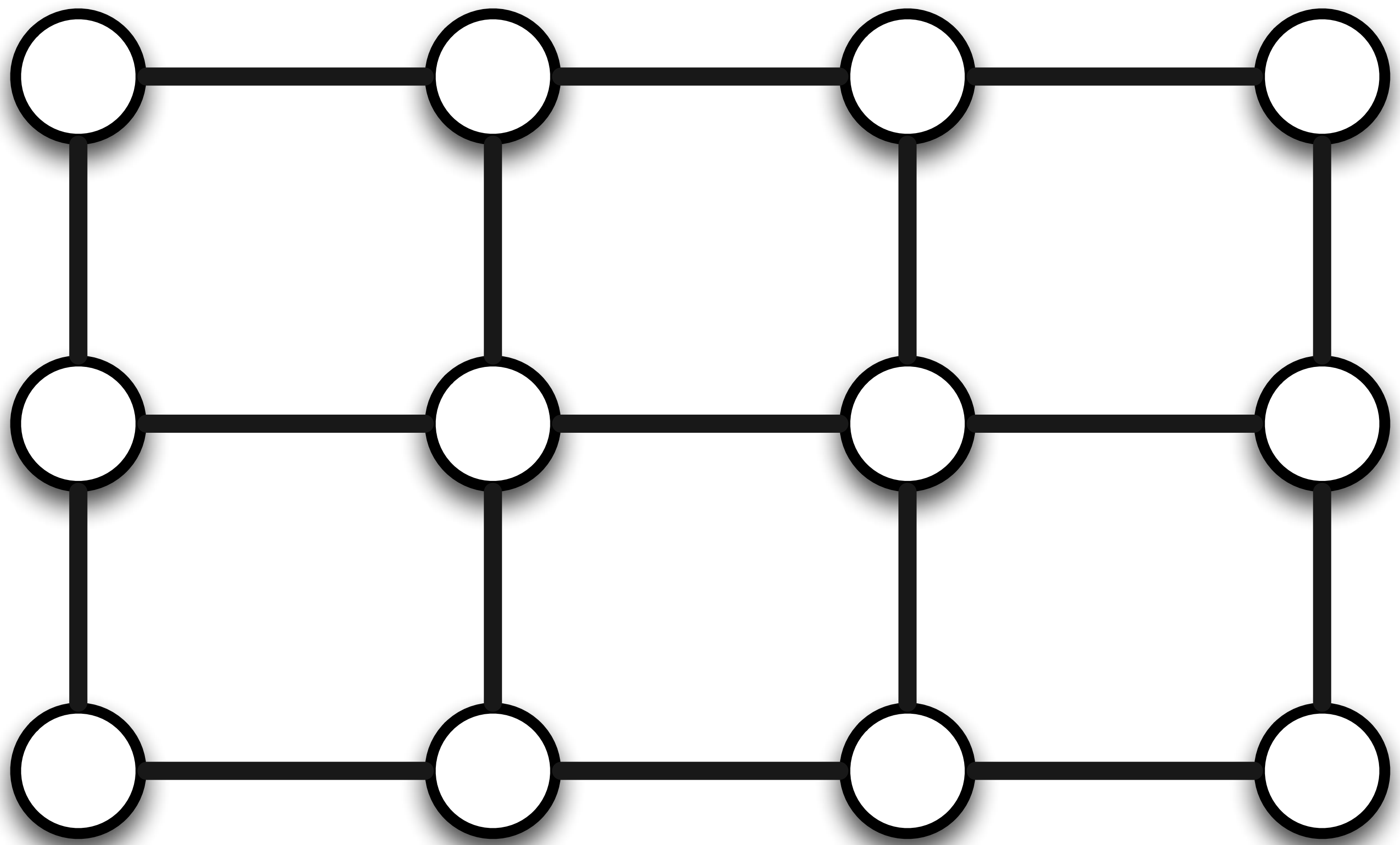


Jeu 23 - Coloration des sommets

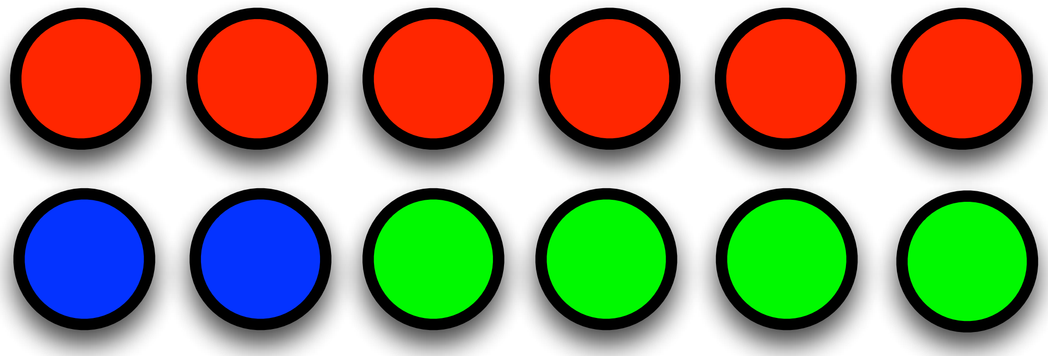


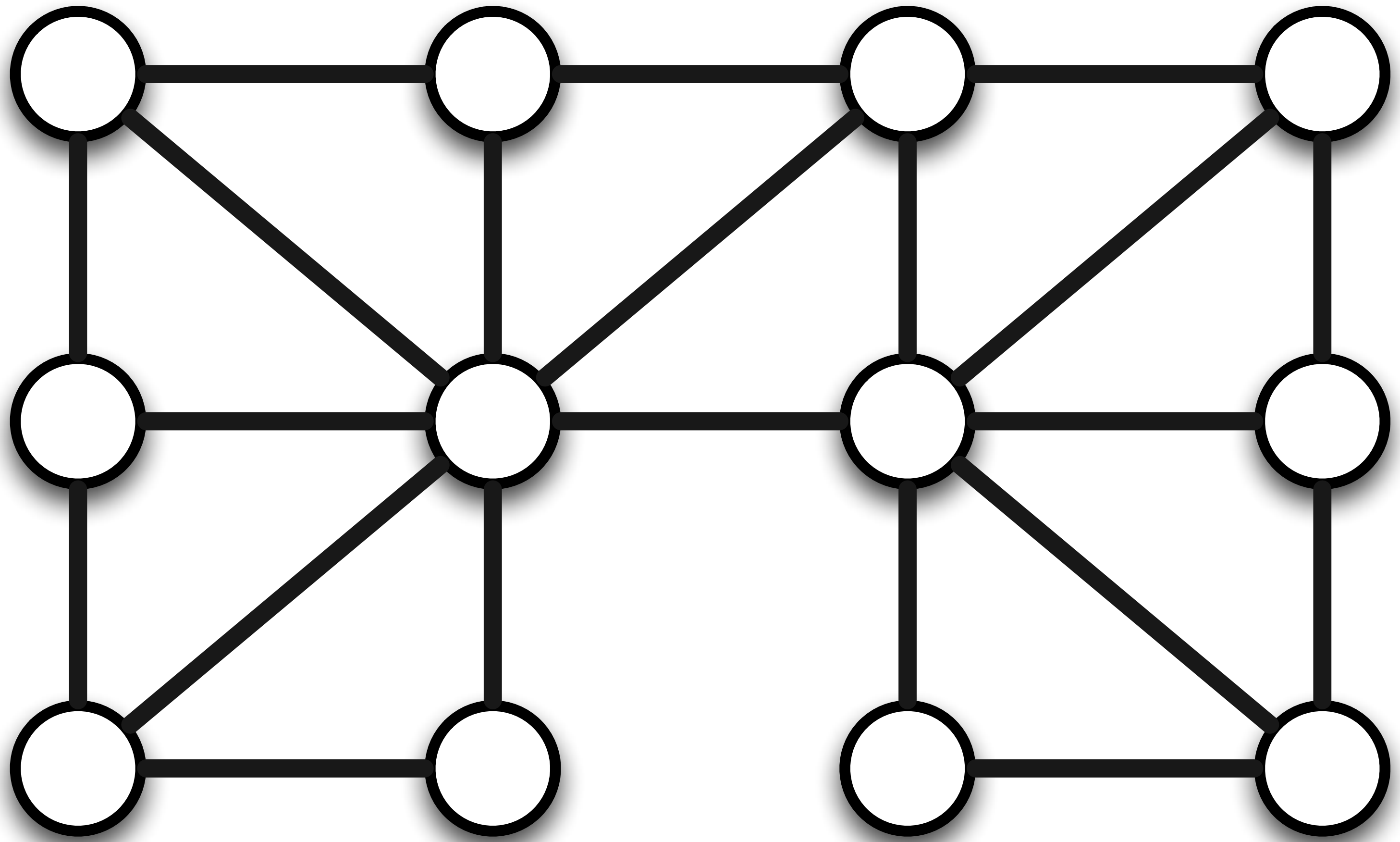
Jeu 24 - Coloration des sommets



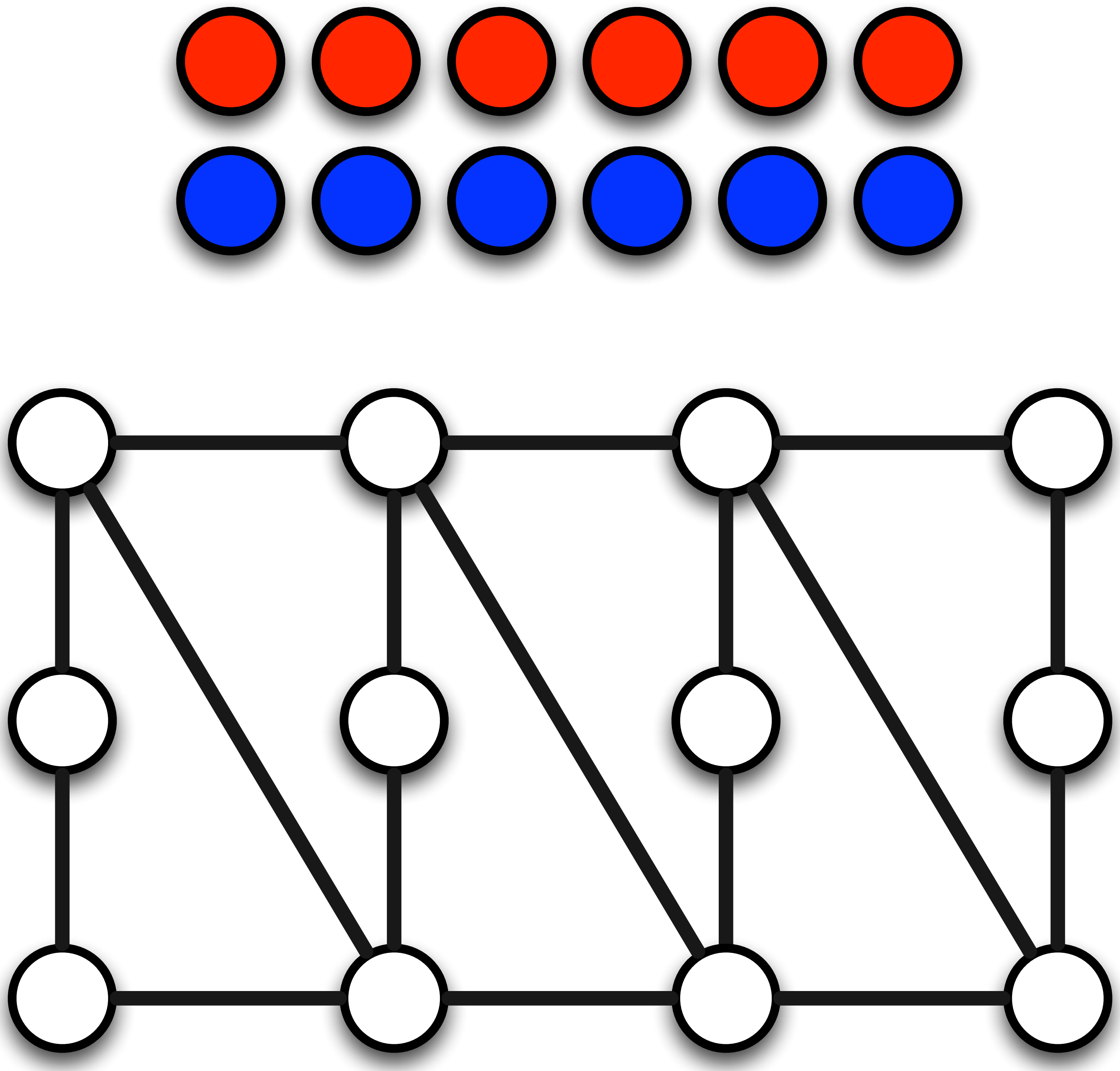


Jeu 25 - Coloration des sommets

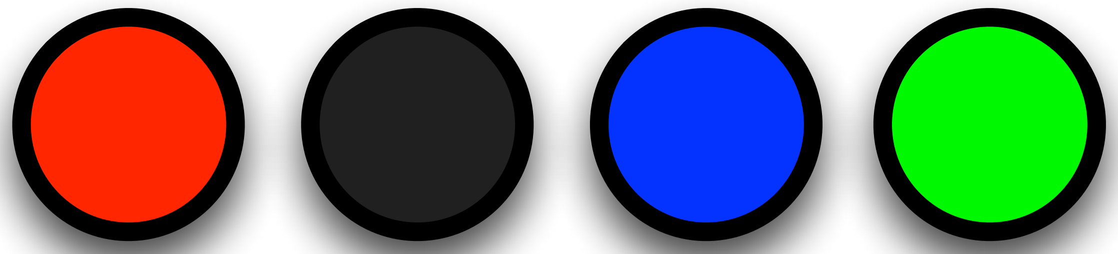


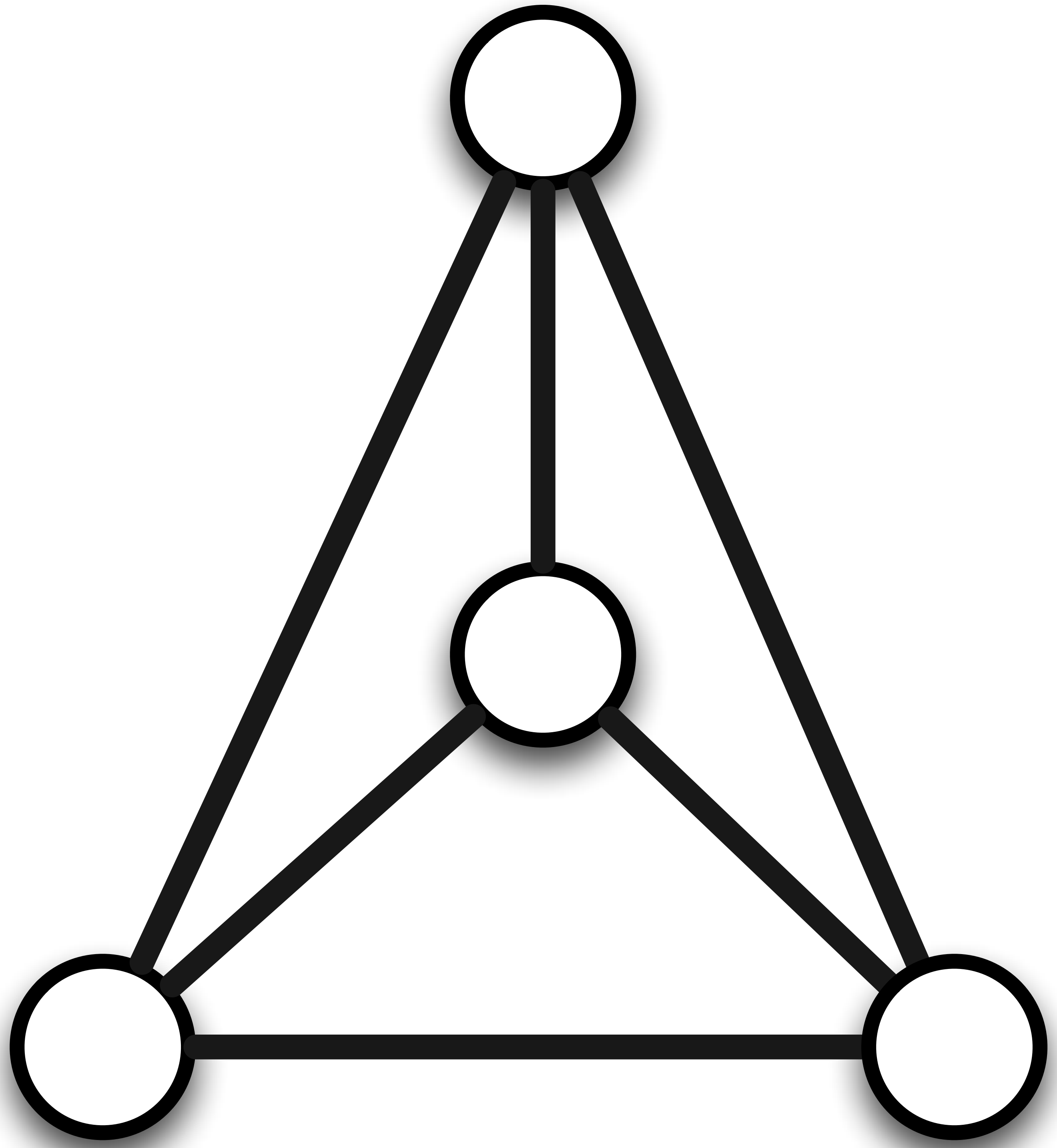


Jeu 26 - Coloration des sommets

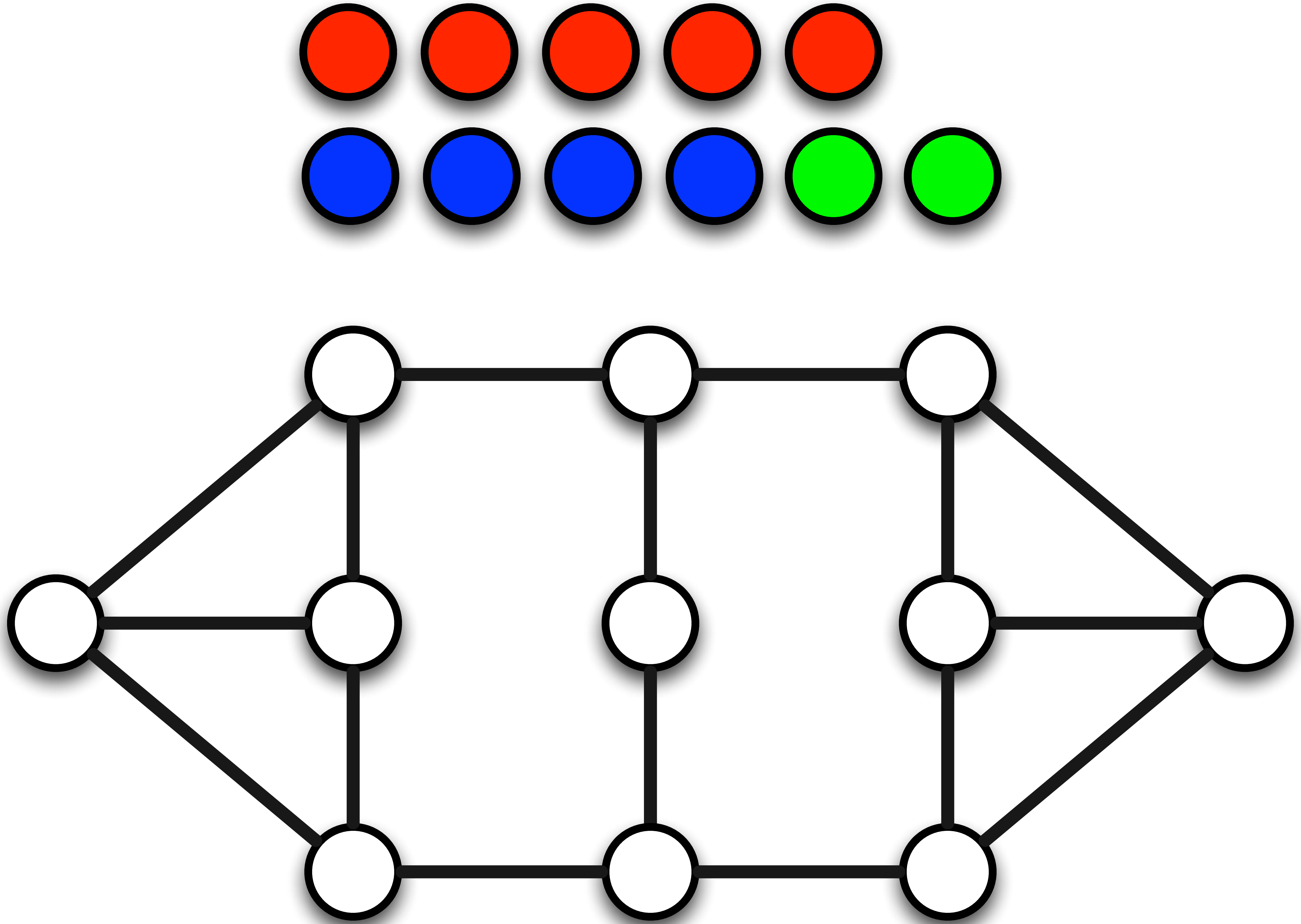


Jeu 27 - Coloration des sommets

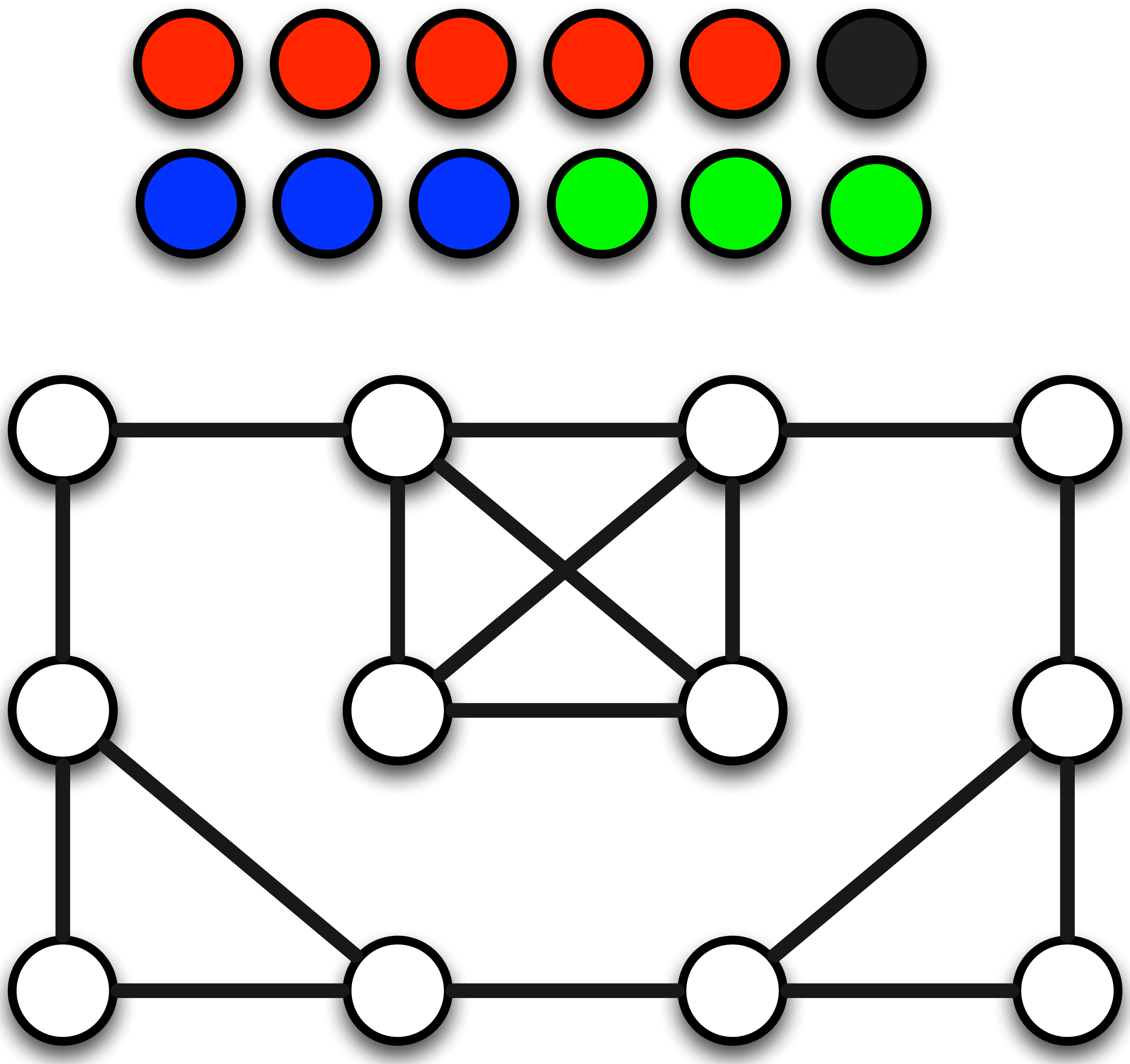




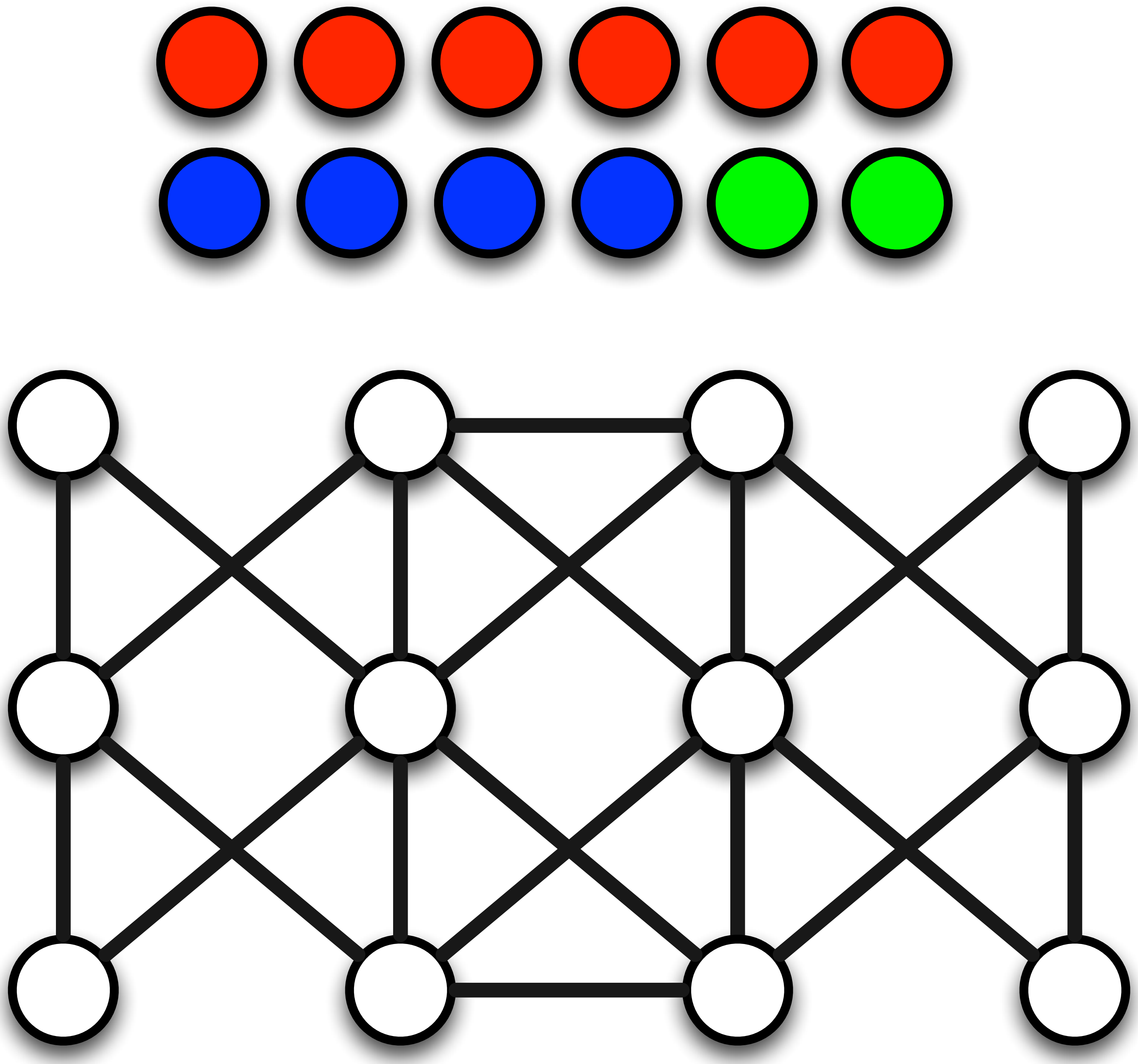
Jeu 28 - Coloration des sommets



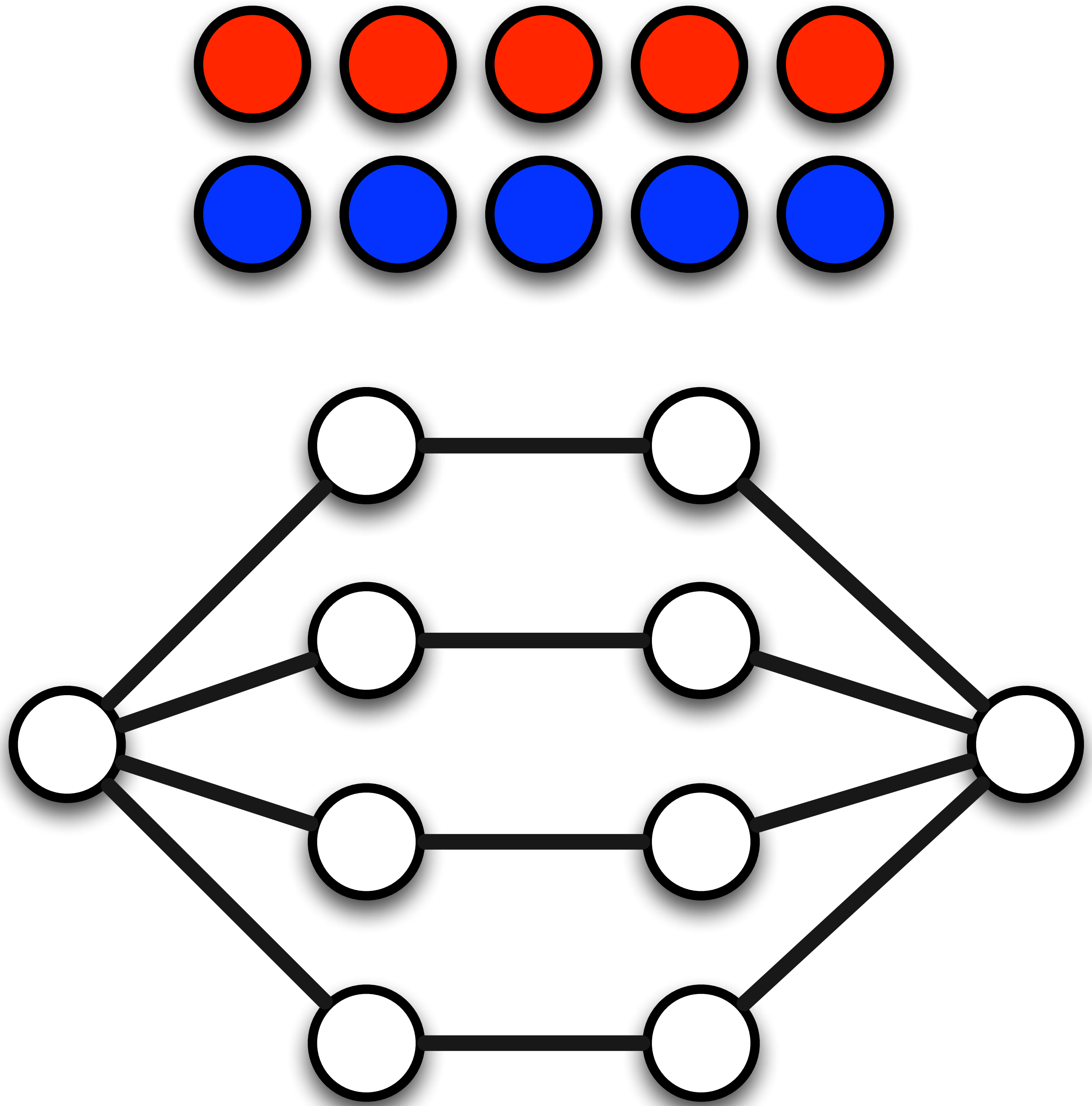
Jeu 29 - Coloration des sommets



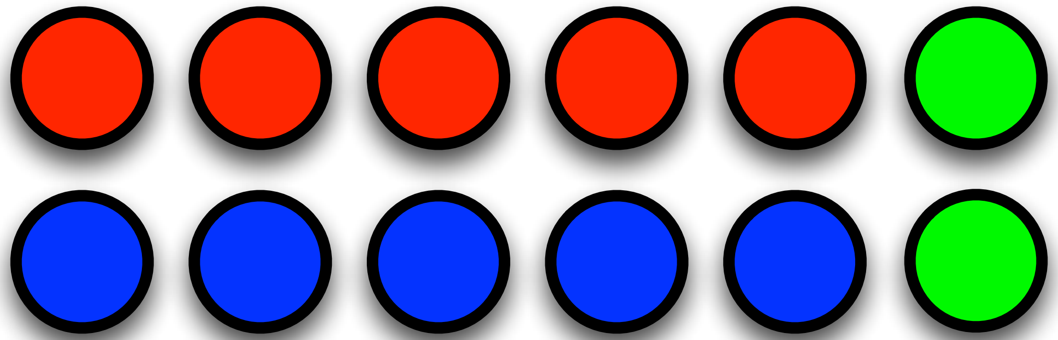
Jeu 30 - Coloration des sommets

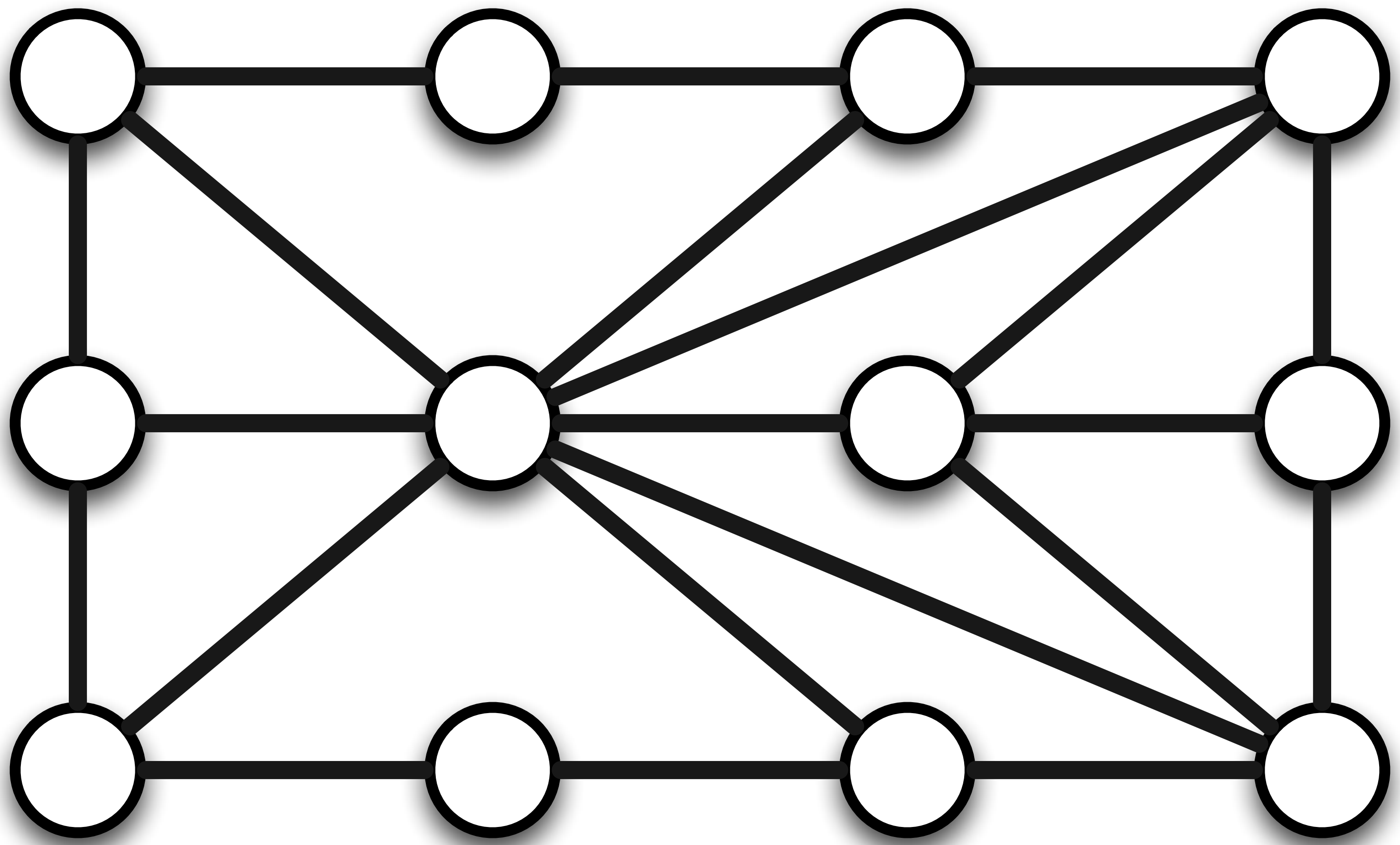


Jeu 31 - Coloration des sommets

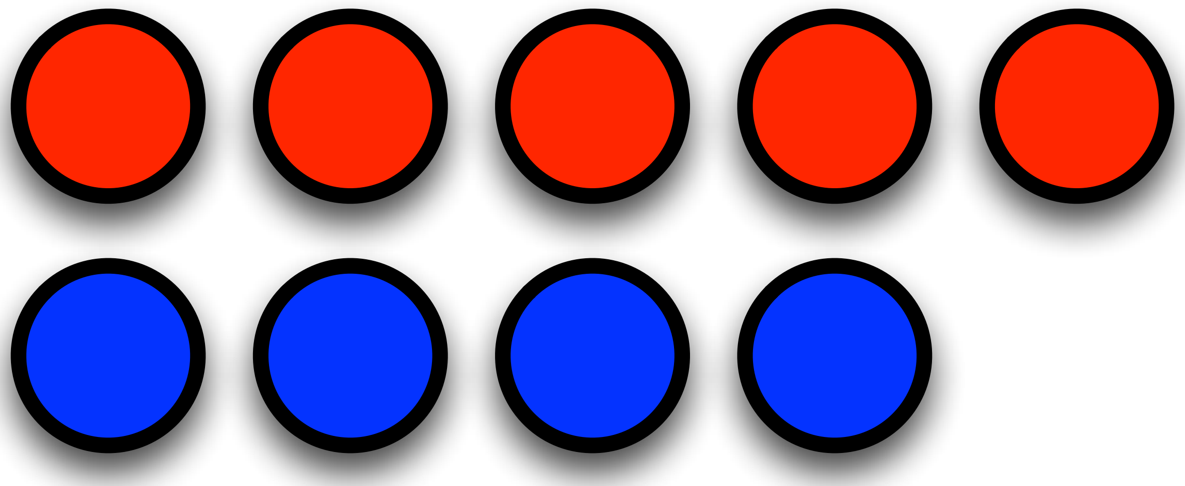


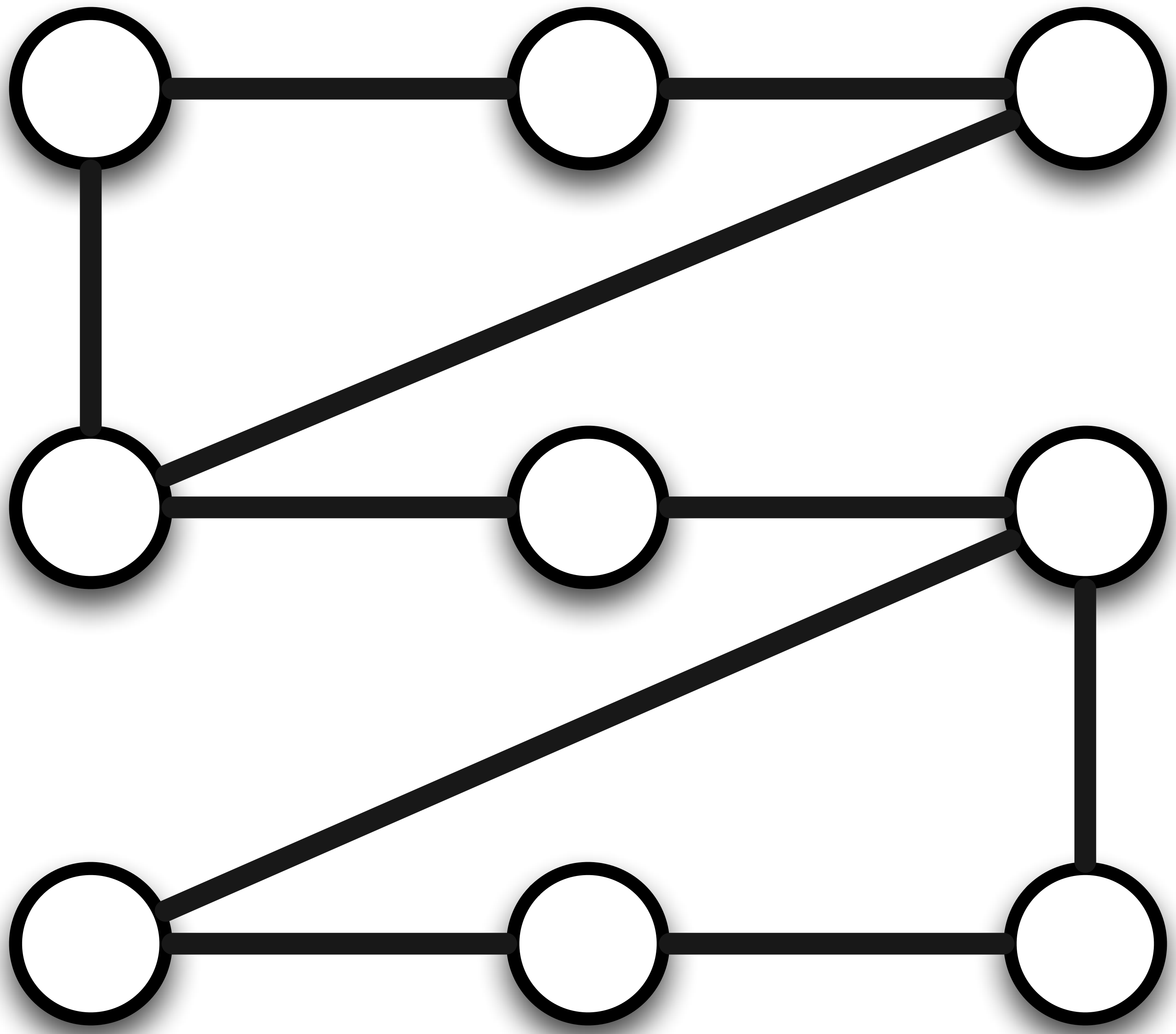
Jeu 32 - Coloration des sommets



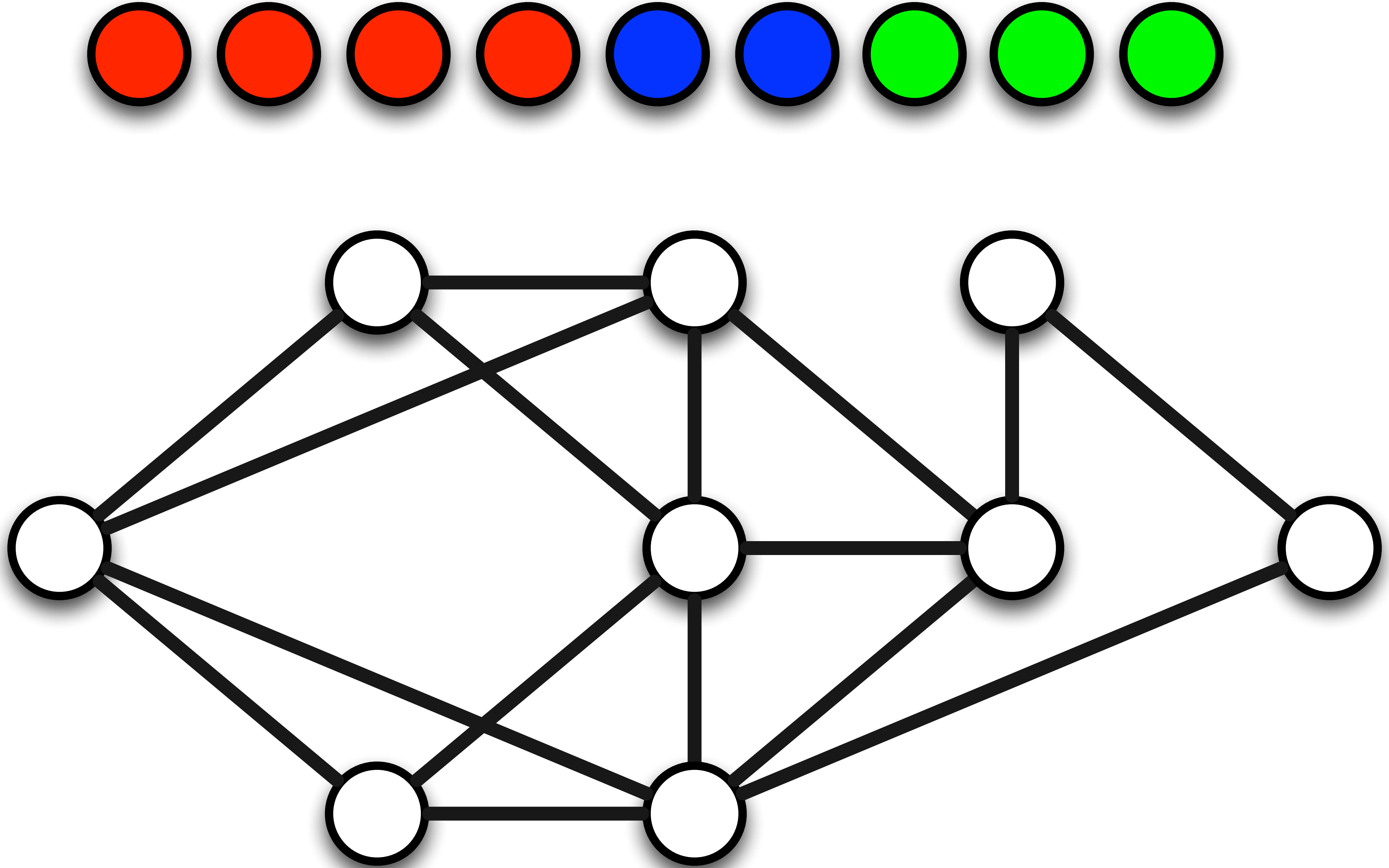


Jeu 33 - Coloration des sommets

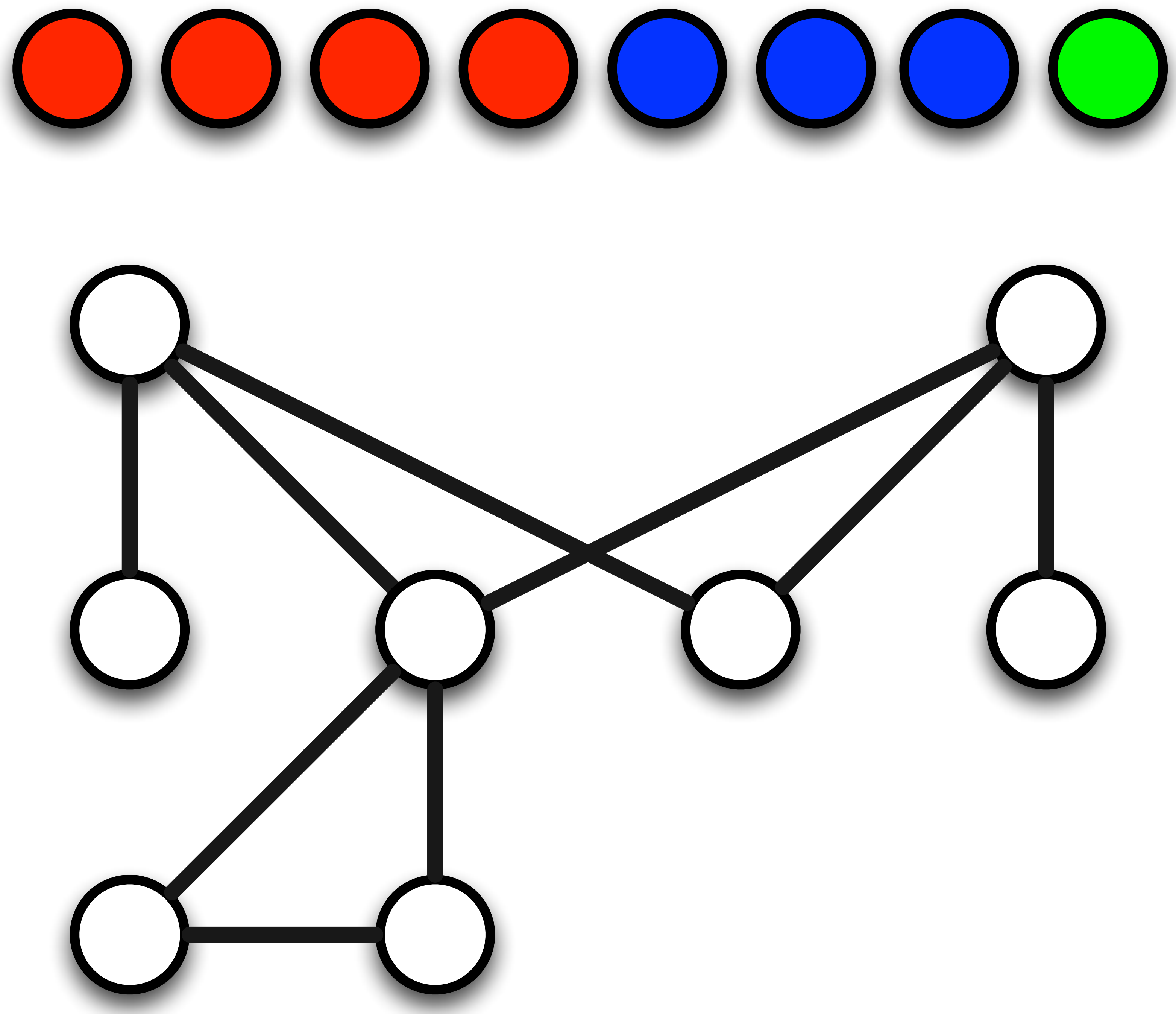




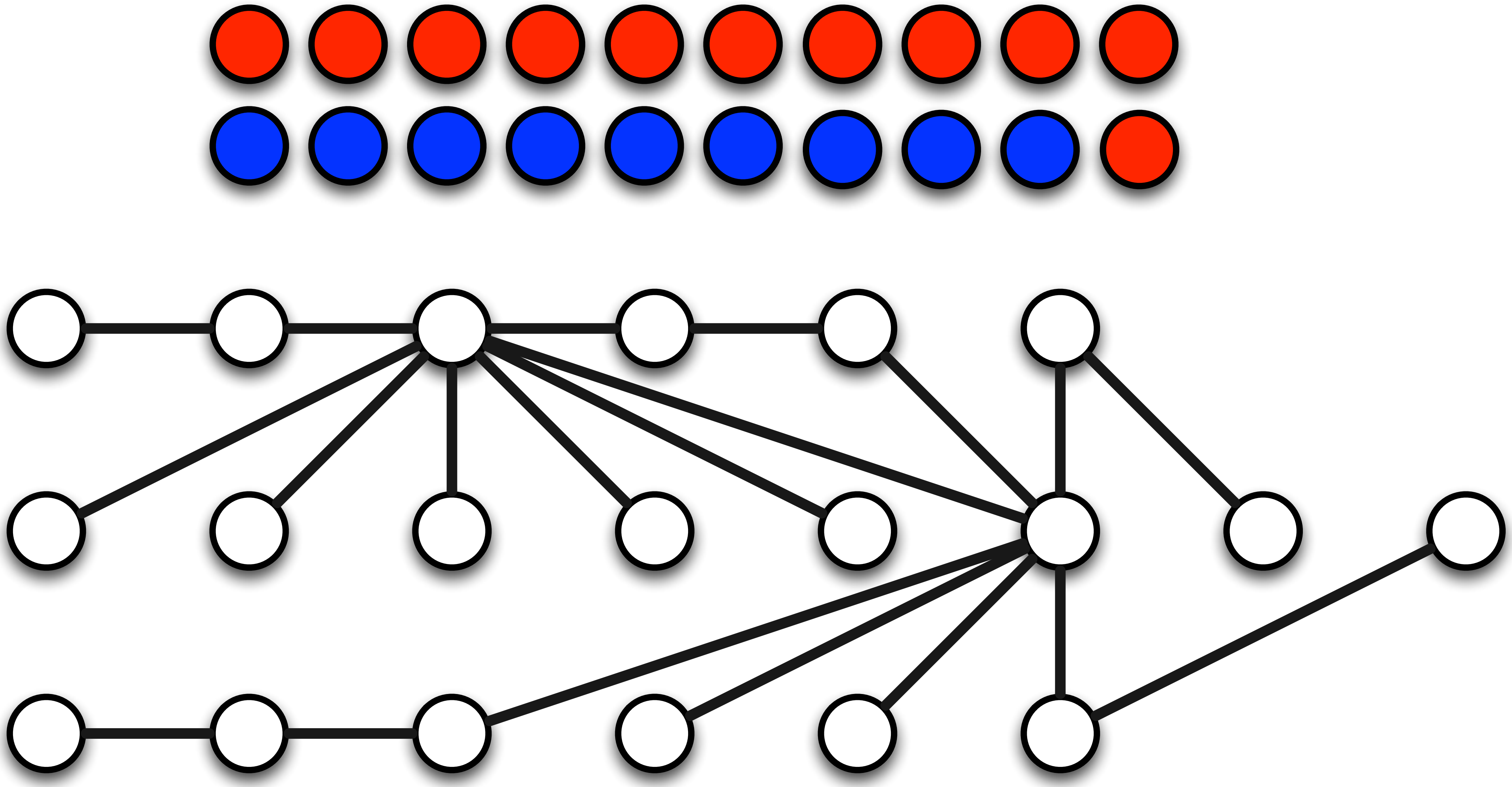
Jeu 34 - Coloration des sommets



Jeu 35 - Coloration des sommets

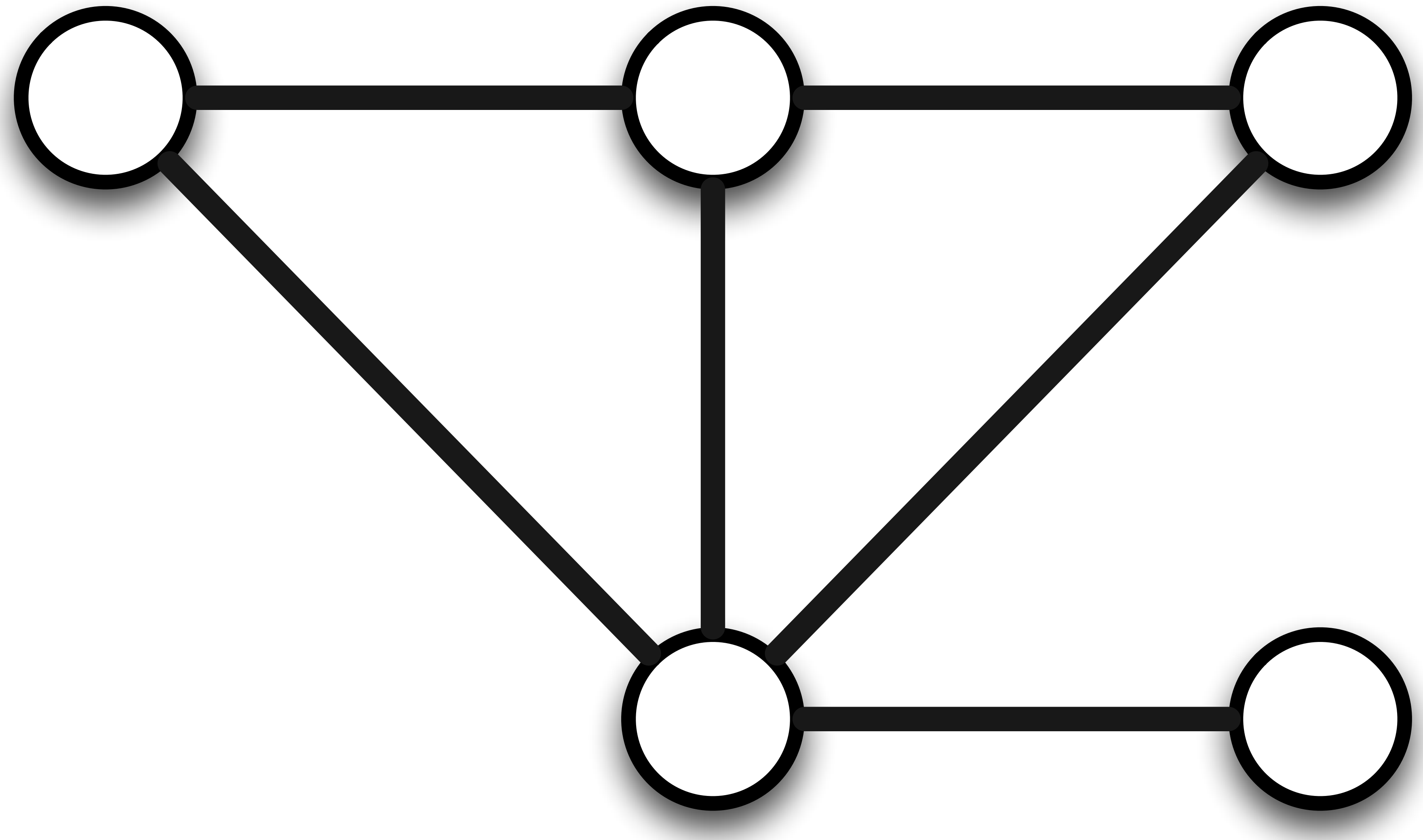


Jeu 36 - Coloration des sommets



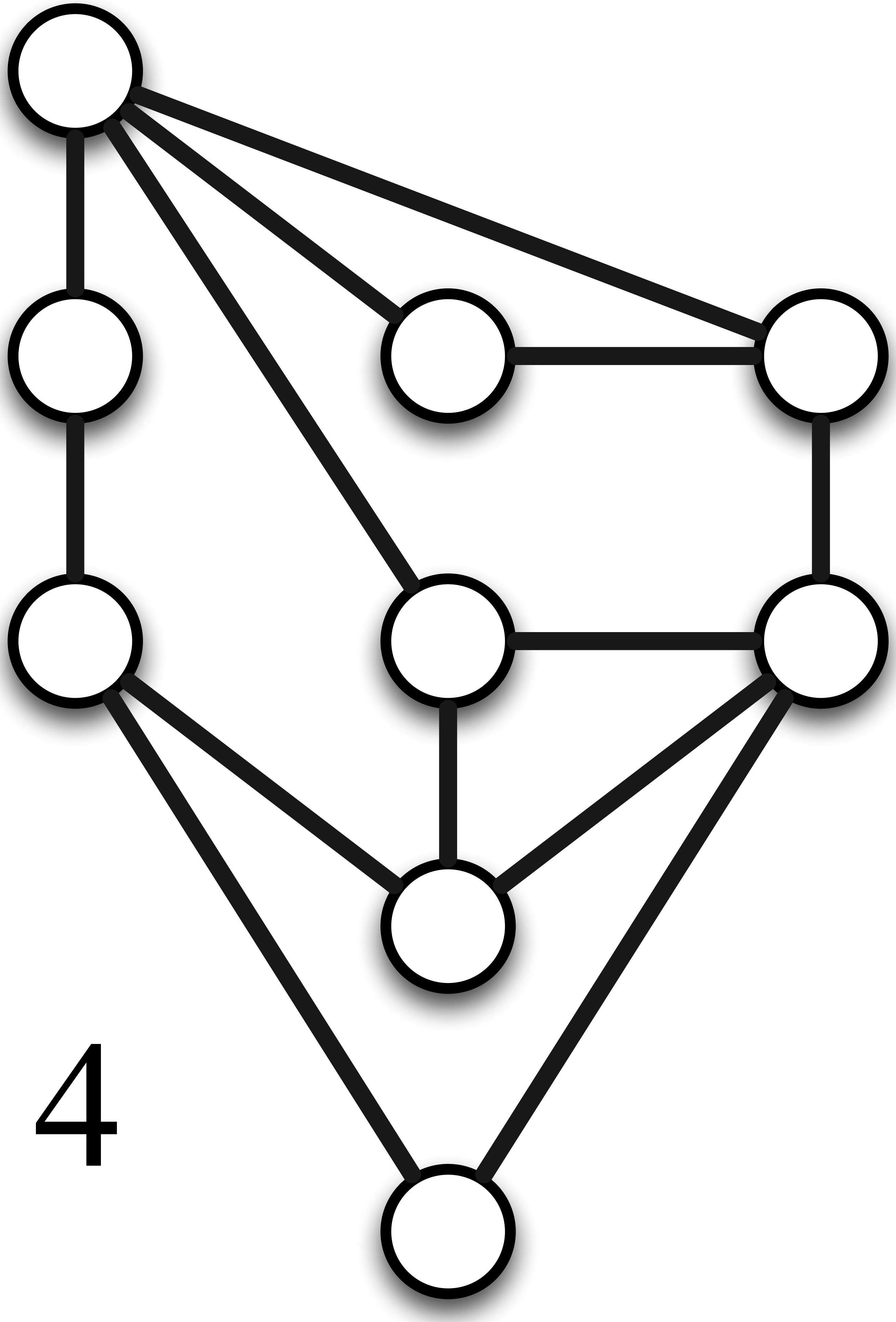
6.2 Les sommets veulent leur indépendance

Jeu 1 - Les sommets veulent leur indépendance



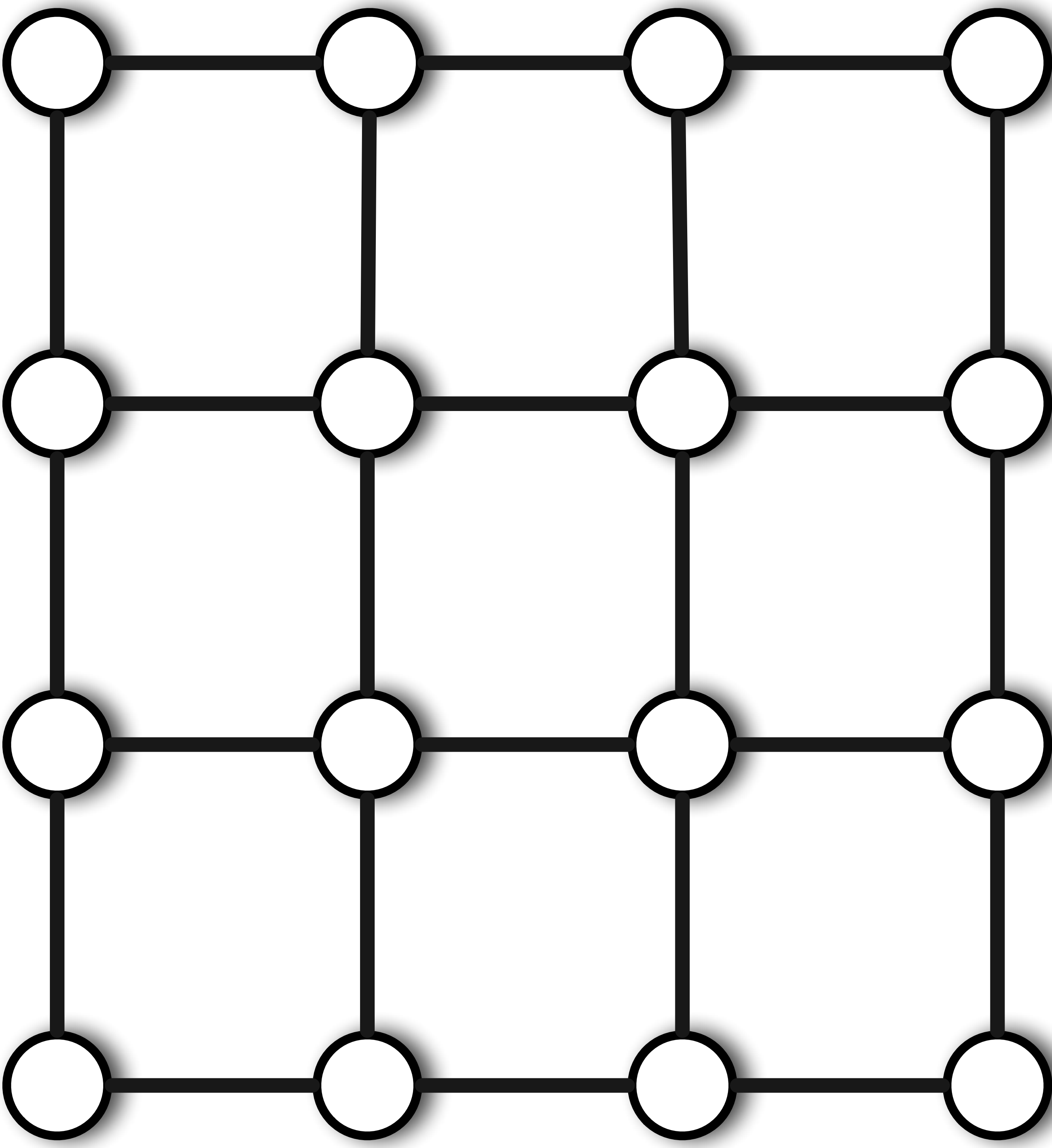
3

Jeu 2 - Les sommets veulent leur indépendance



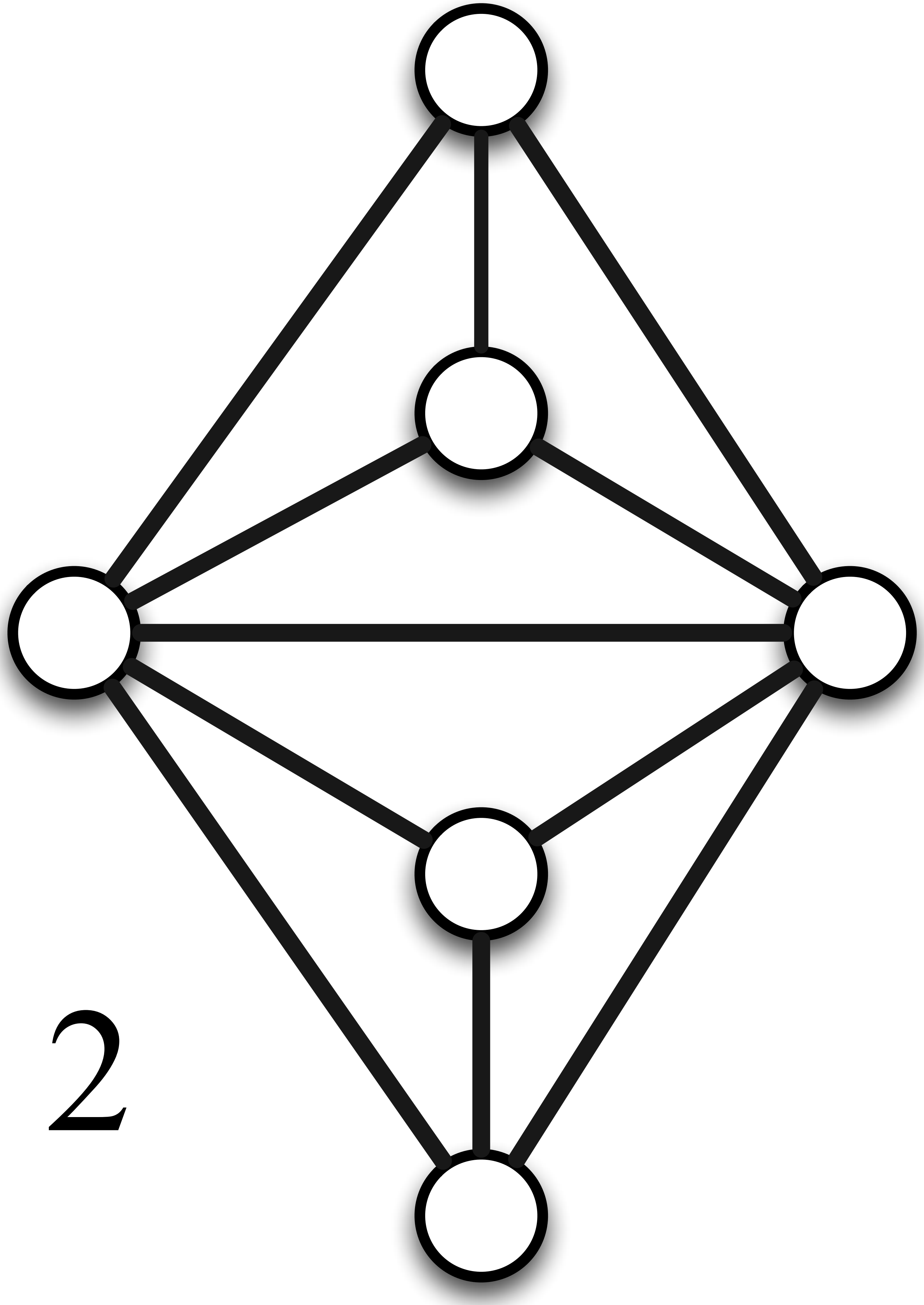
4

Jeu 3 - Les sommets veulent leur indépendance



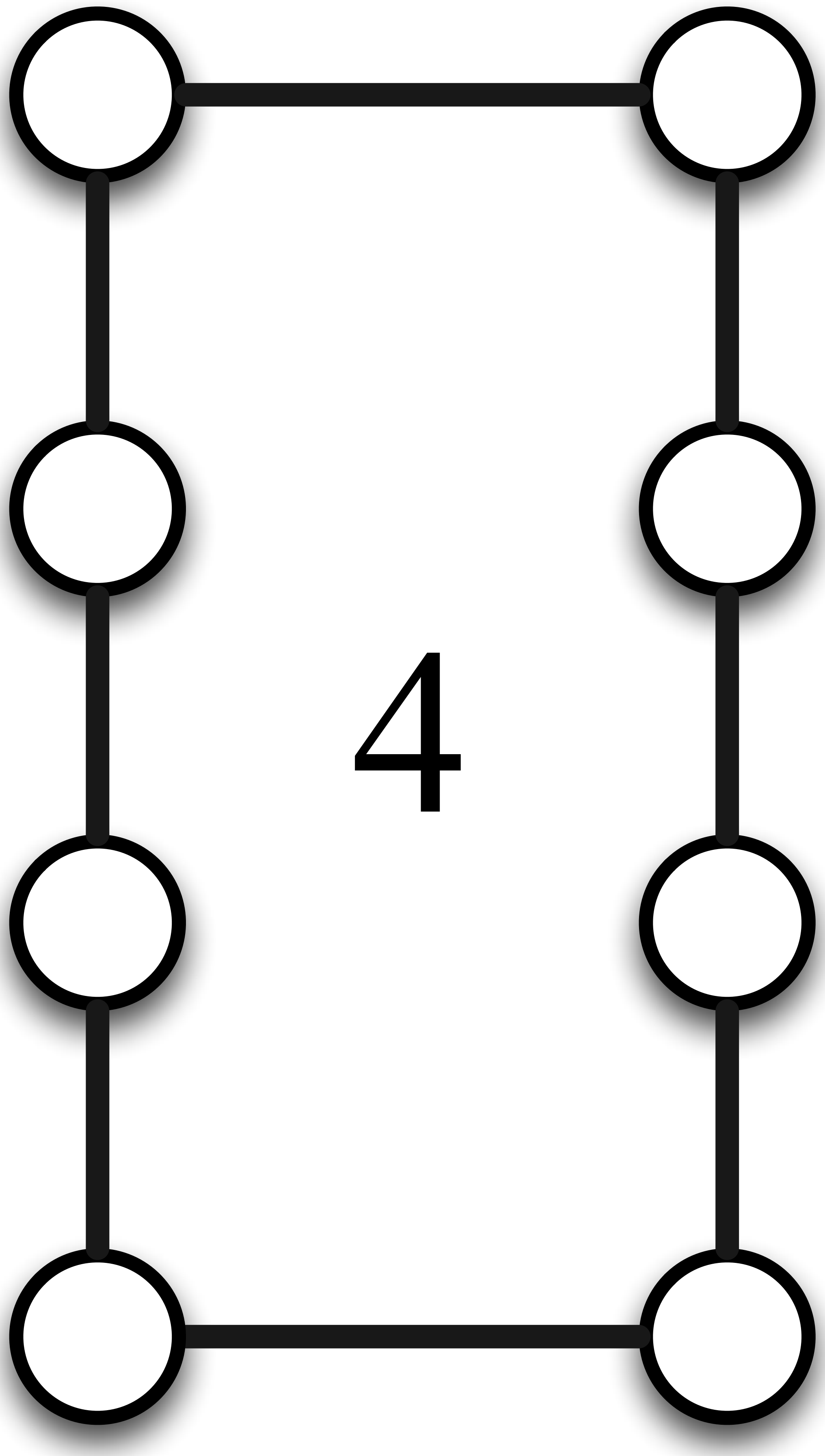
∞

Jeu 4 - Les sommets veulent leur indépendance

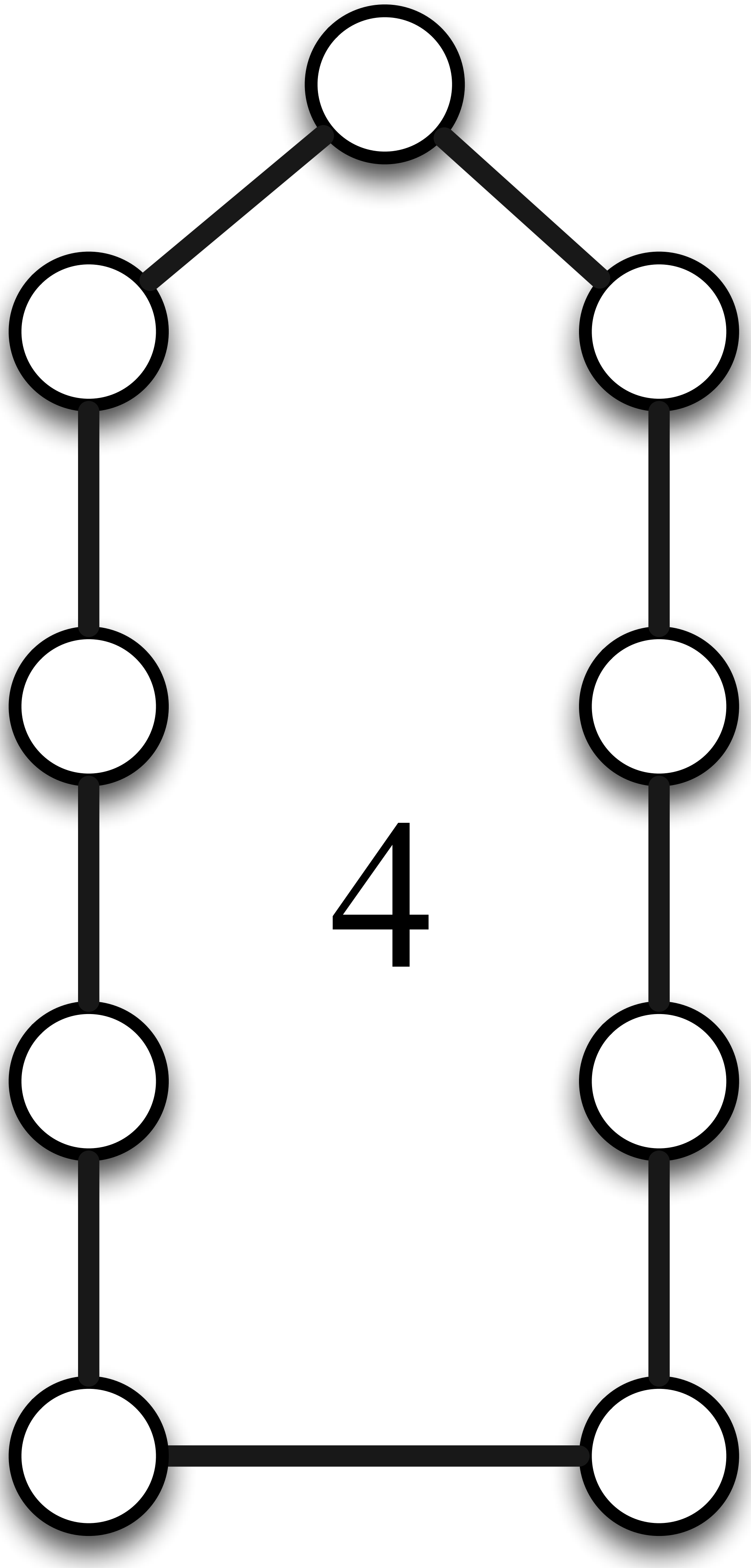


2

Jeu 5 - Les sommets veulent leur indépendance

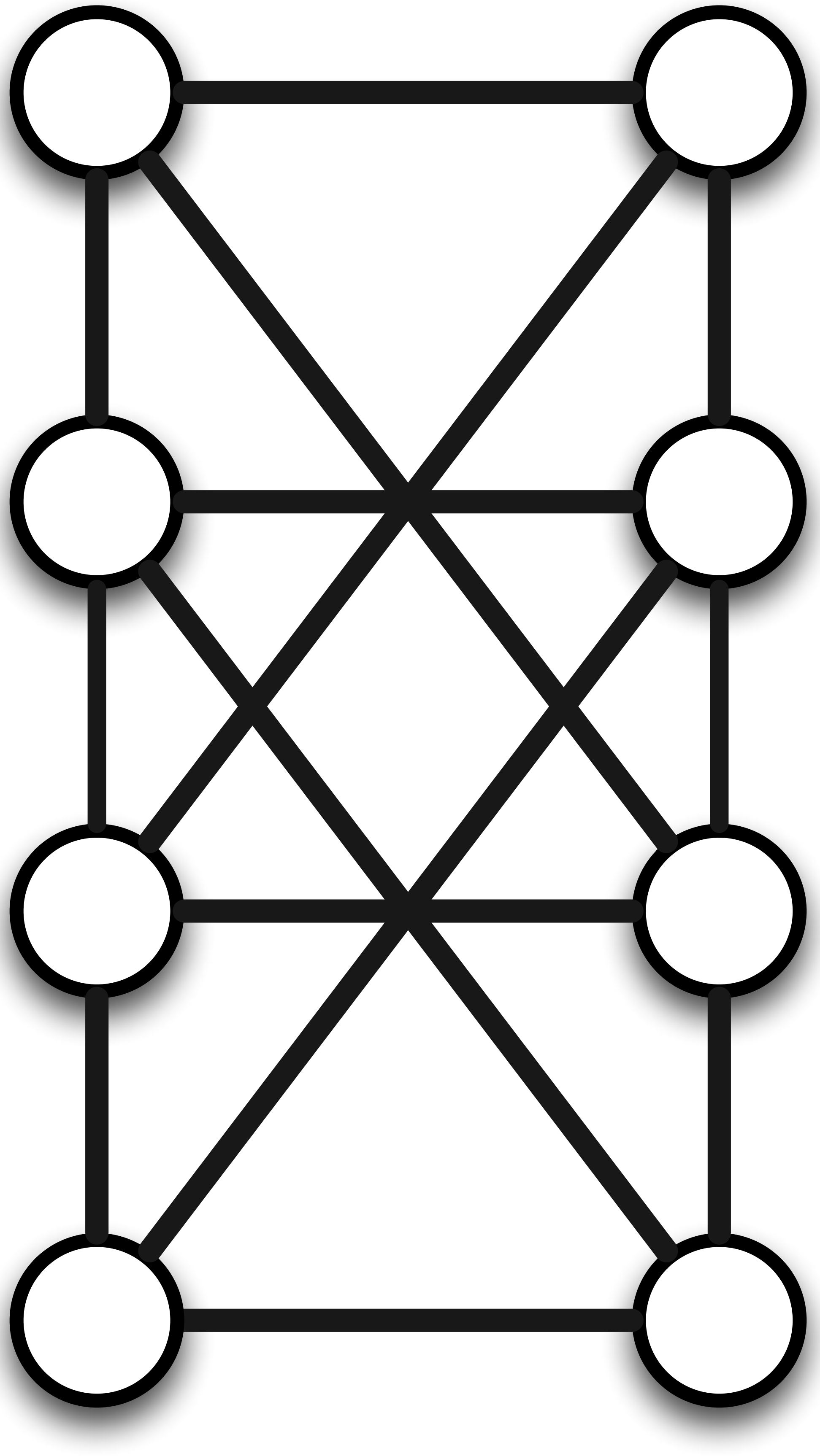


Jeu 6 - Les sommets veulent leur indépendance

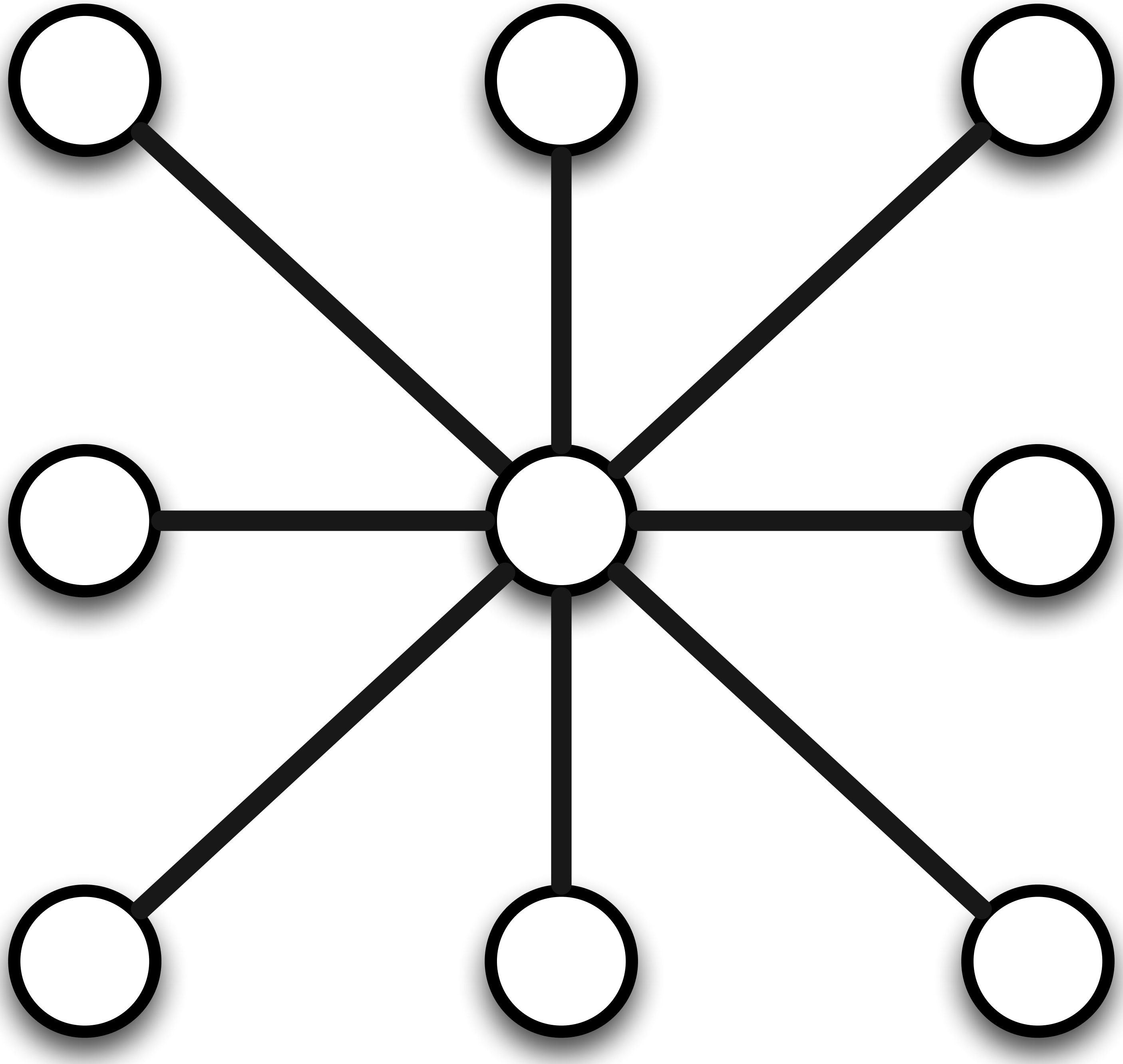


Jeu 7 - Les sommets veulent leur indépendance

4

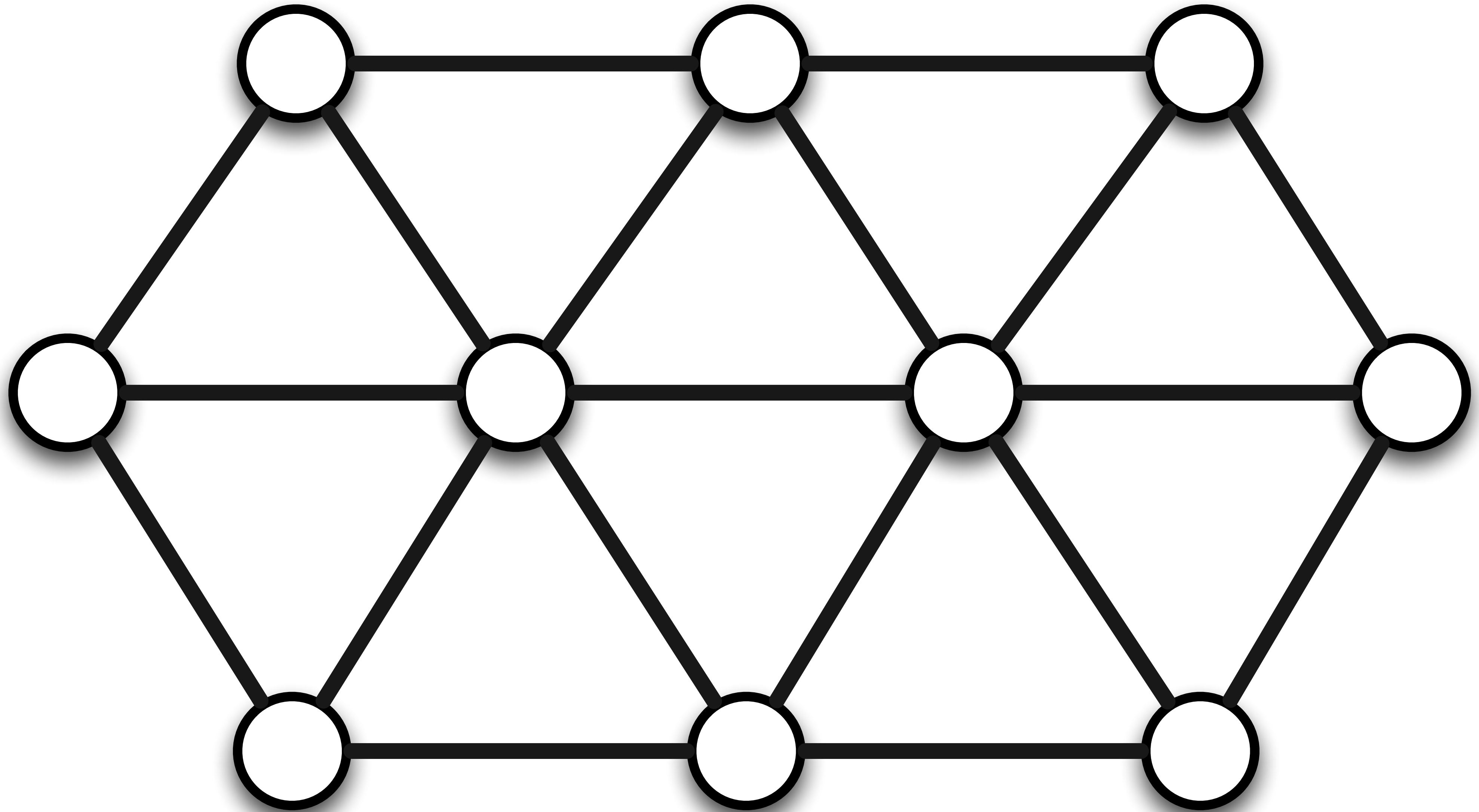


Jeu 8 - Les sommets veulent leur indépendance



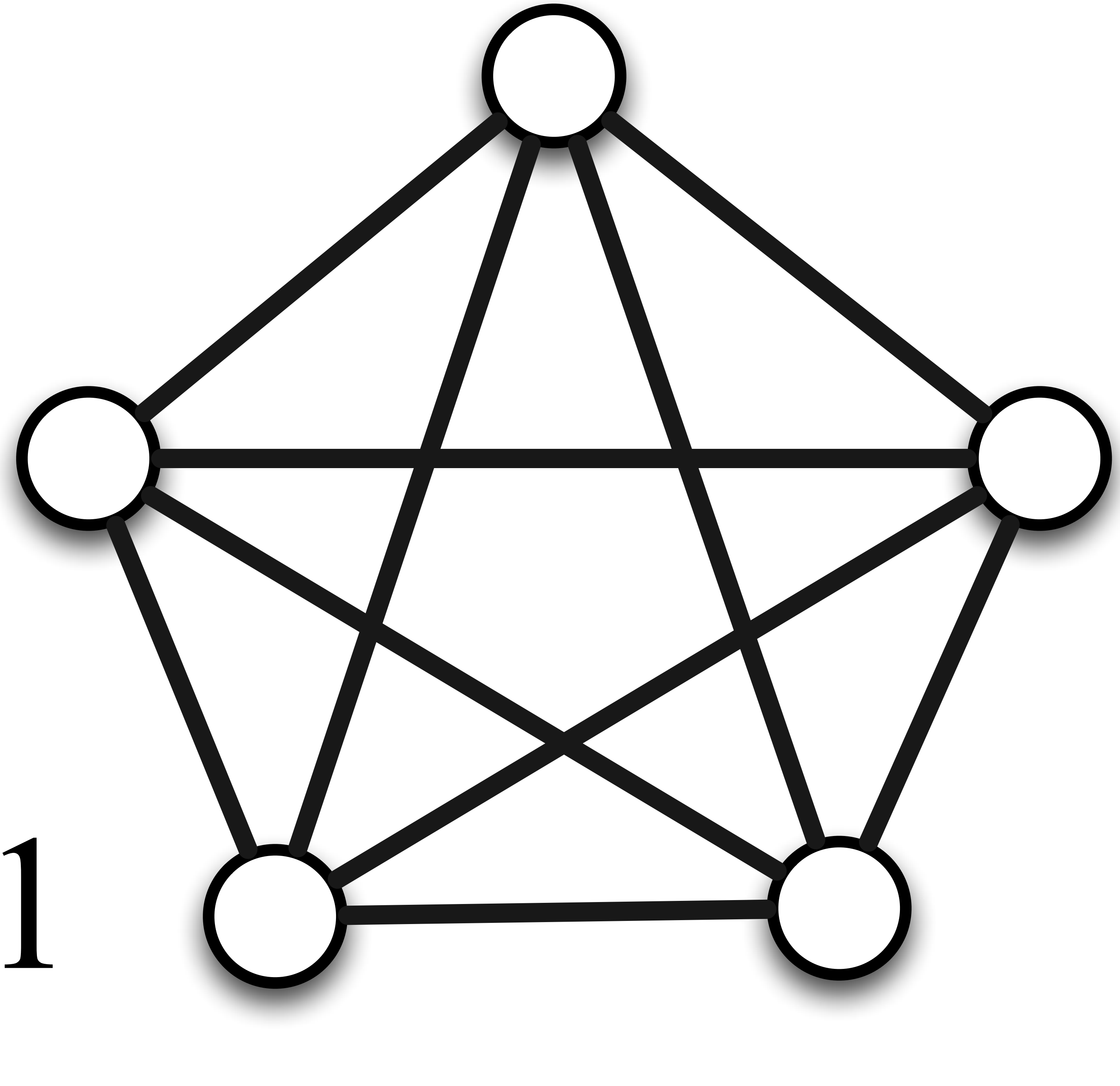
8

Jeu 9 - Les sommets veulent leur indépendance



4

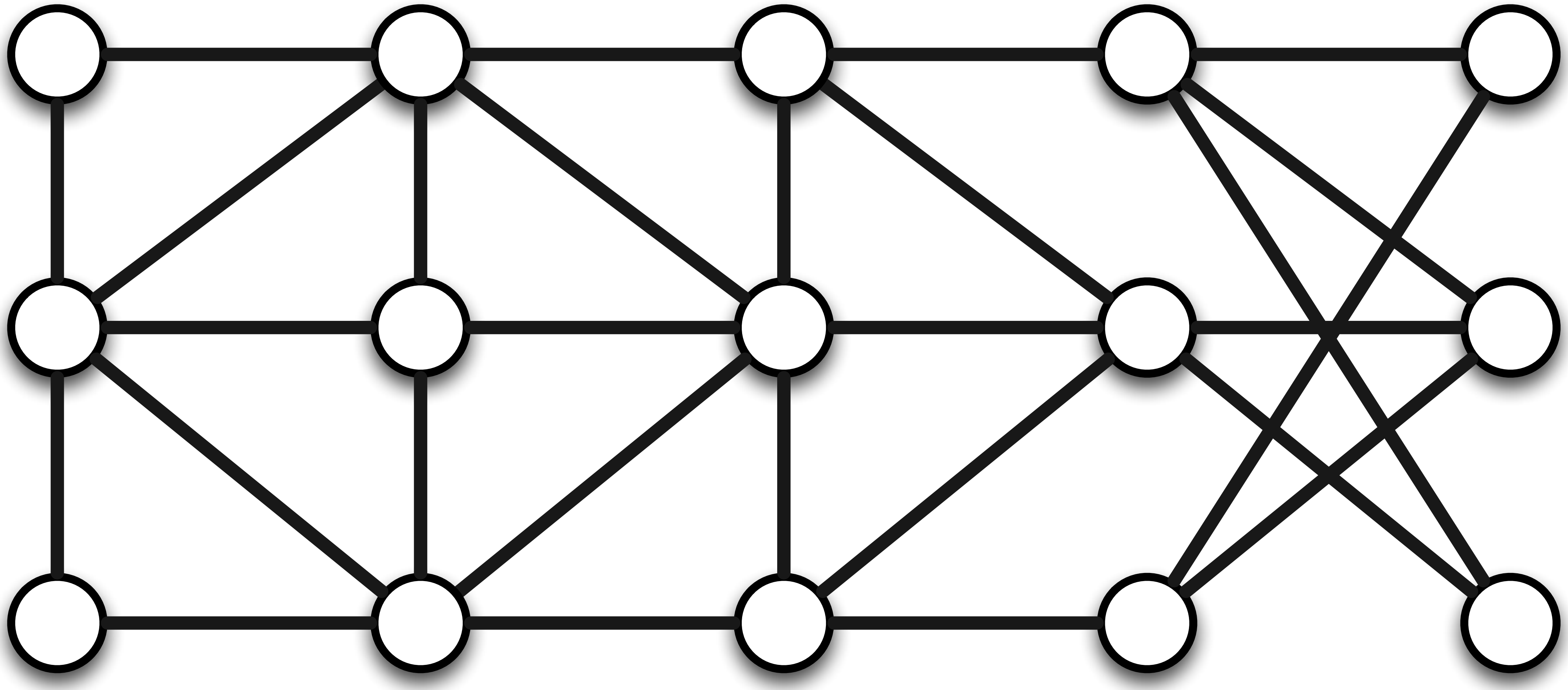
Jeu 10 - Les sommets veulent leur indépendance



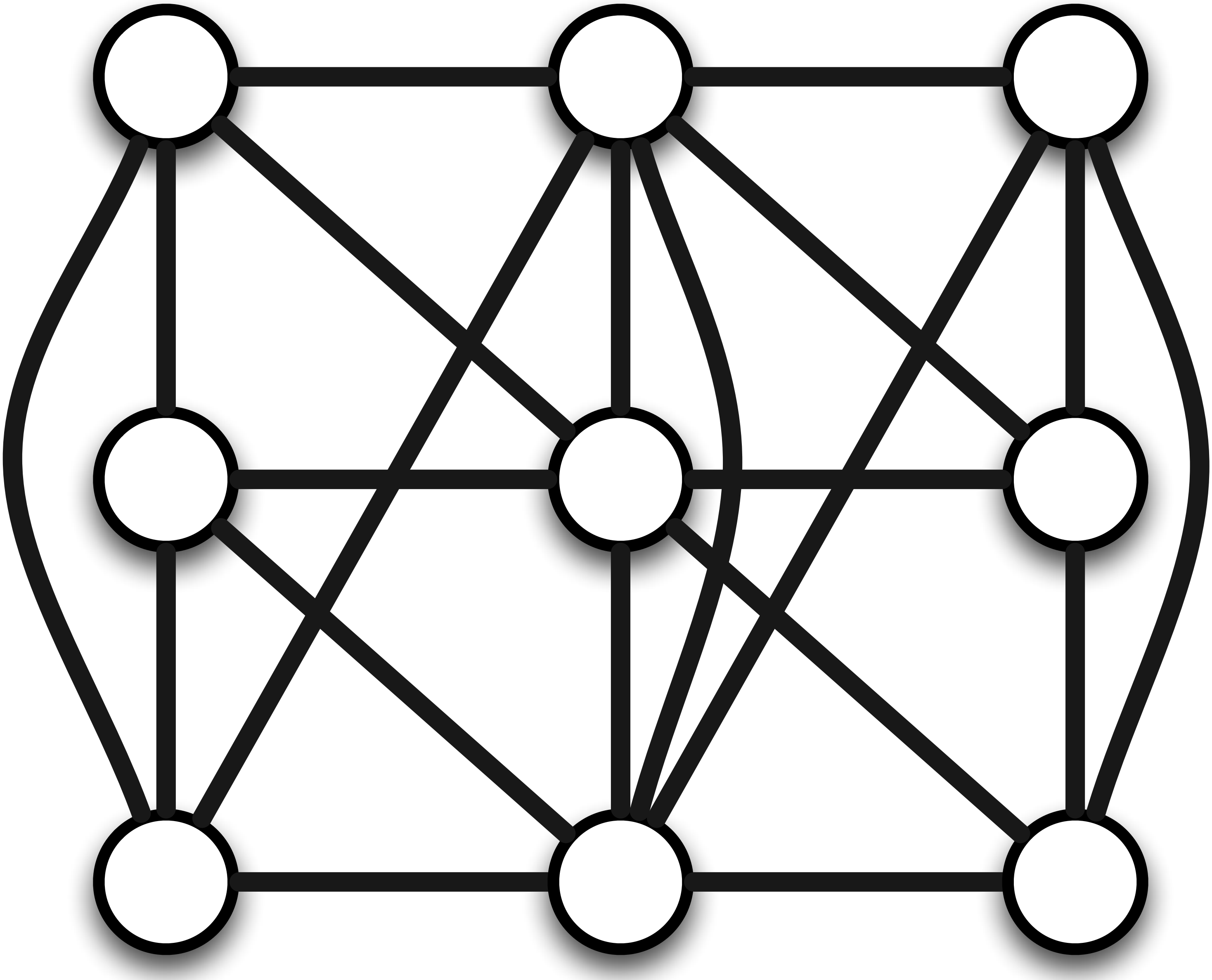
1

8

Jeu 11 - Les sommets veulent leur indépendance

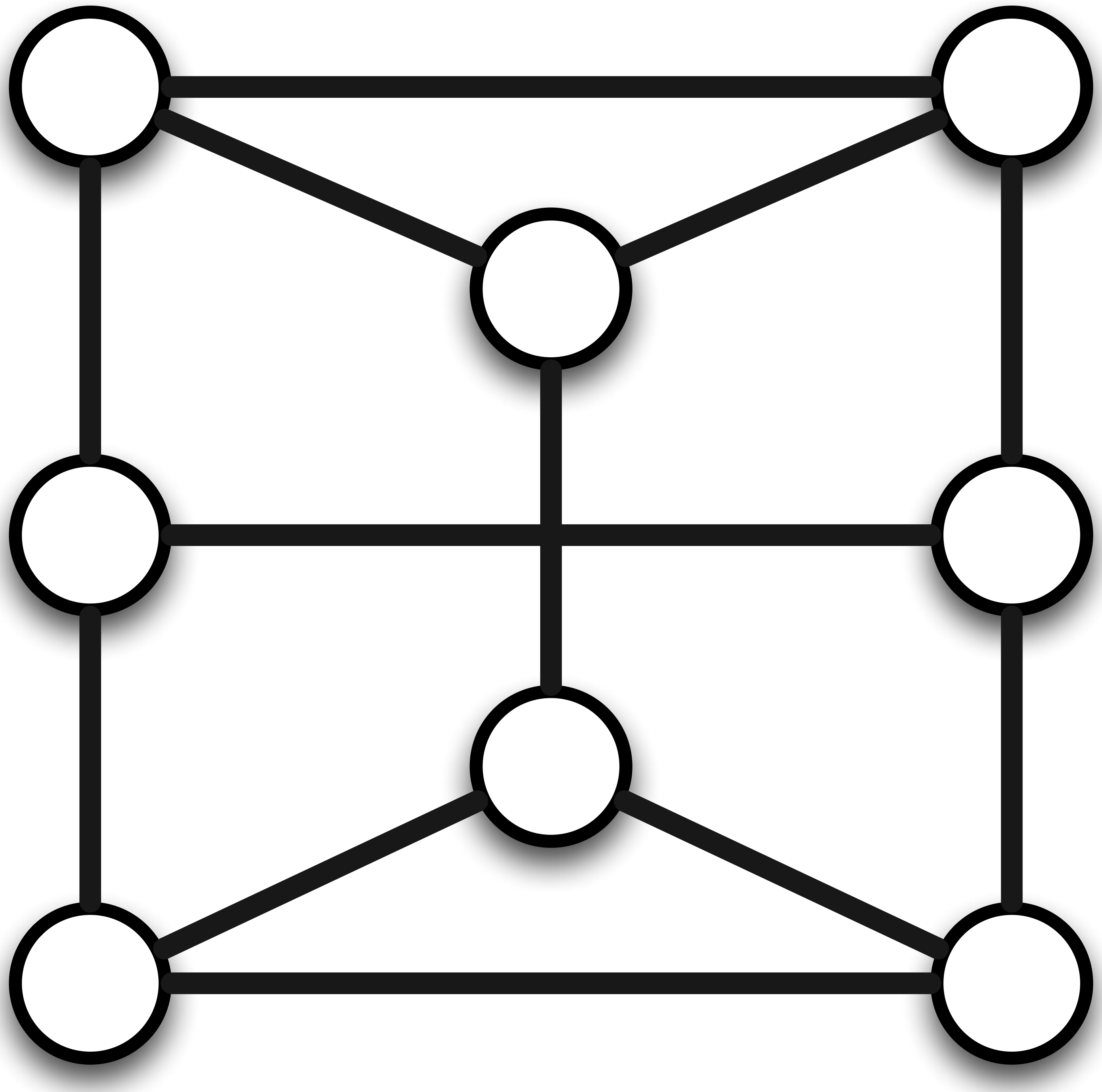


Jeu 12 - Les sommets veulent leur indépendance



3

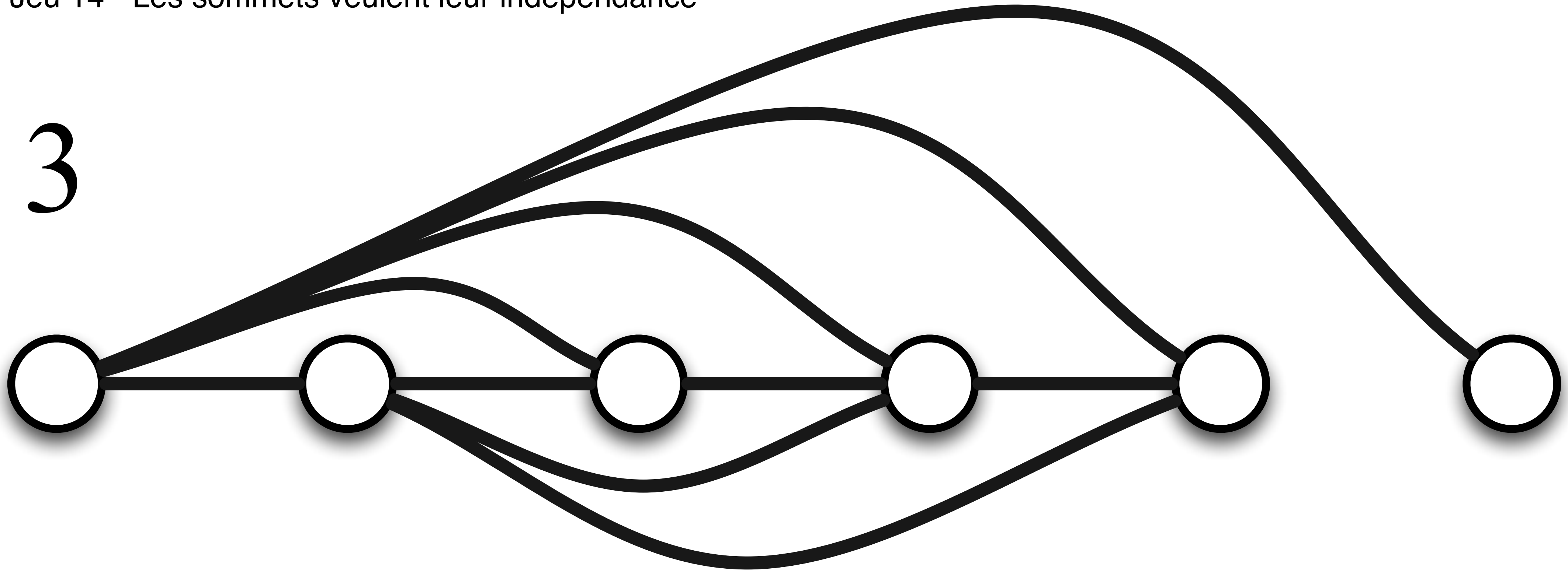
Jeu 13 - Les sommets veulent leur indépendance



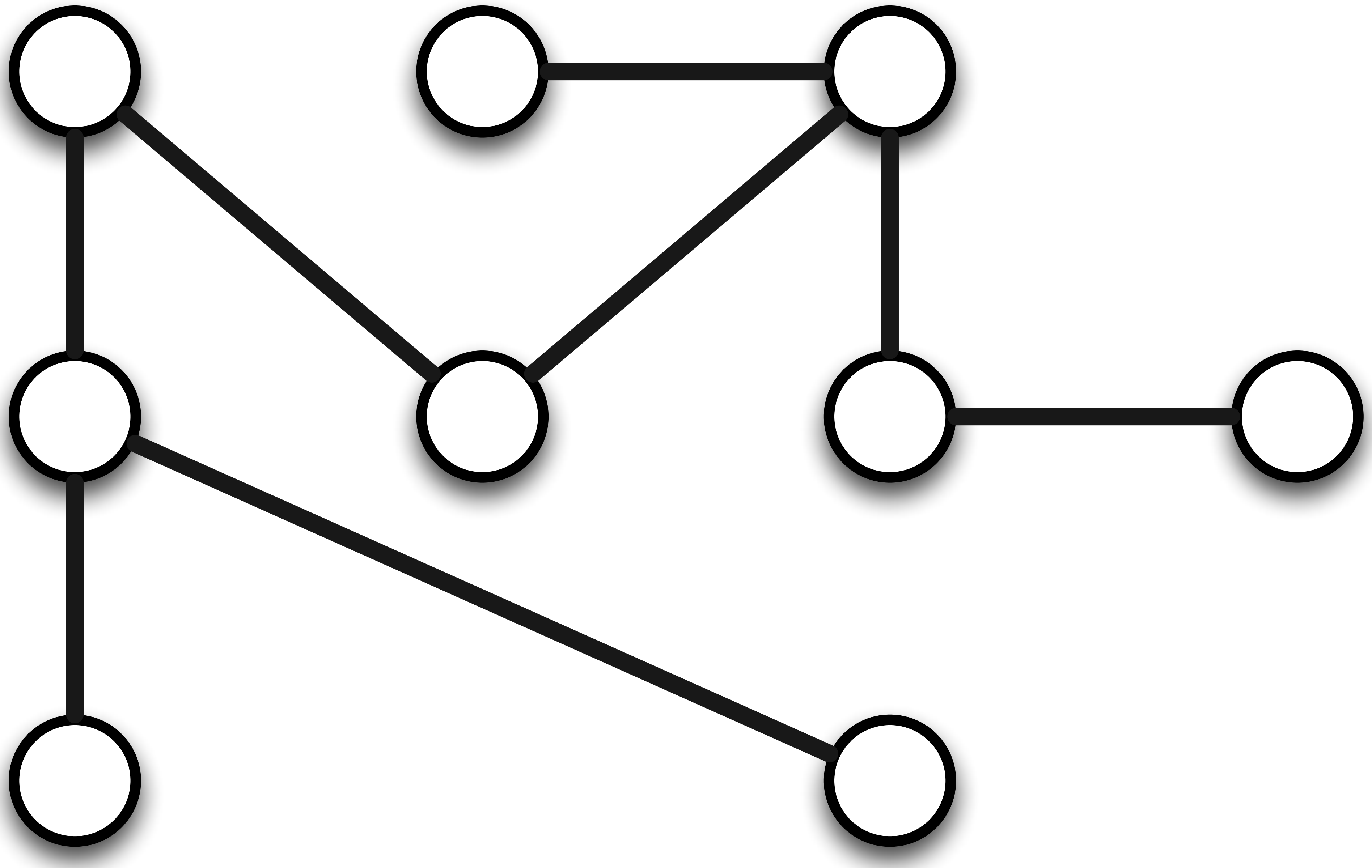
3

Jeu 14 - Les sommets veulent leur indépendance

3

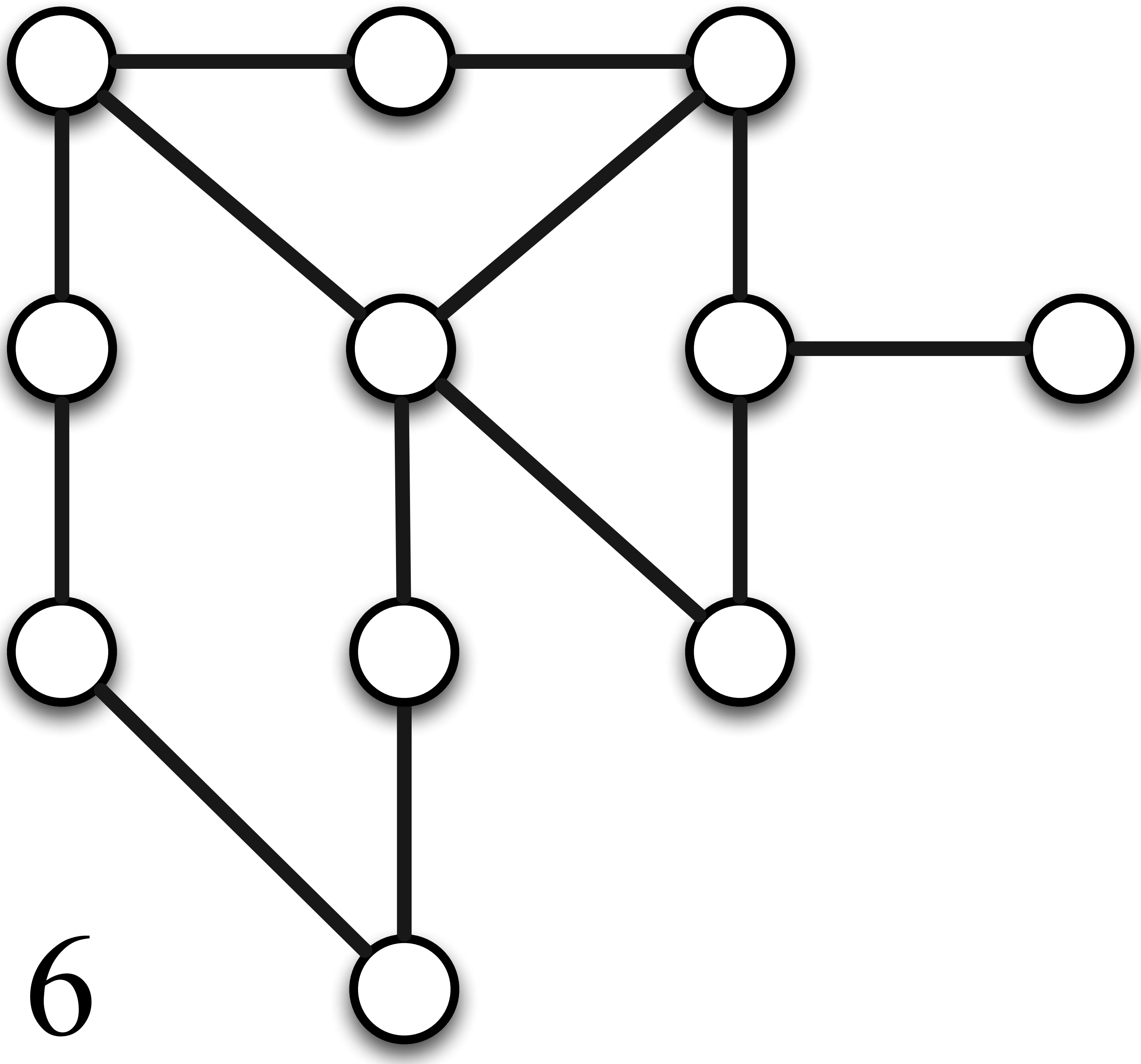


Jeu 15 - Les sommets veulent leur indépendance



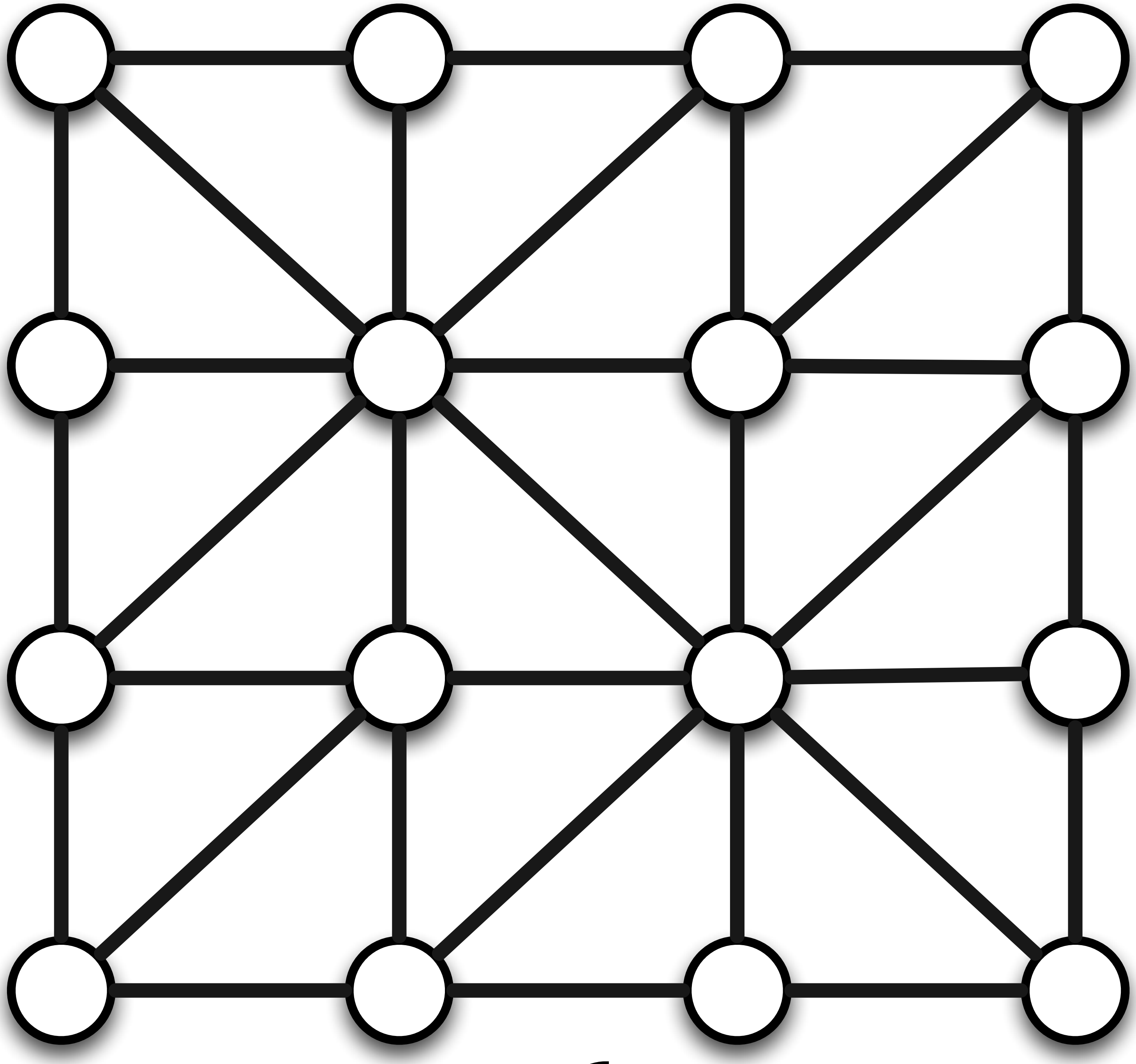
5

Jeu 16 - Les sommets veulent leur indépendance



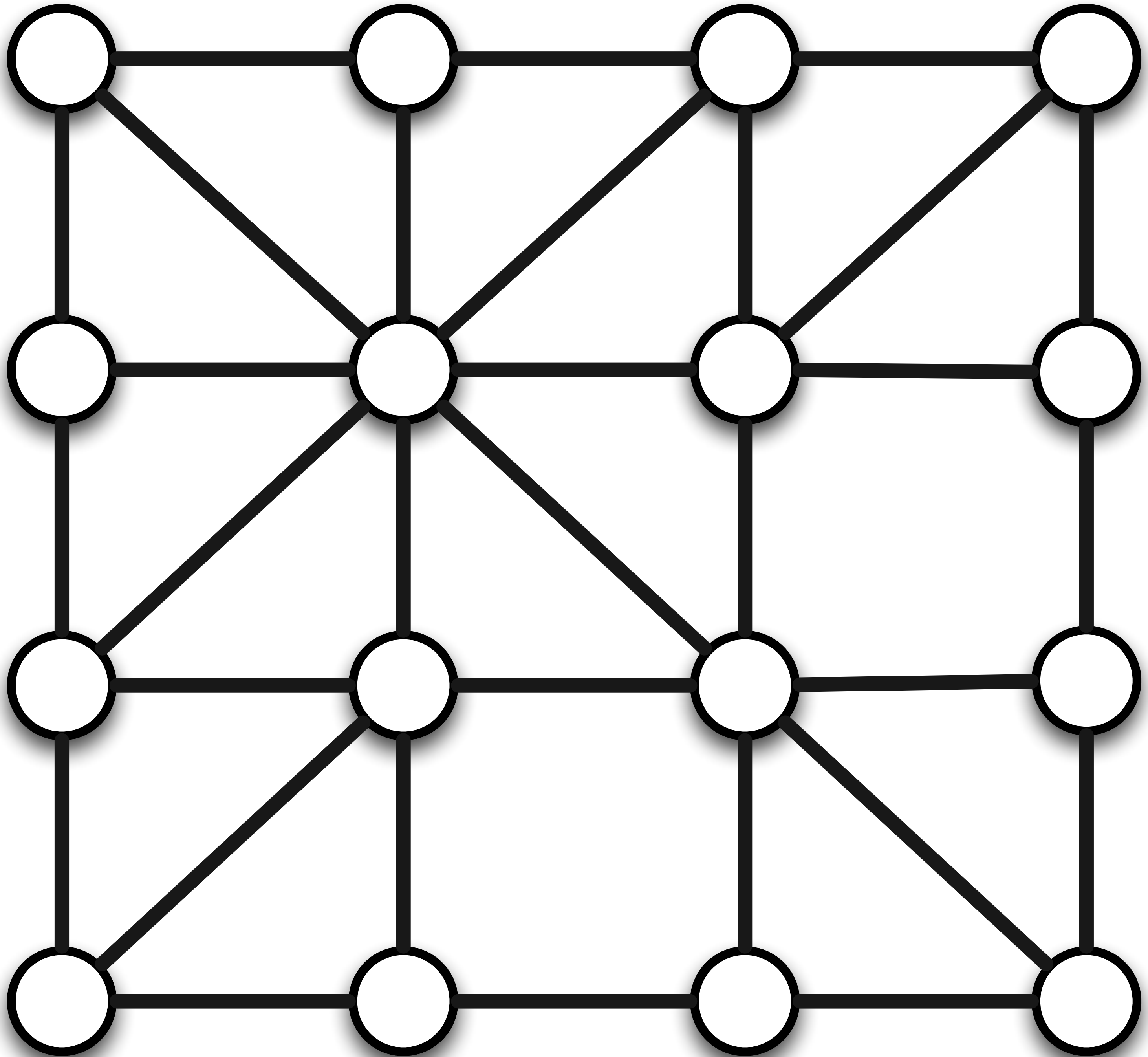
6

Jeu 17 - Les sommets veulent leur indépendance



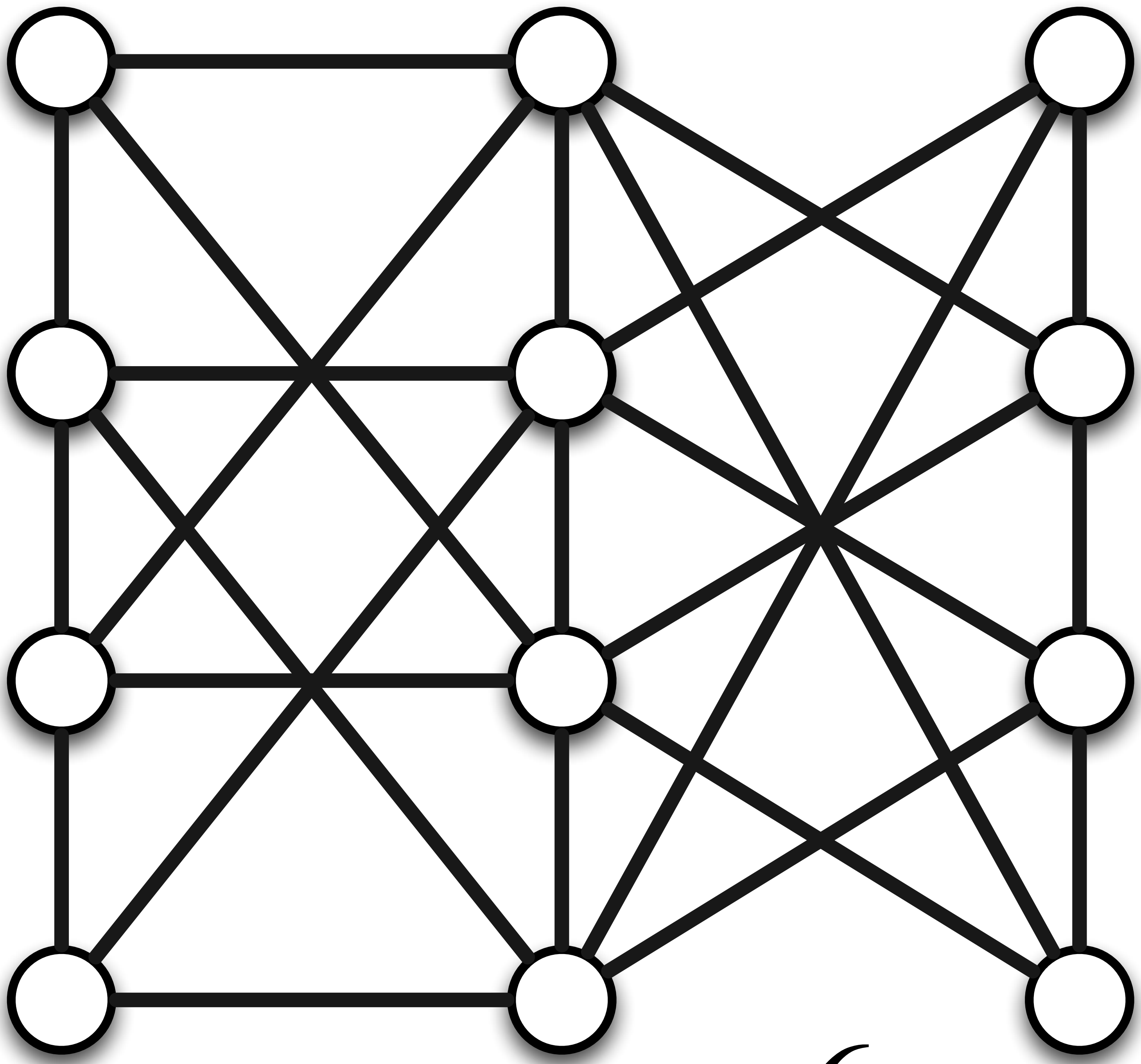
6

Jeu 18 - Les sommets veulent leur indépendance



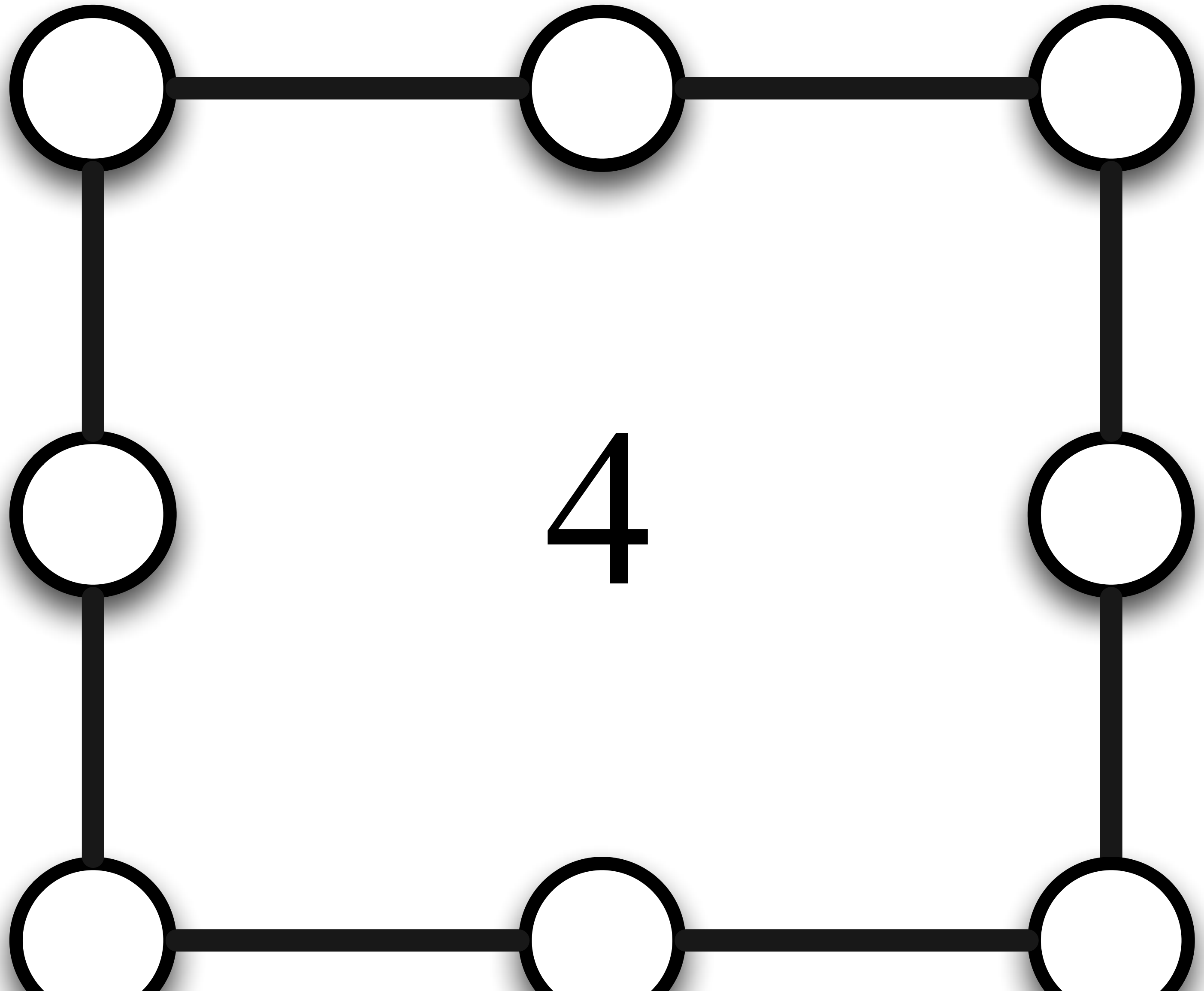
6

Jeu 19 - Les sommets veulent leur indépendance

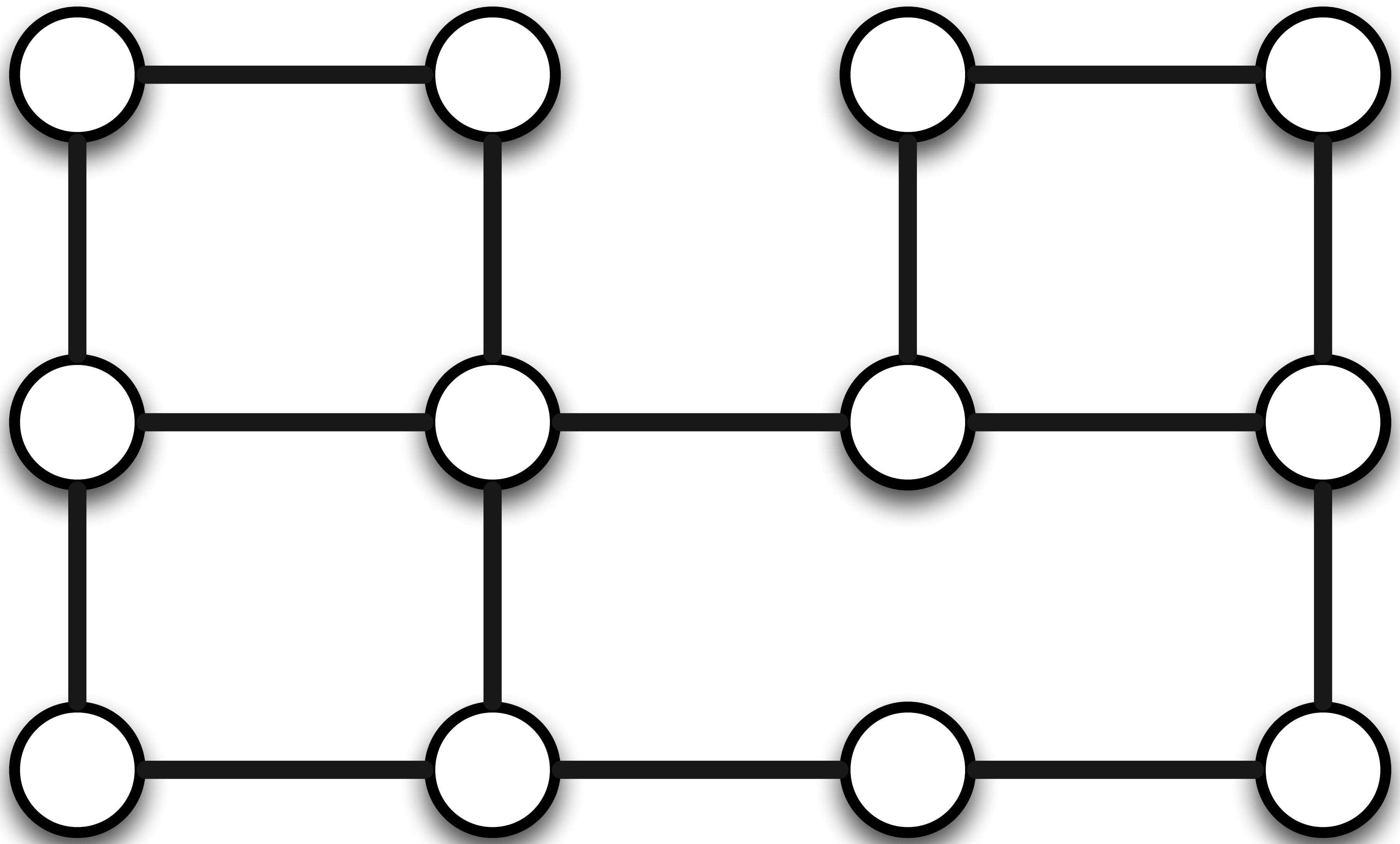


6

Jeu 20 - Les sommets veulent leur indépendance

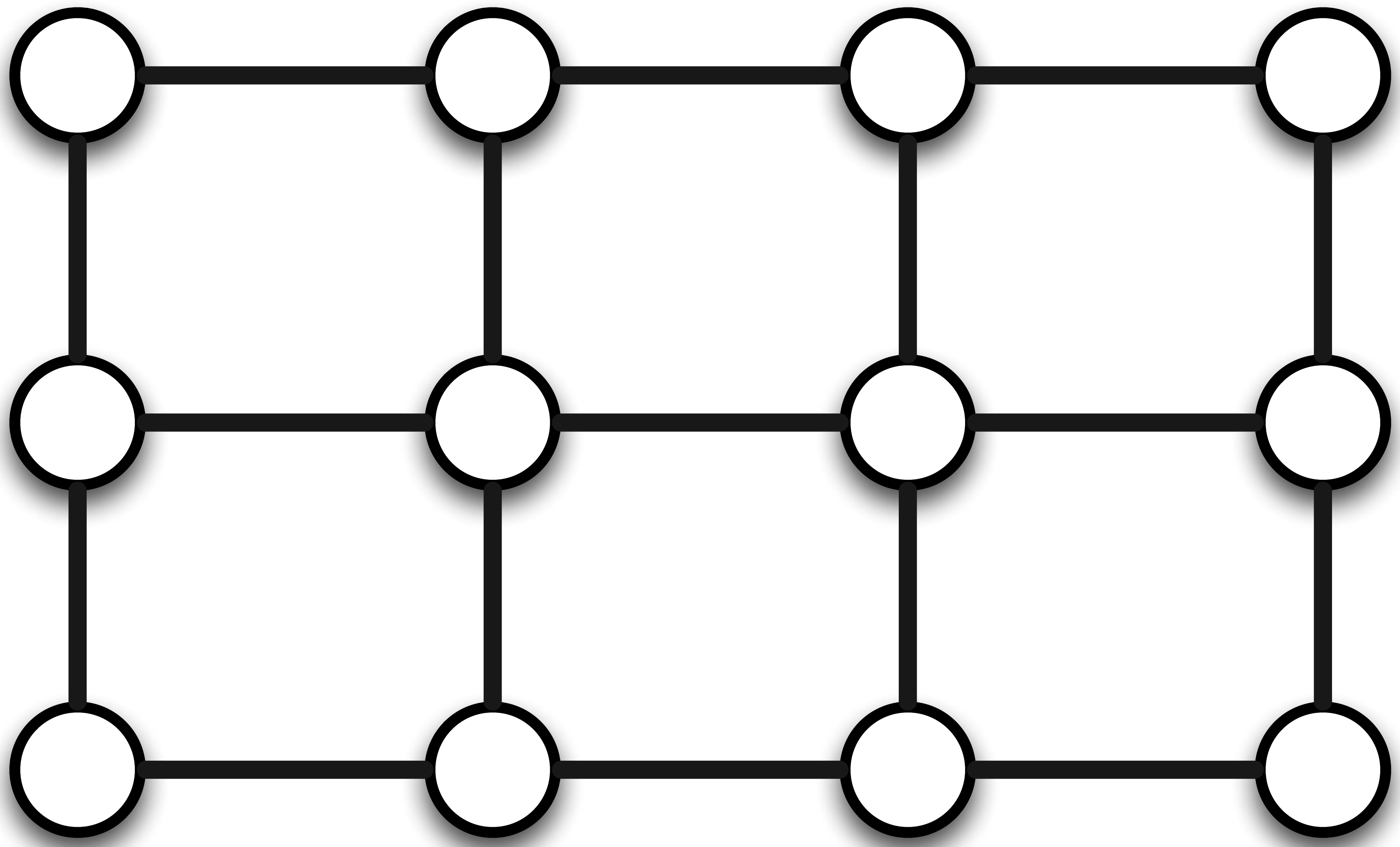


Jeu 21 - Les sommets veulent leur indépendance



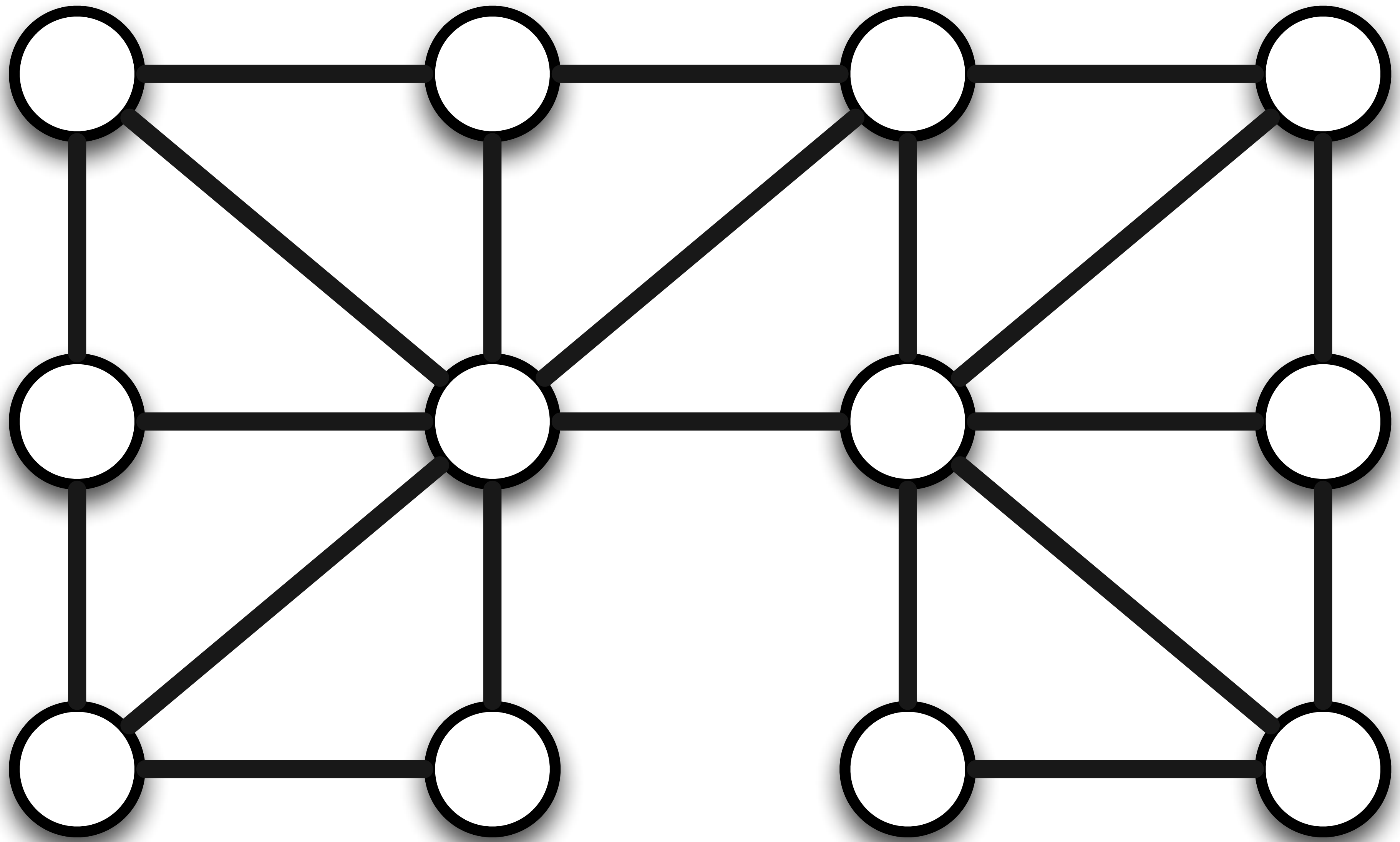
6

Jeu 22 - Les sommets veulent leur indépendance



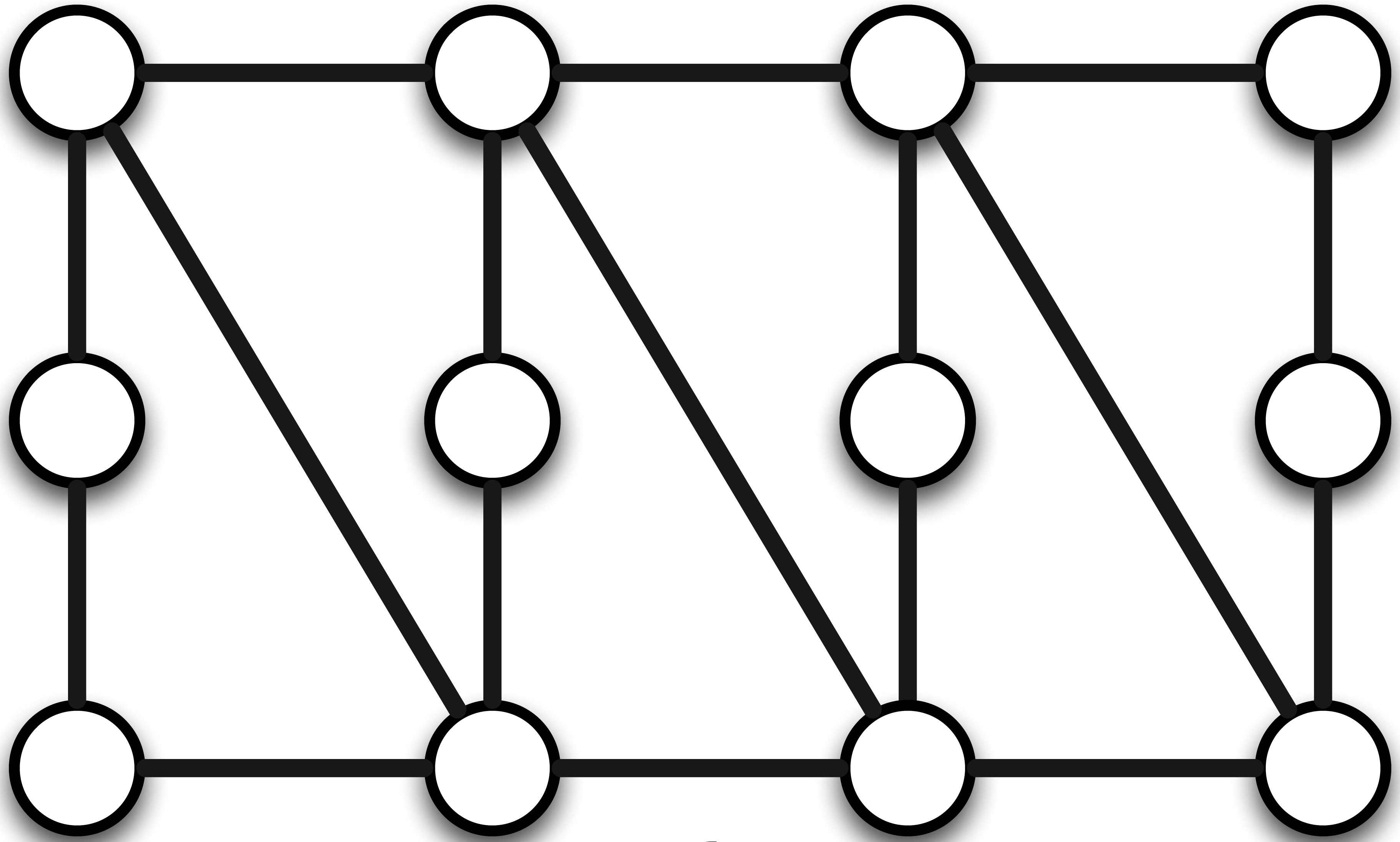
6

Jeu 23 - Les sommets veulent leur indépendance



6

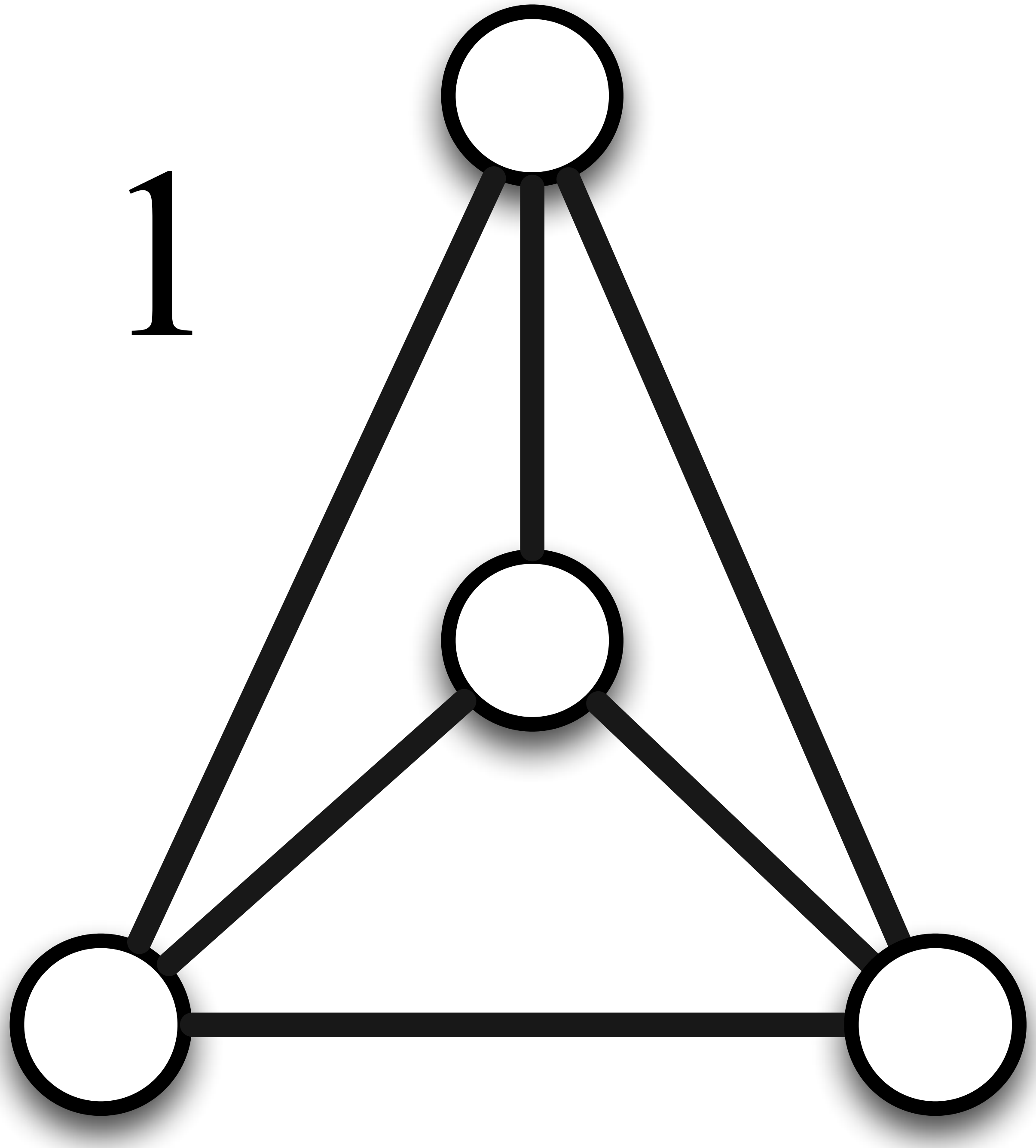
Jeu 24 - Les sommets veulent leur indépendance



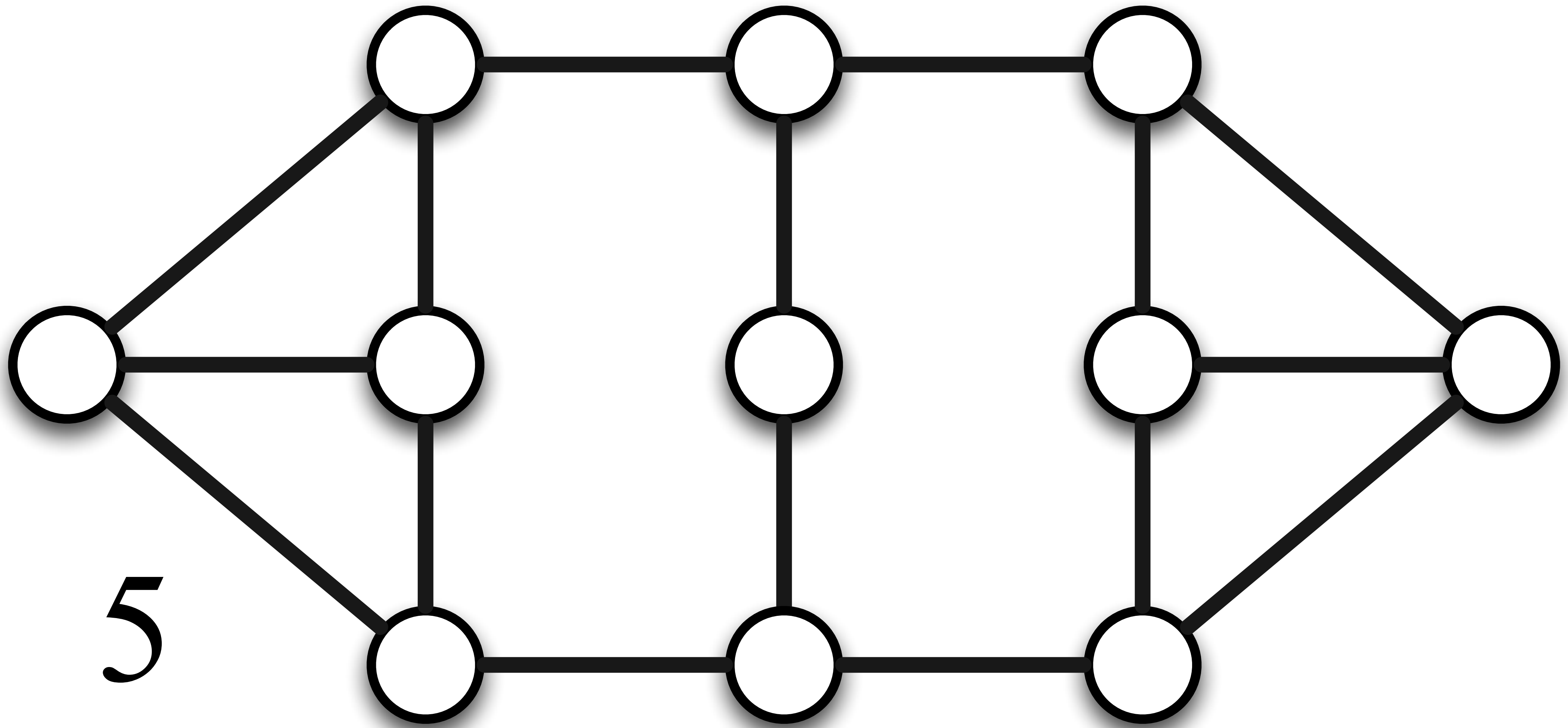
6

Jeu 25 - Les sommets veulent leur indépendance

1

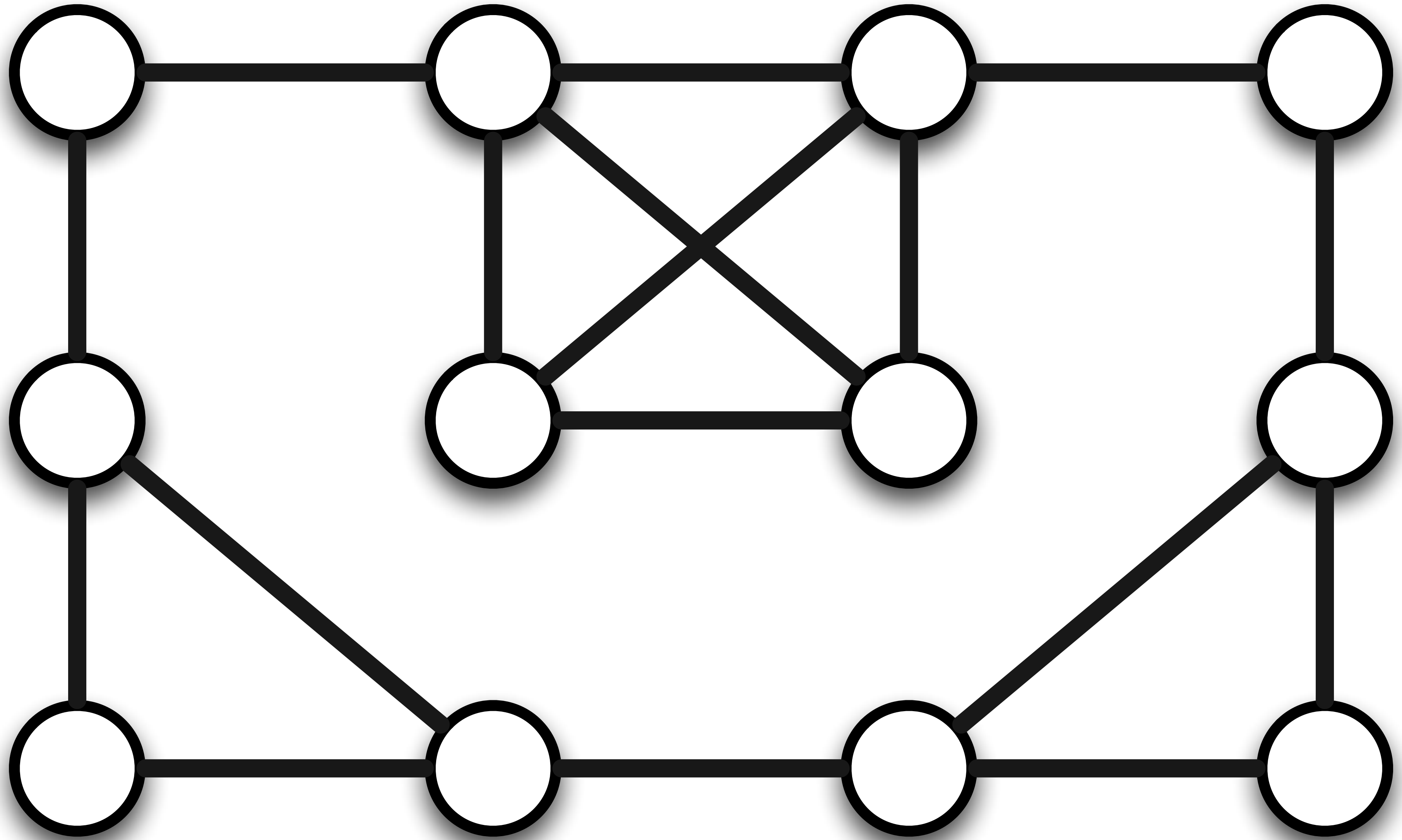


Jeu 26 - Les sommets veulent leur indépendance

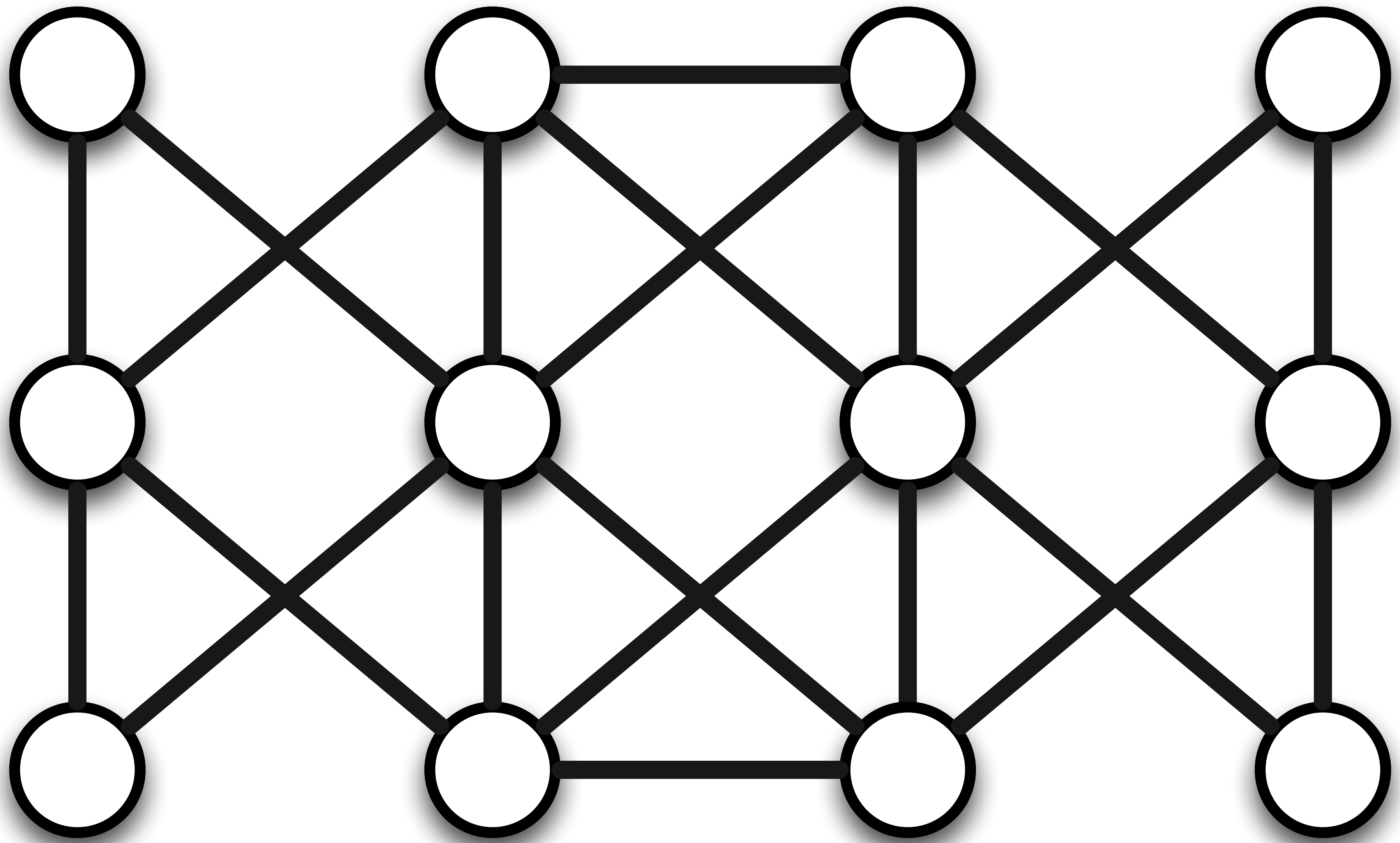


5

Jeu 27 - Les sommets veulent leur indépendance

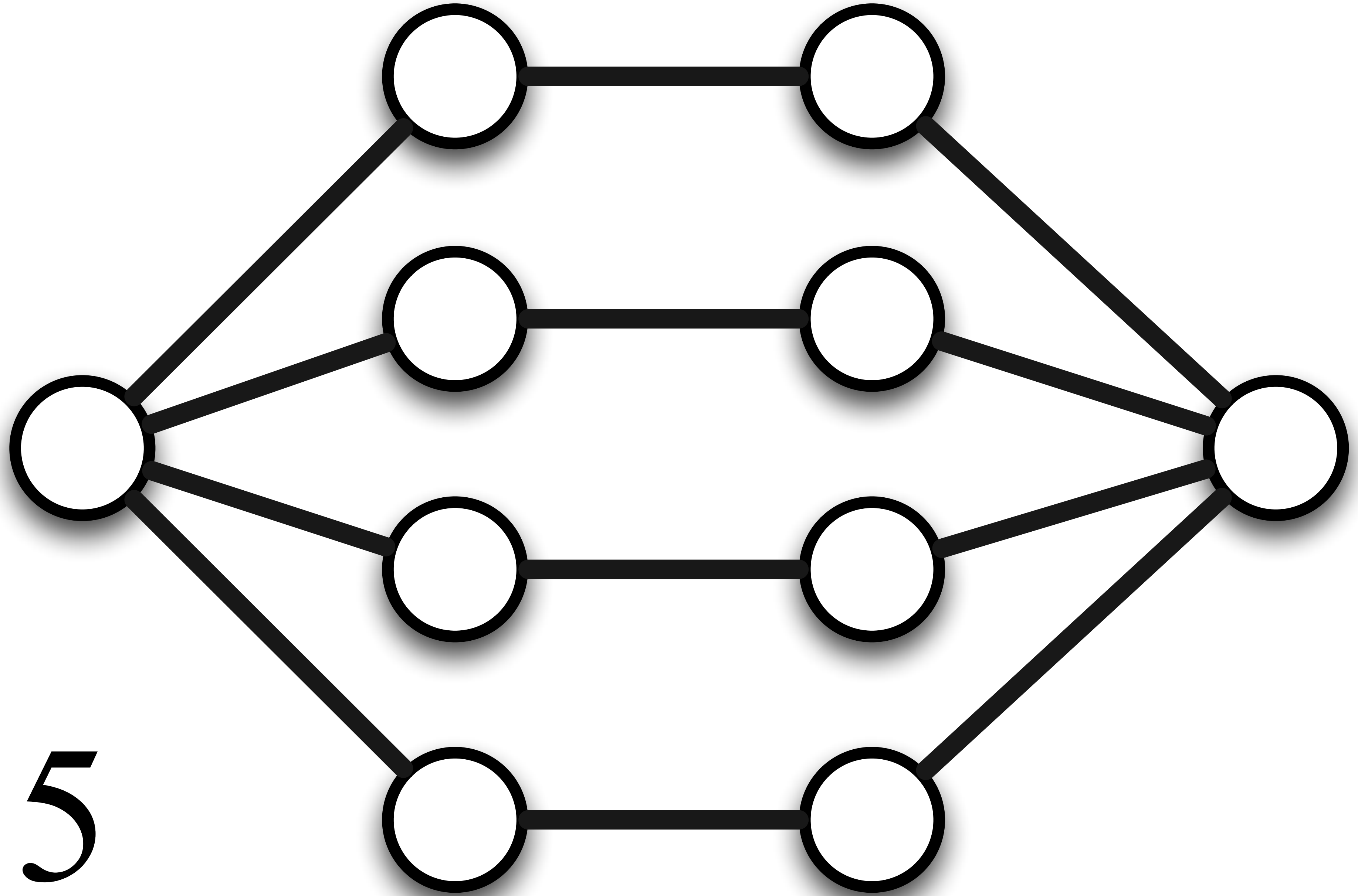


5



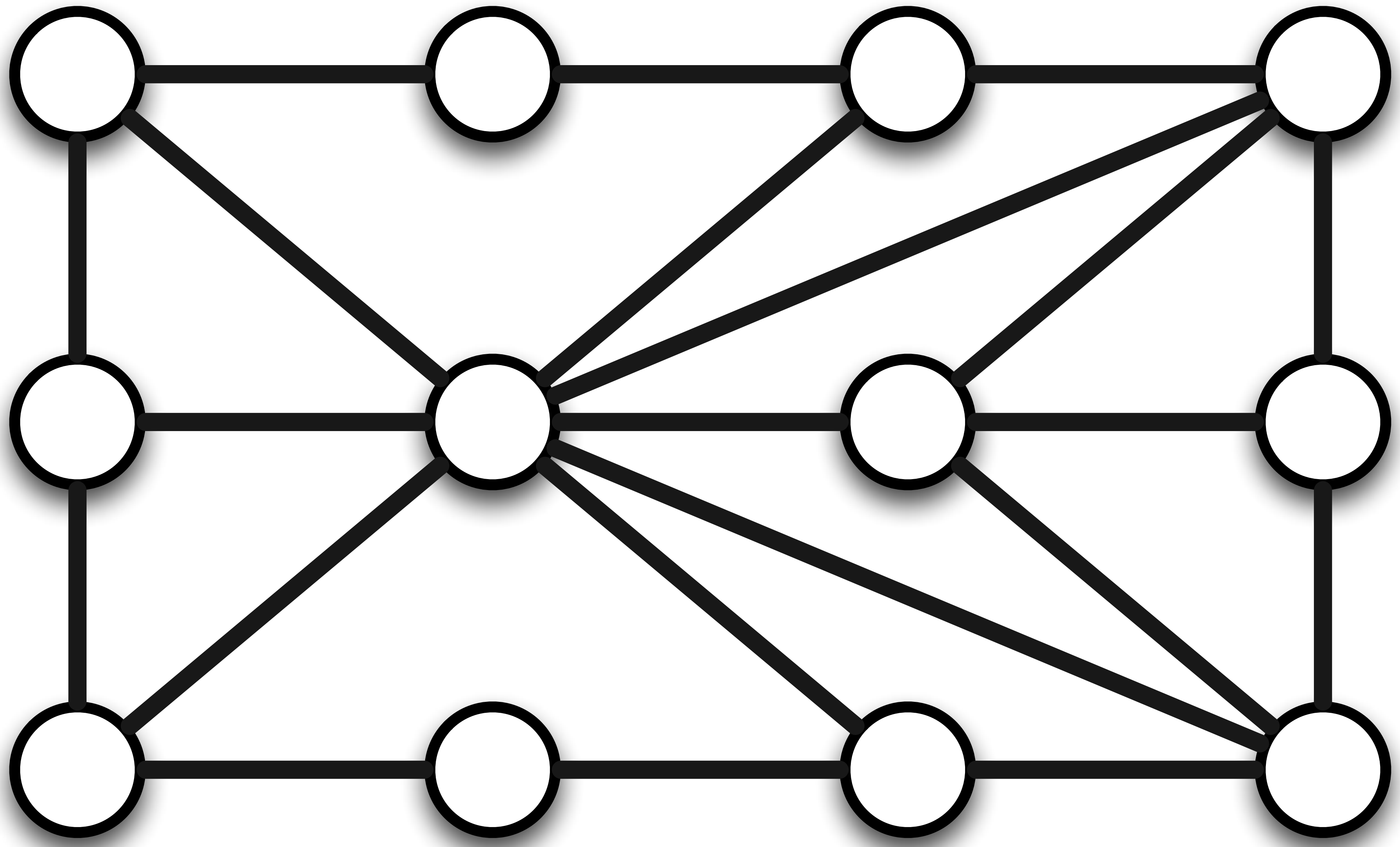
6

Jeu 29 - Les sommets veulent leur indépendance



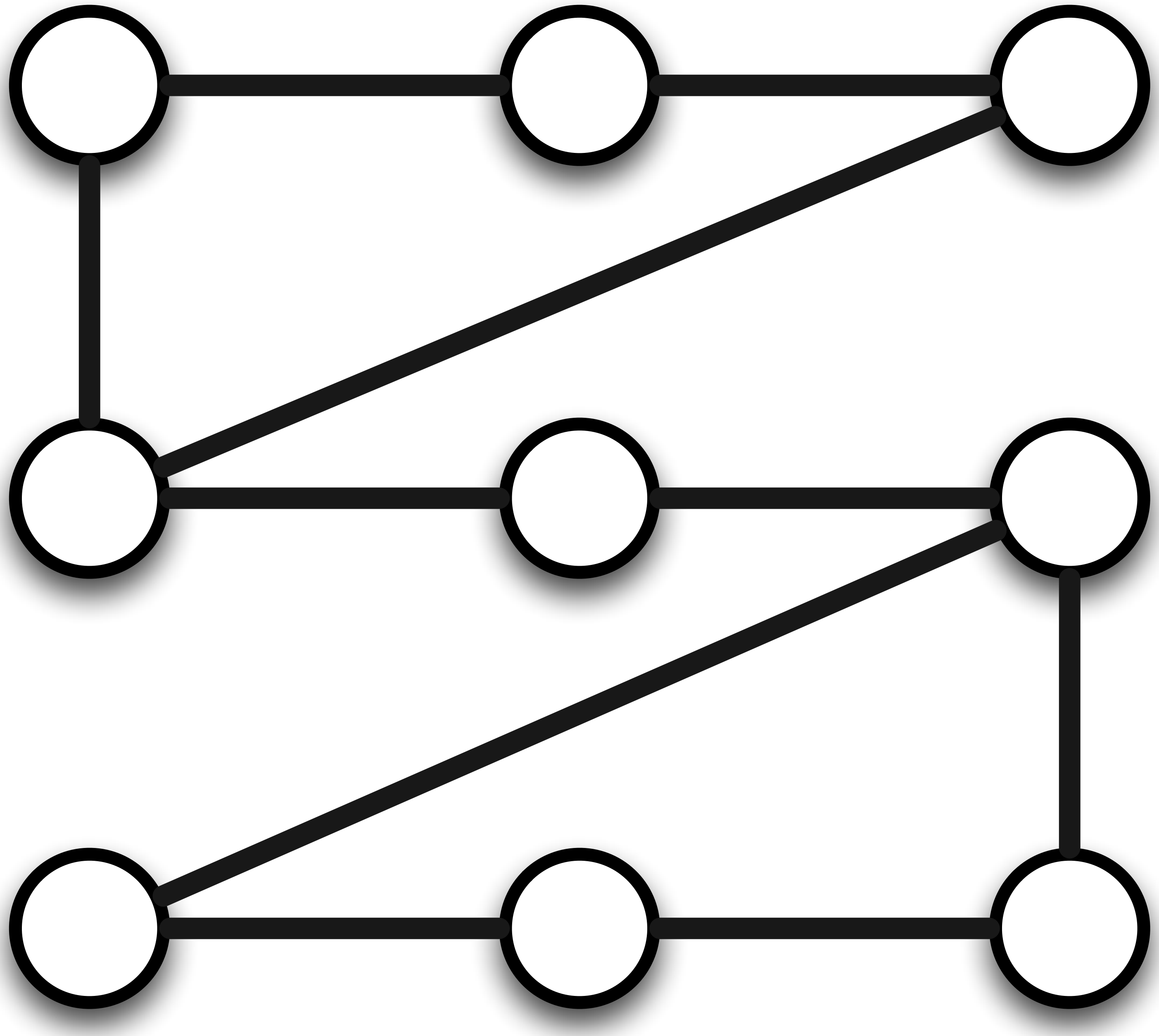
5

Jeu 30 - Les sommets veulent leur indépendance



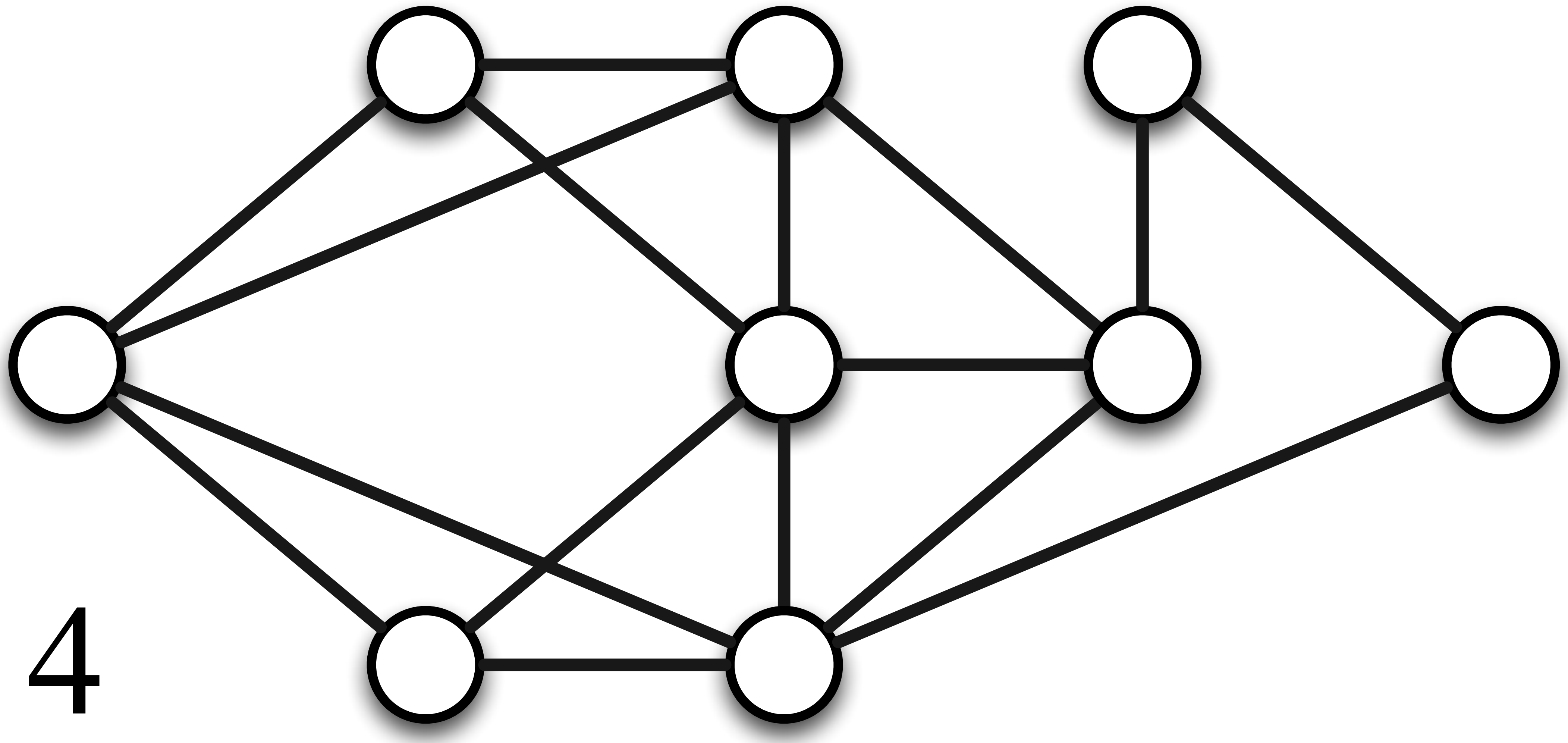
5

Jeu 31 - Les sommets veulent leur indépendance



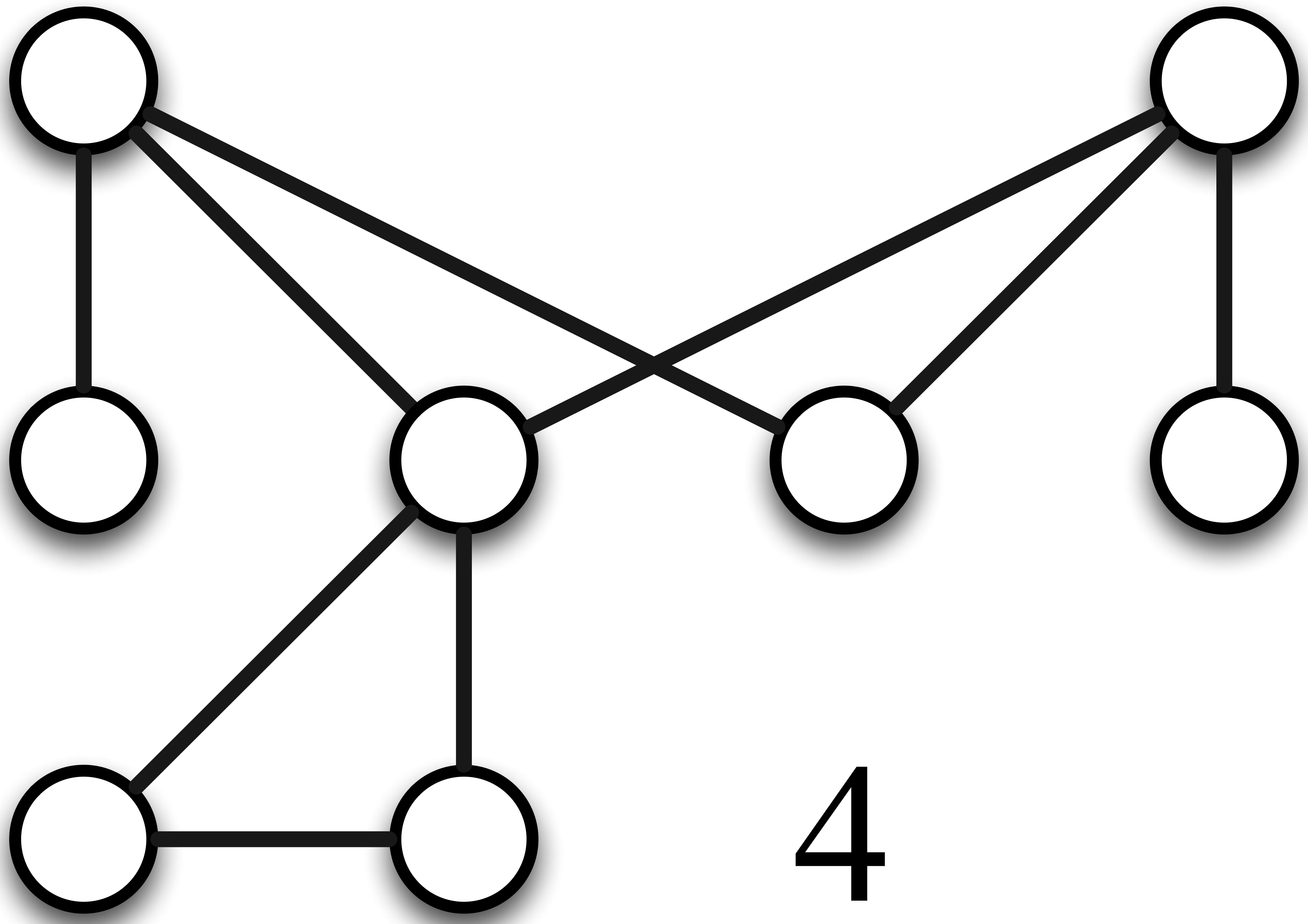
5

Jeu 32 - Les sommets veulent leur indépendance



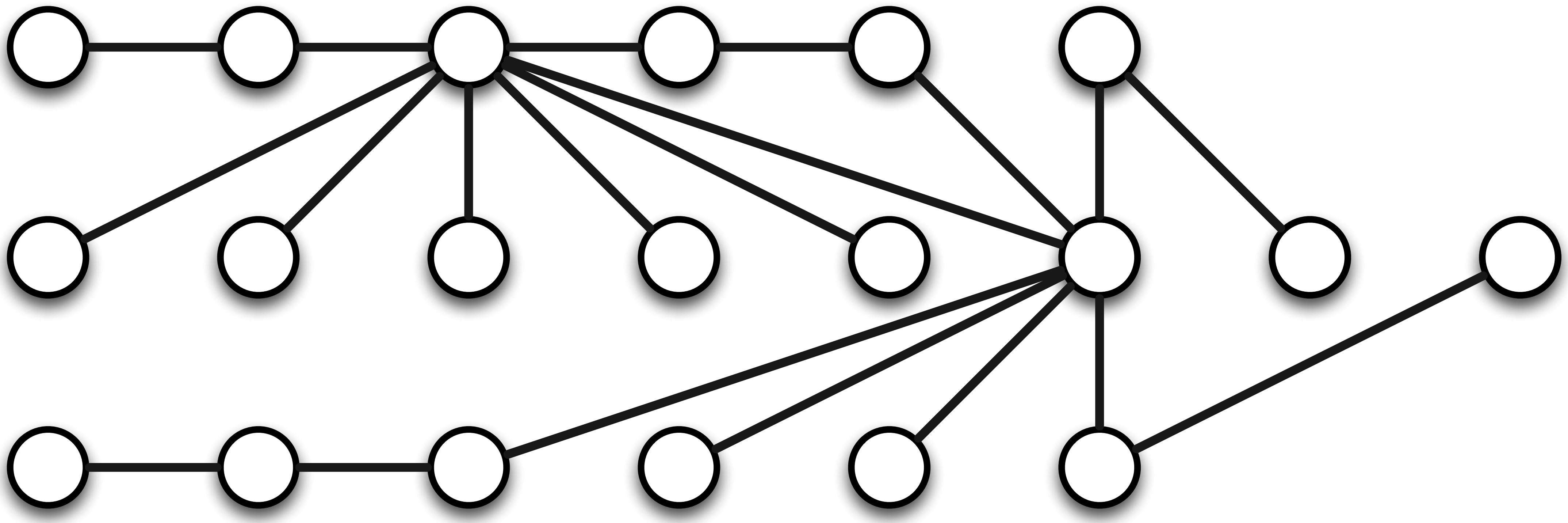
4

Jeu 33 - Les sommets veulent leur indépendance



4

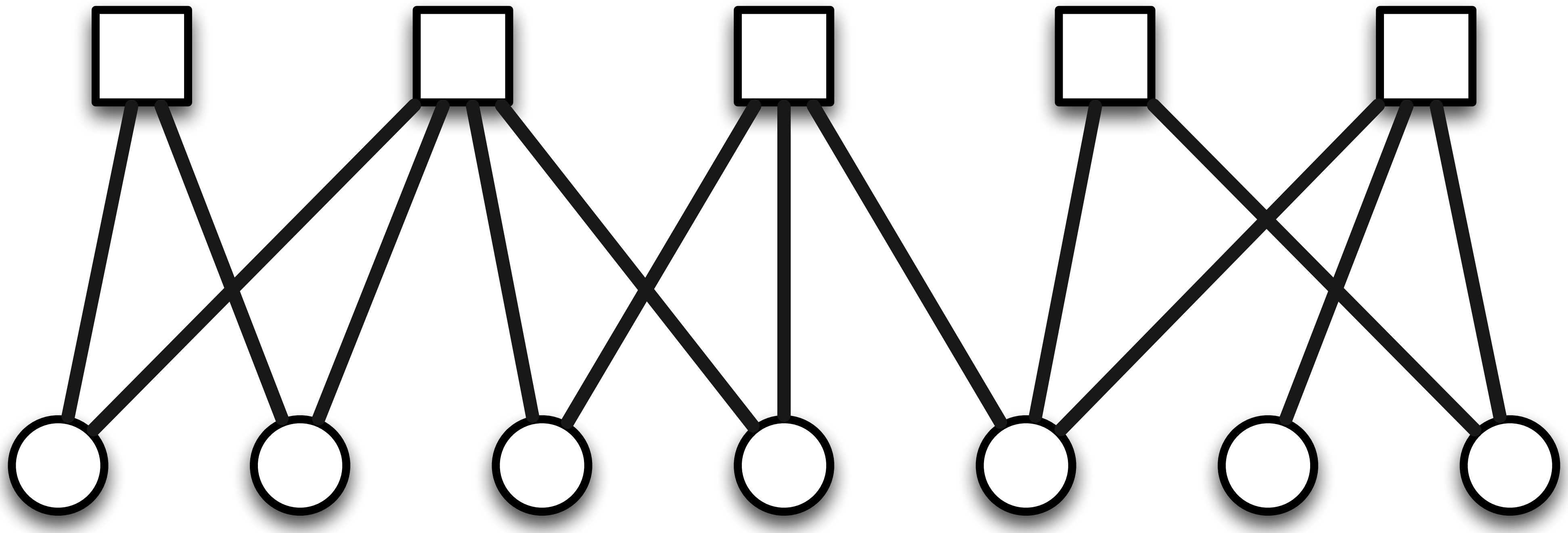
Jeu 34 - Les sommets veulent leur indépendance



13

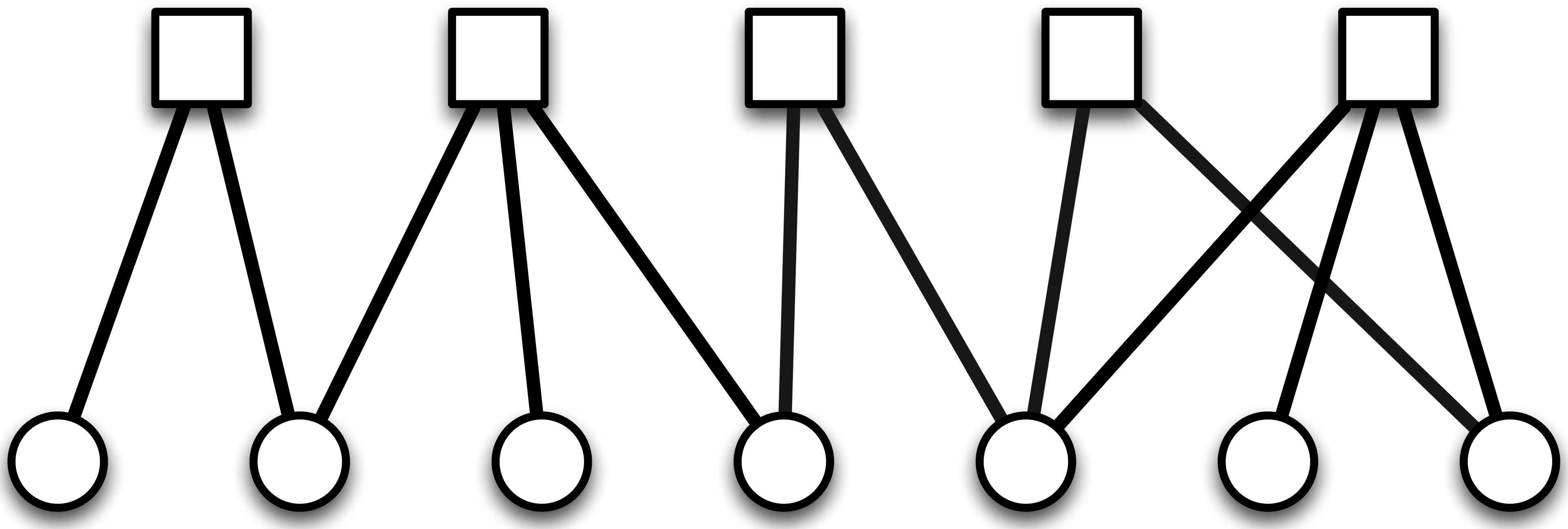
6.3 Couverture des sommets

Jeu 1 - Couverture des sommets



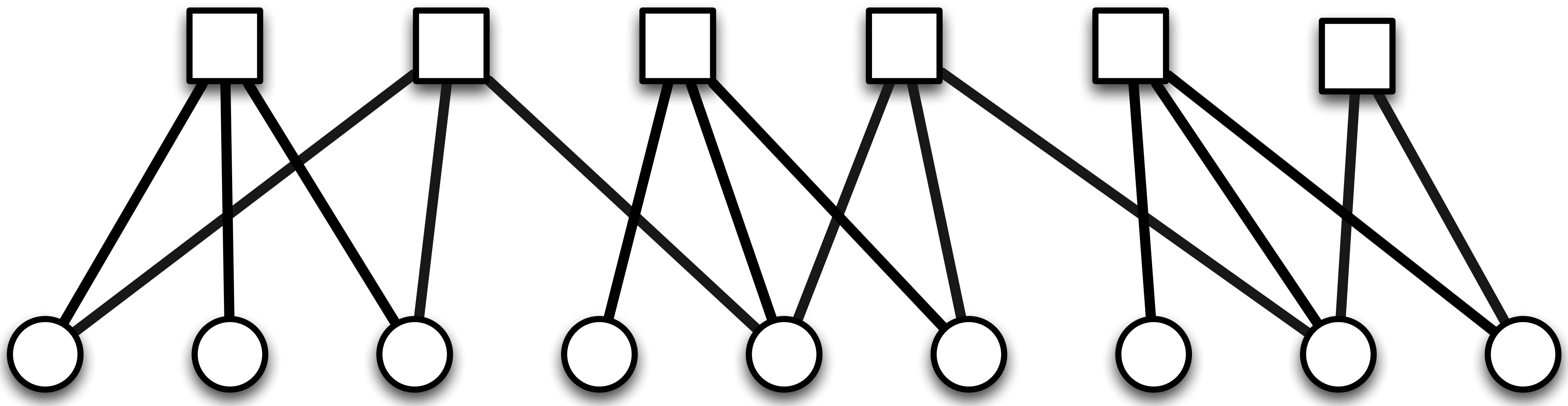
2

Jeu 2 - Couverture des sommets



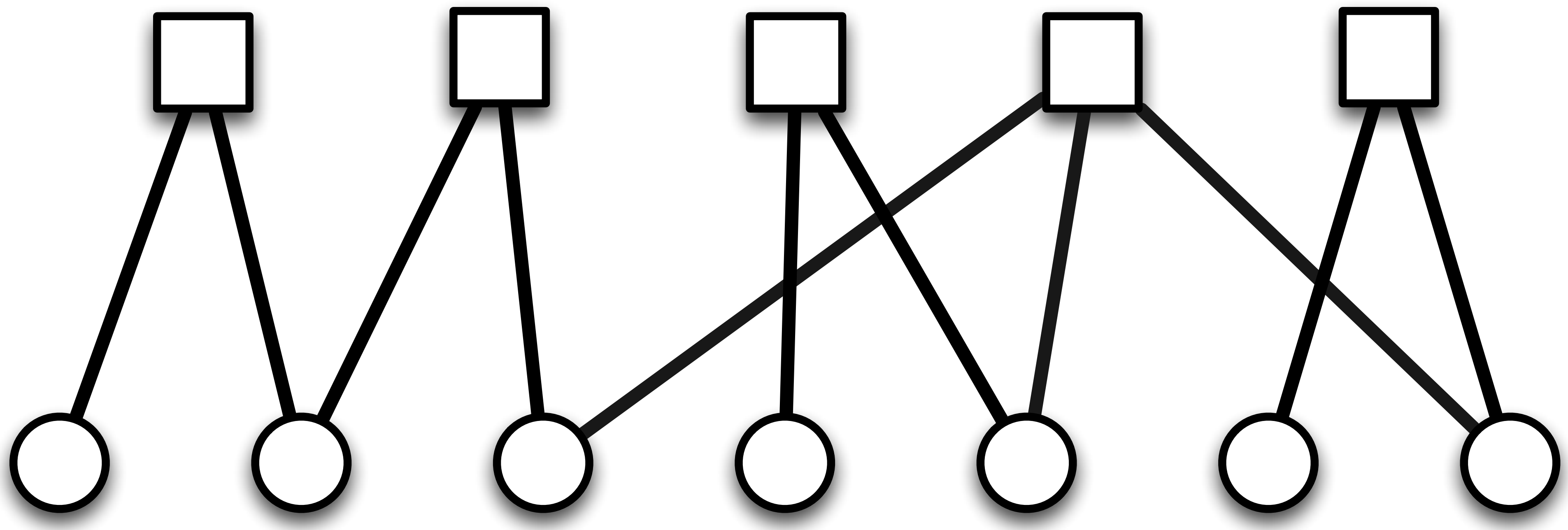
3

Jeu 3 - Couverture des sommets



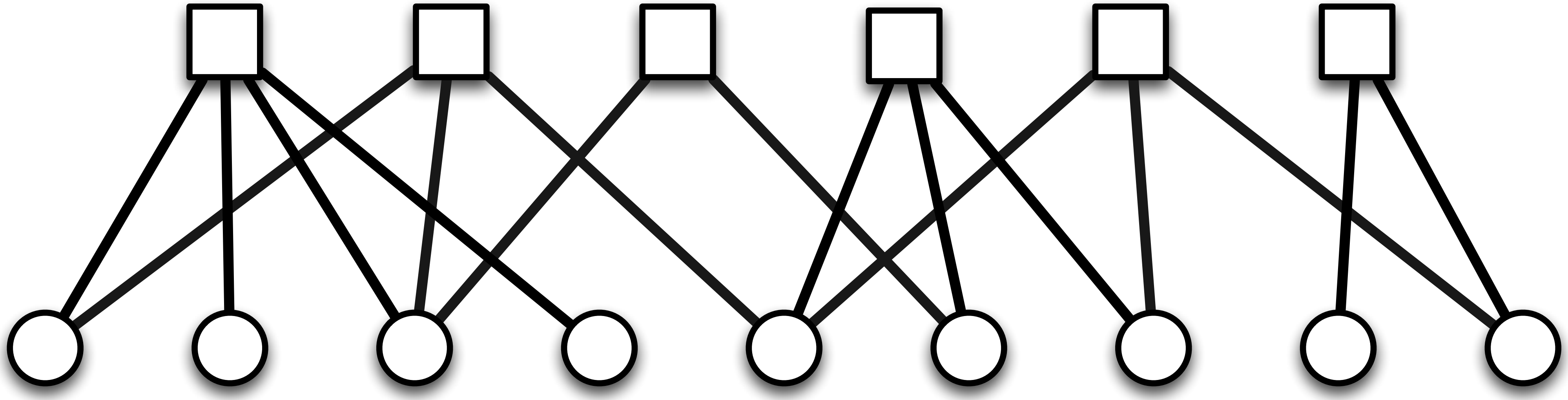
3

Jeu 4 - Couverture des sommets



4

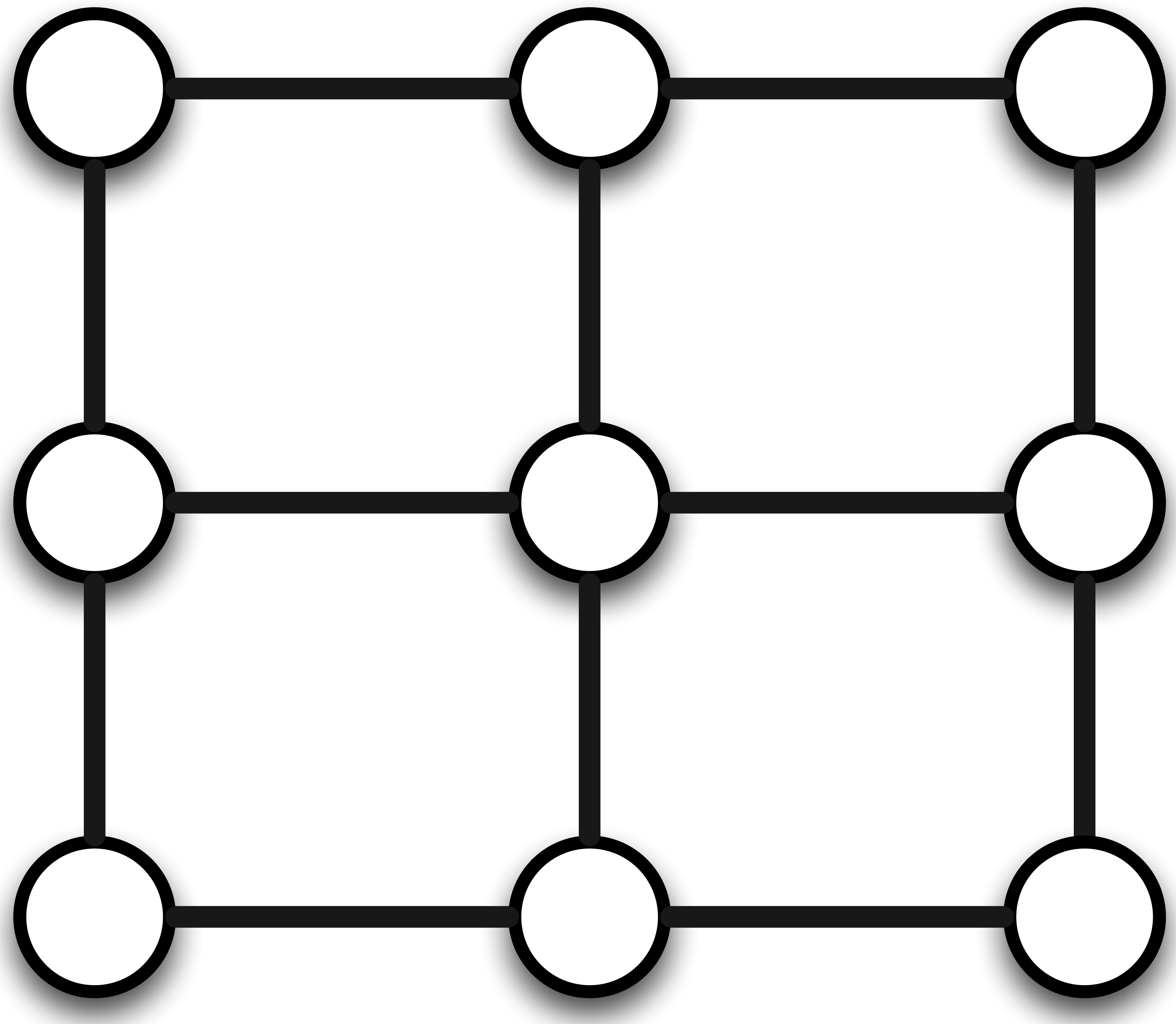
Jeu 5 - Couverture des sommets



3

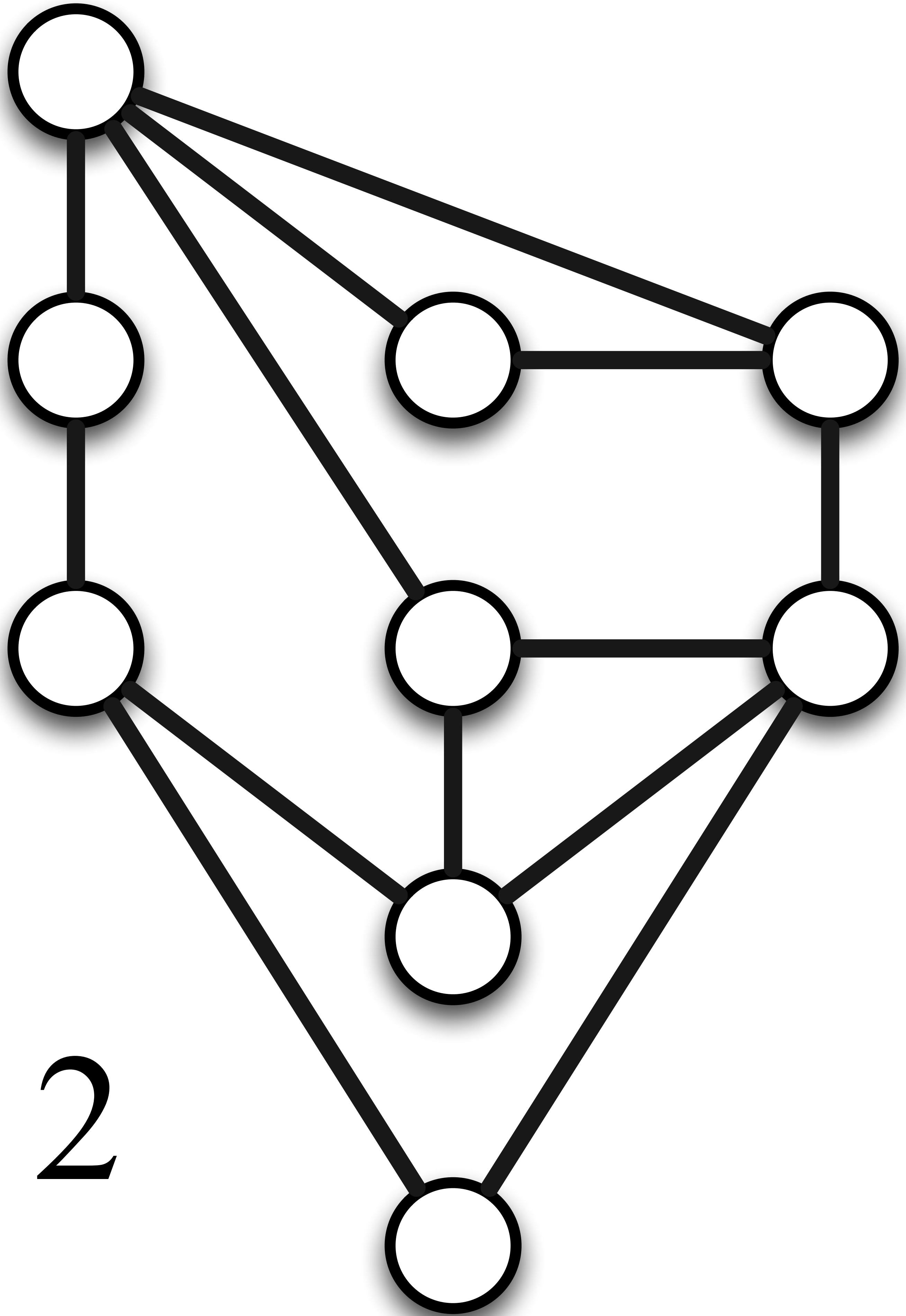
6.4 Il faut casser tous les cycles

Jeu 1 - Il faut casser tous les cycles



2

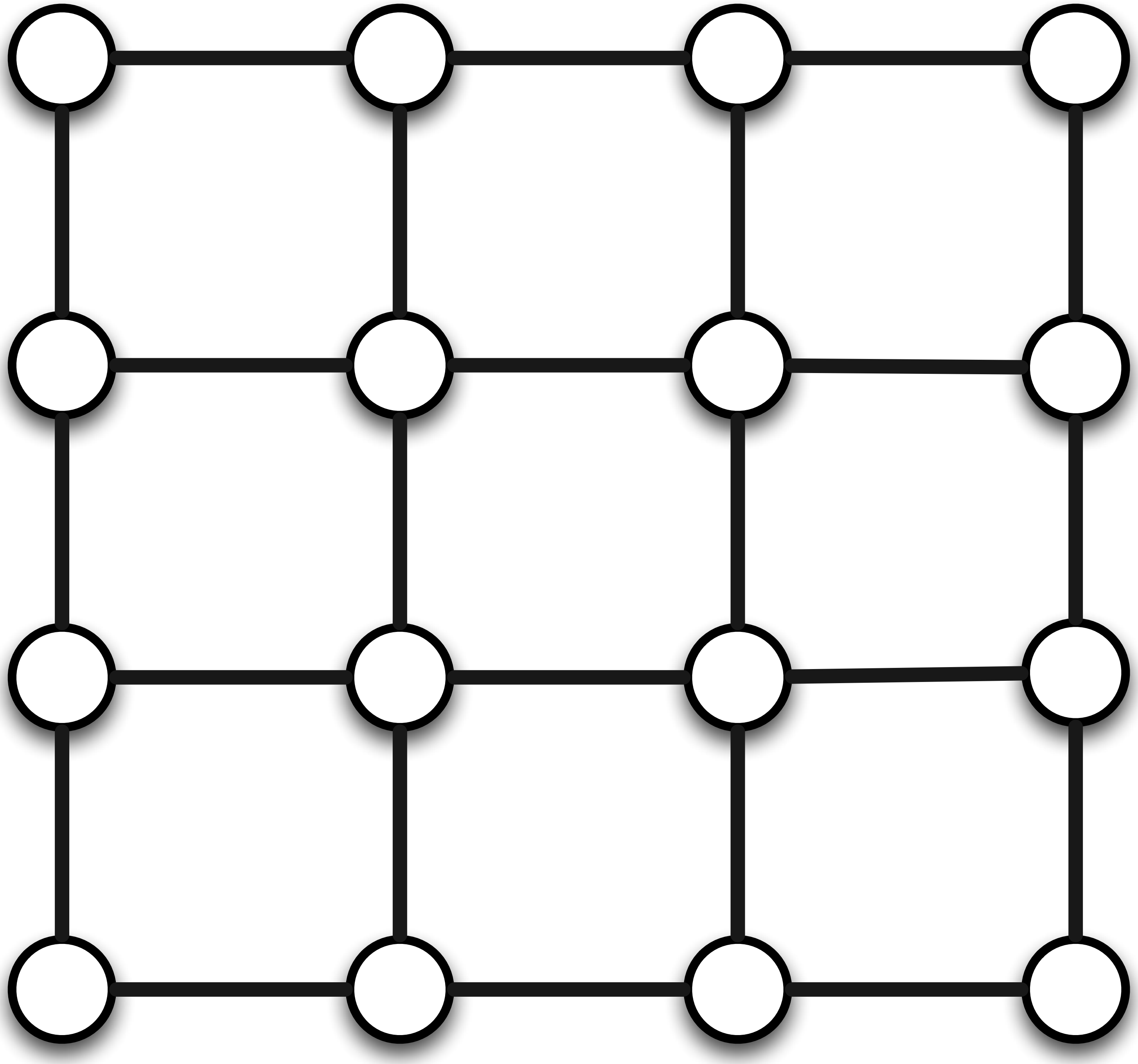
Jeu 2 - Il faut casser tous les cycles



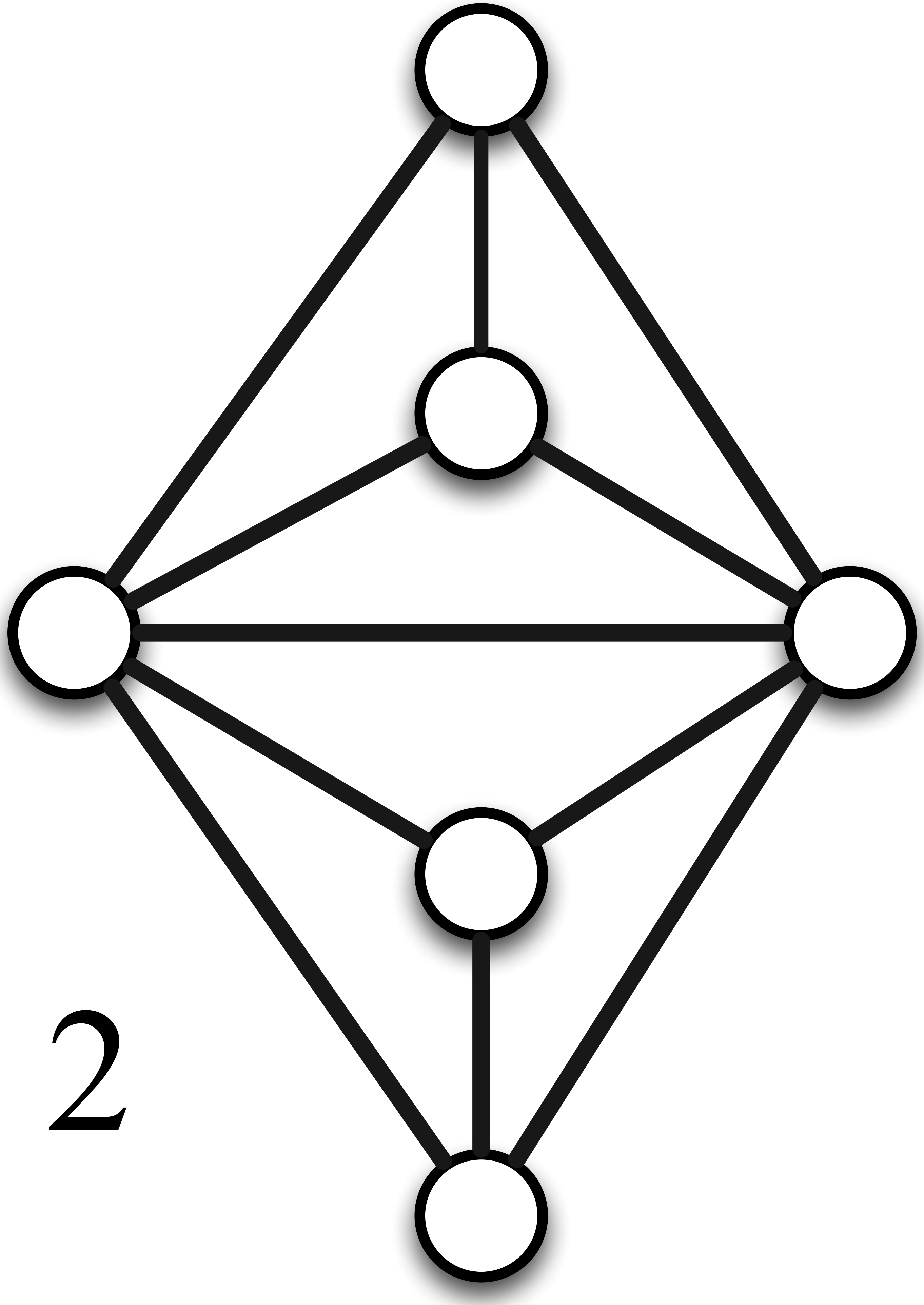
2

Jeu 3 - Il faut casser tous les cycles

6

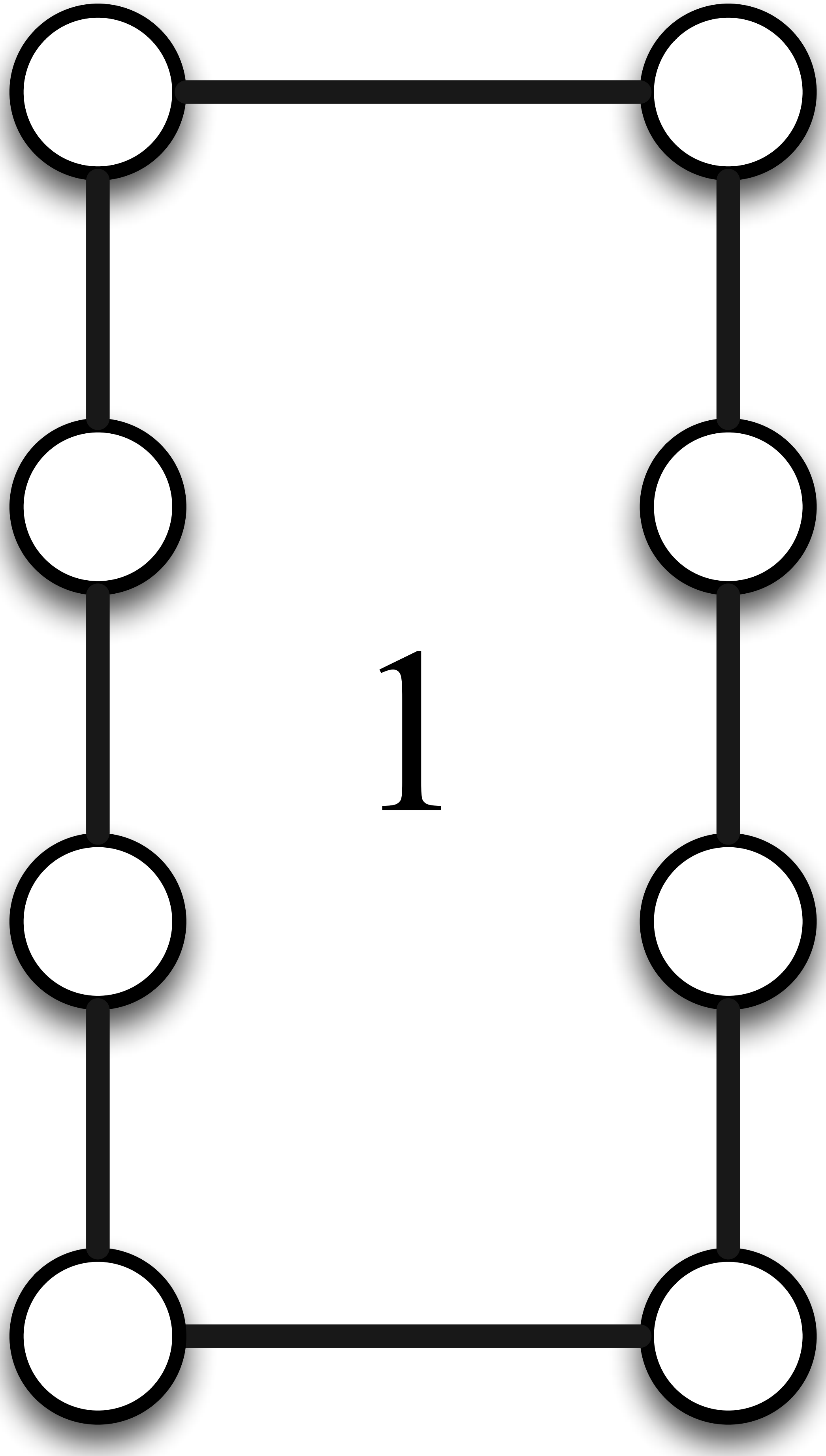


Jeu 4 - Il faut casser tous les cycles

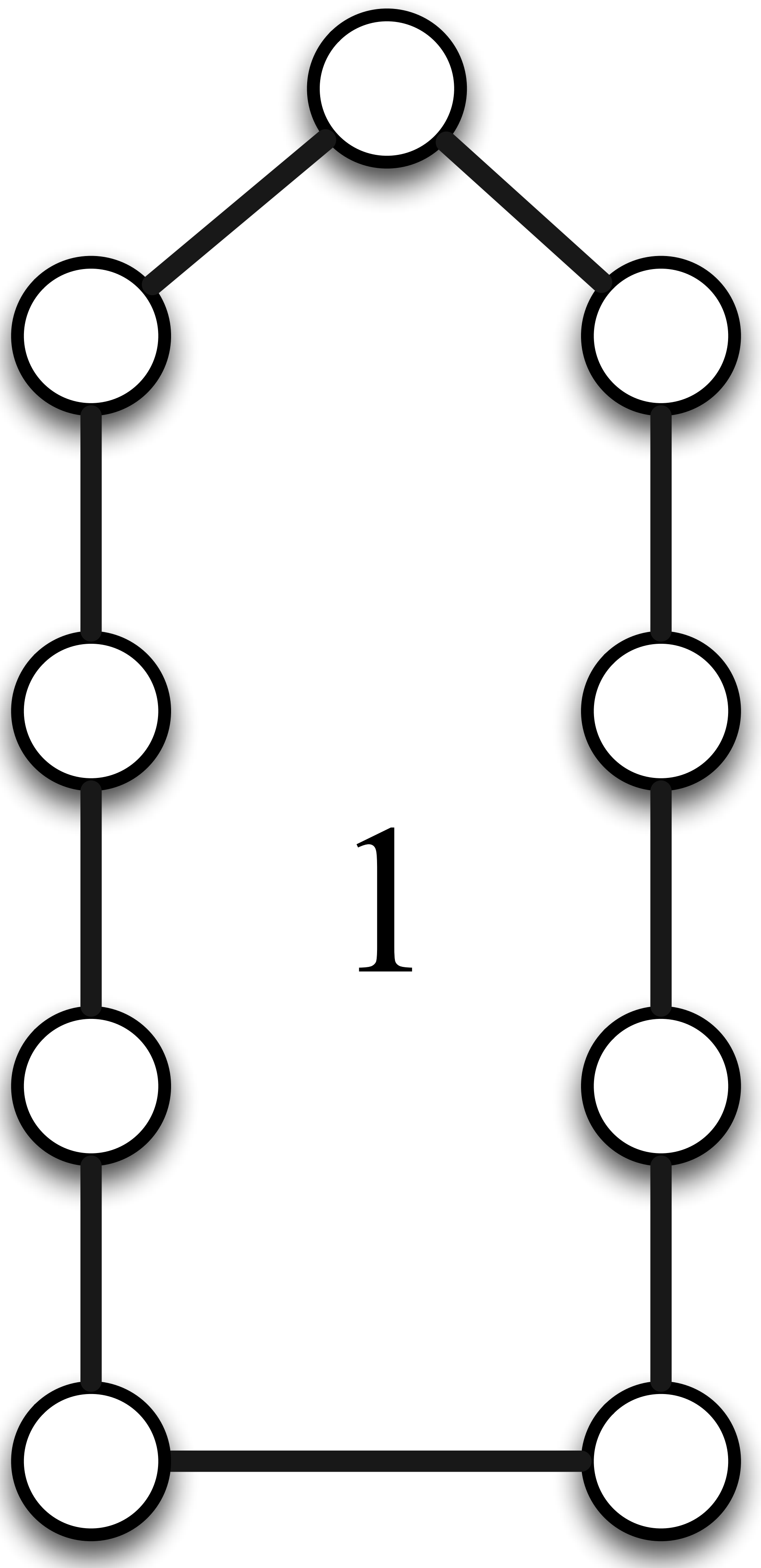


2

Jeu 5 - Il faut casser tous les cycles

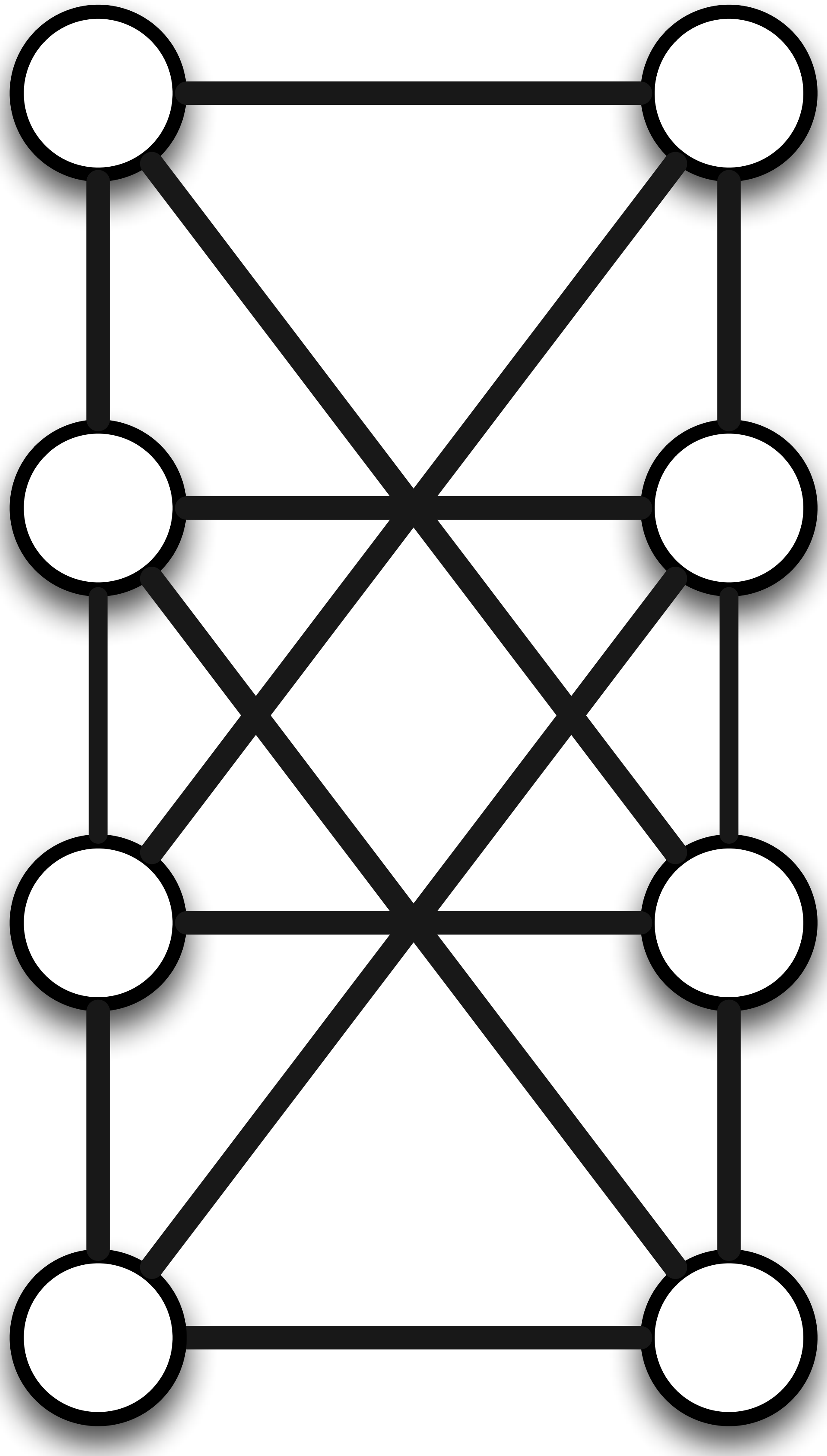


Jeu 6 - Les sommets veulent leur indépendance

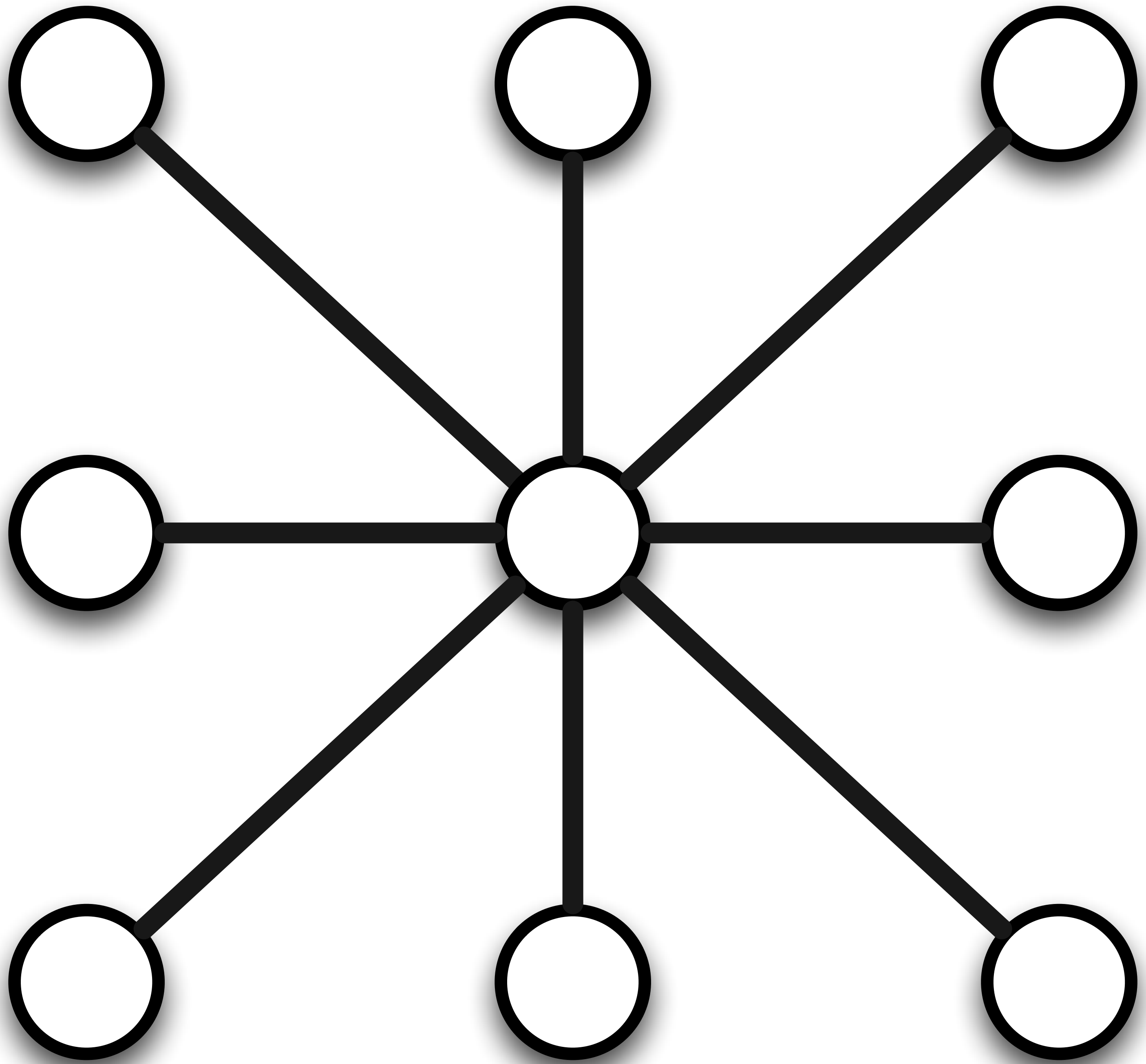


Jeu 7 - Il faut casser tous les cycles

3

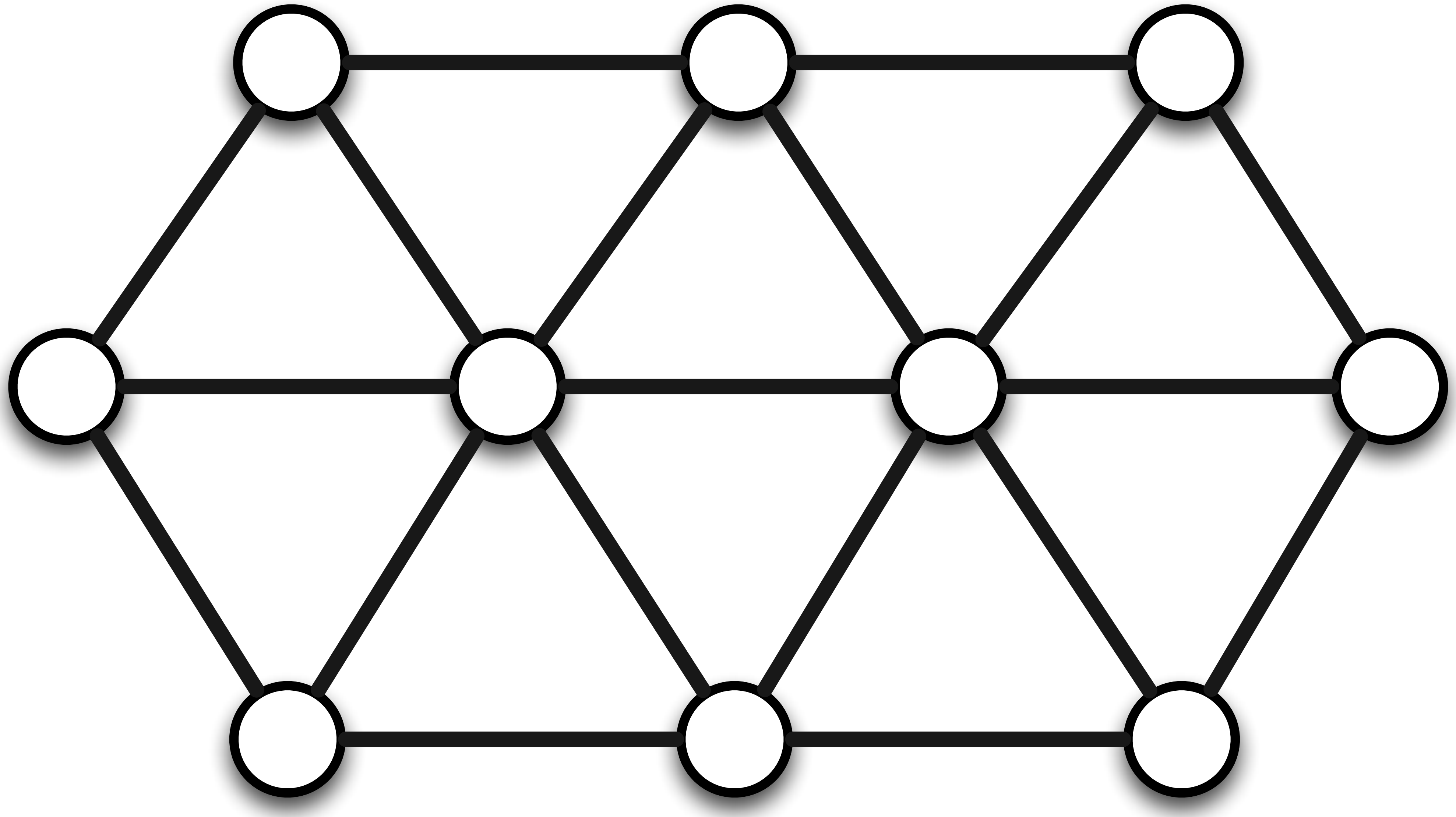


Jeu 8 - Il faut casser tous les cycles



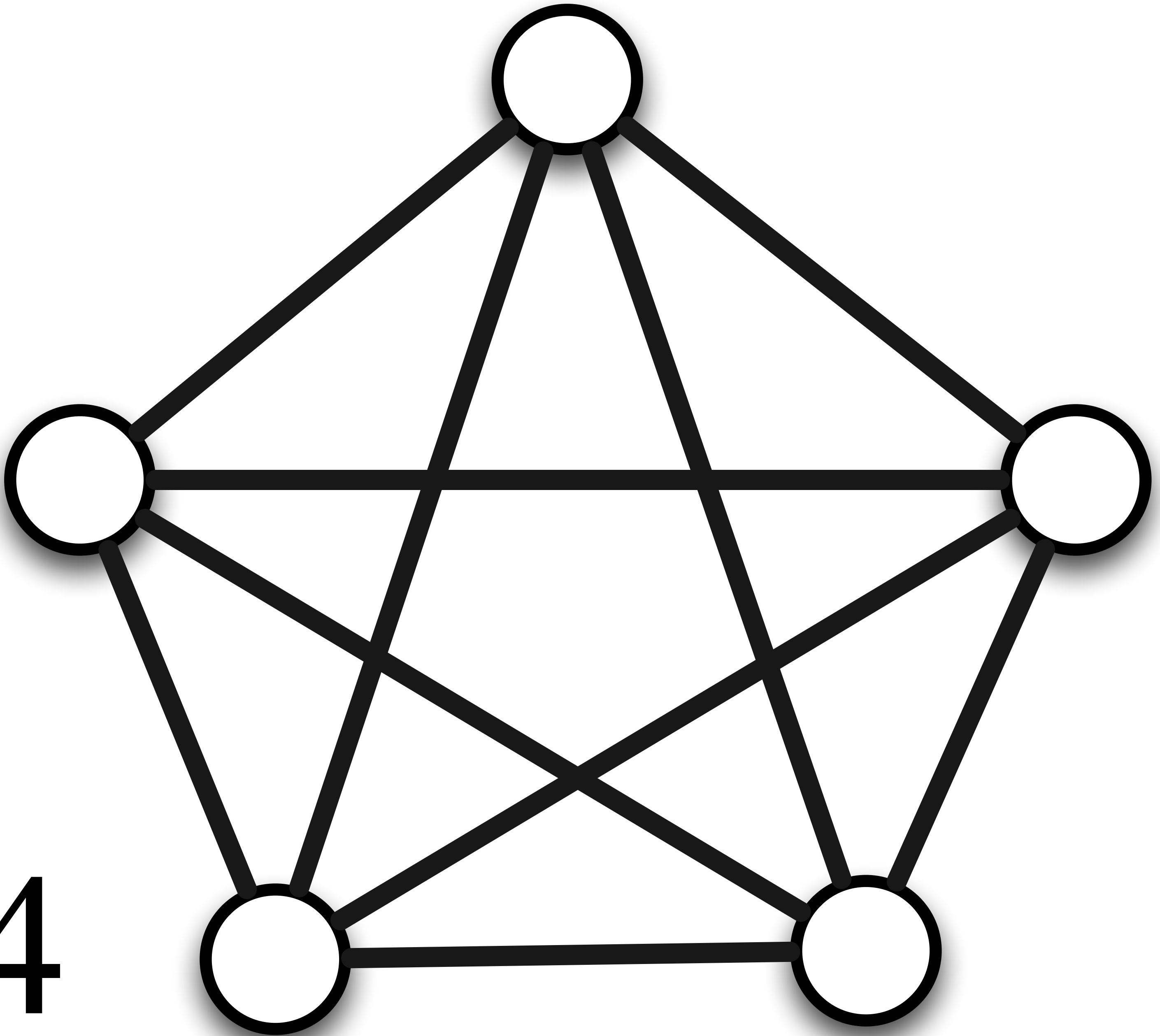
0

Jeu 9 - Il faut casser tous les cycles



3

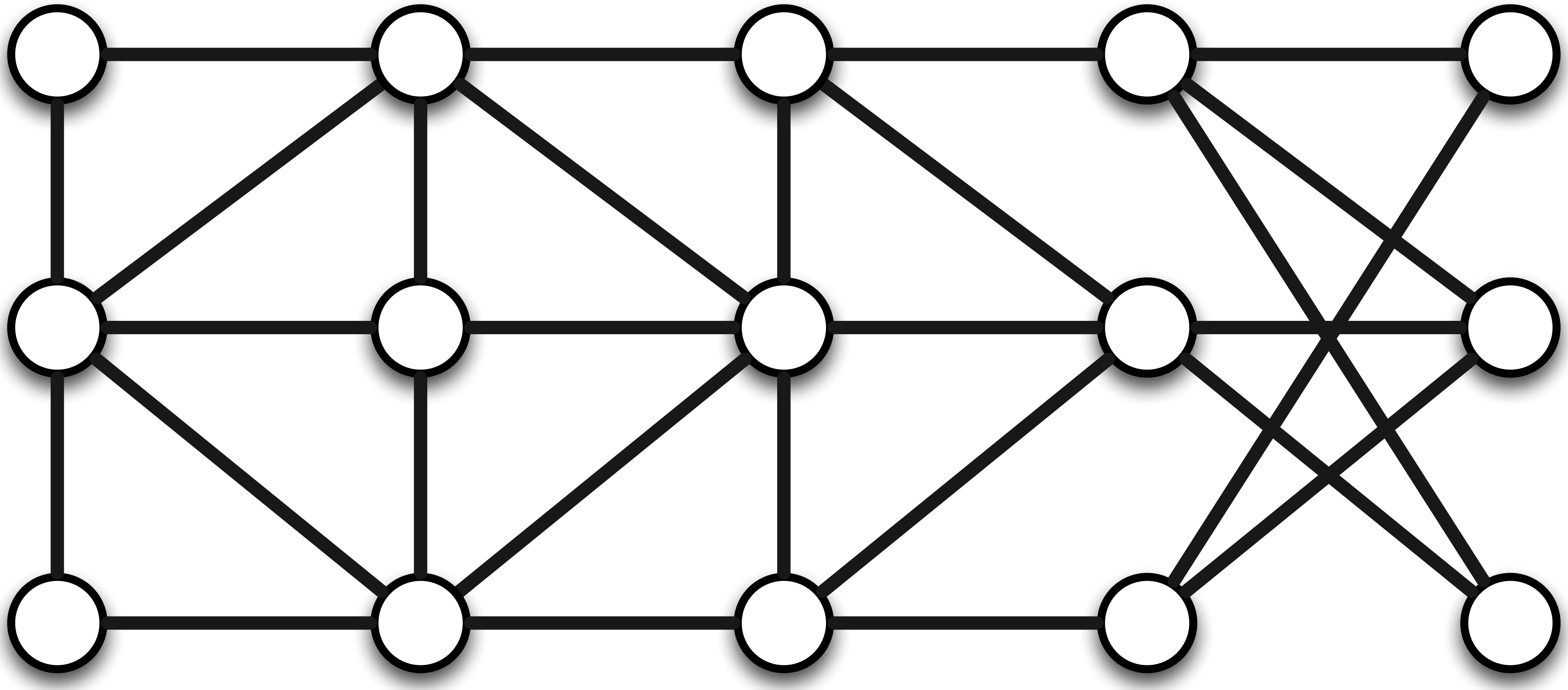
Jeu 10 - Il faut casser tous les cycles



4

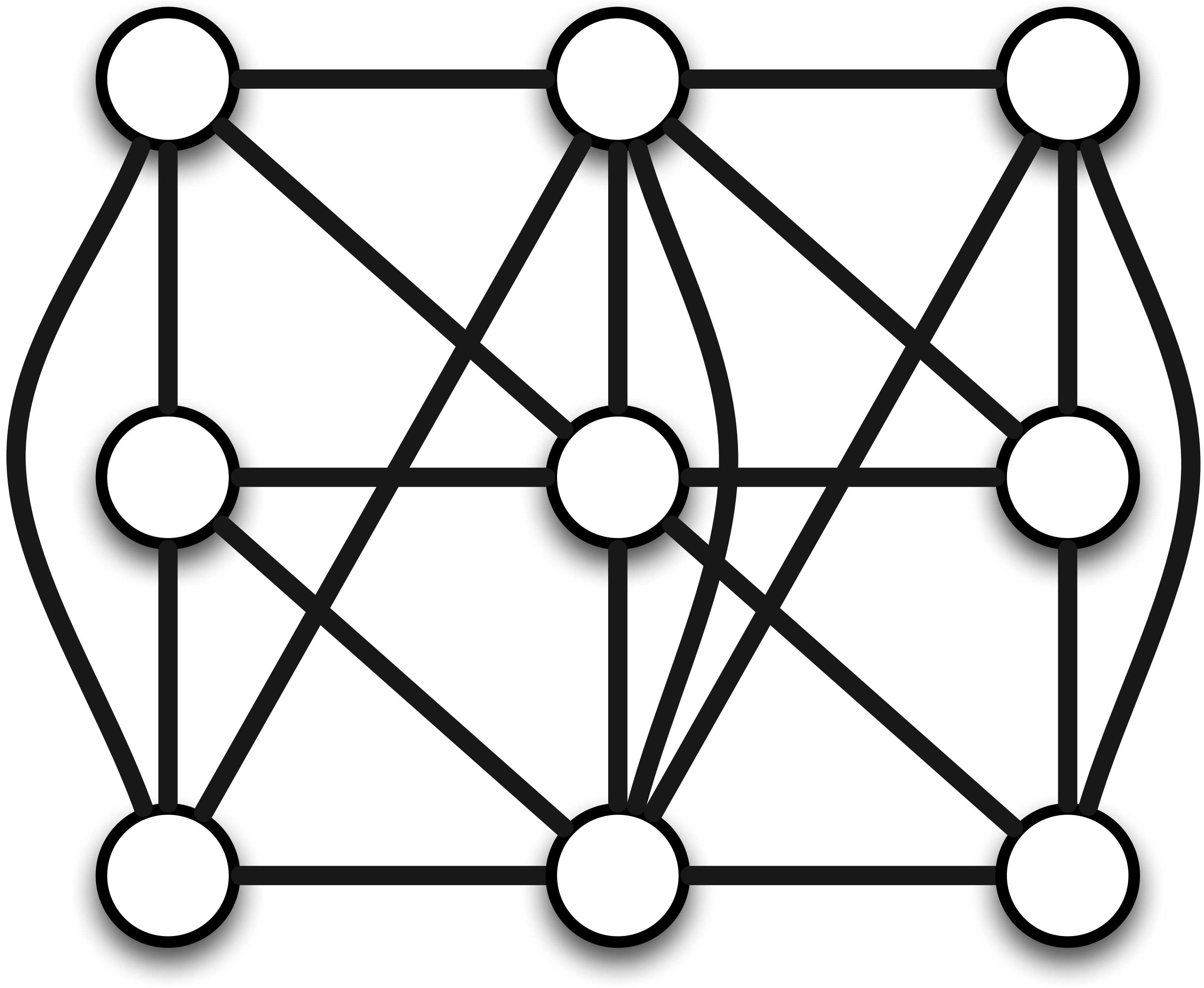
5

Jeu 11 - Il faut casser tous les cycles



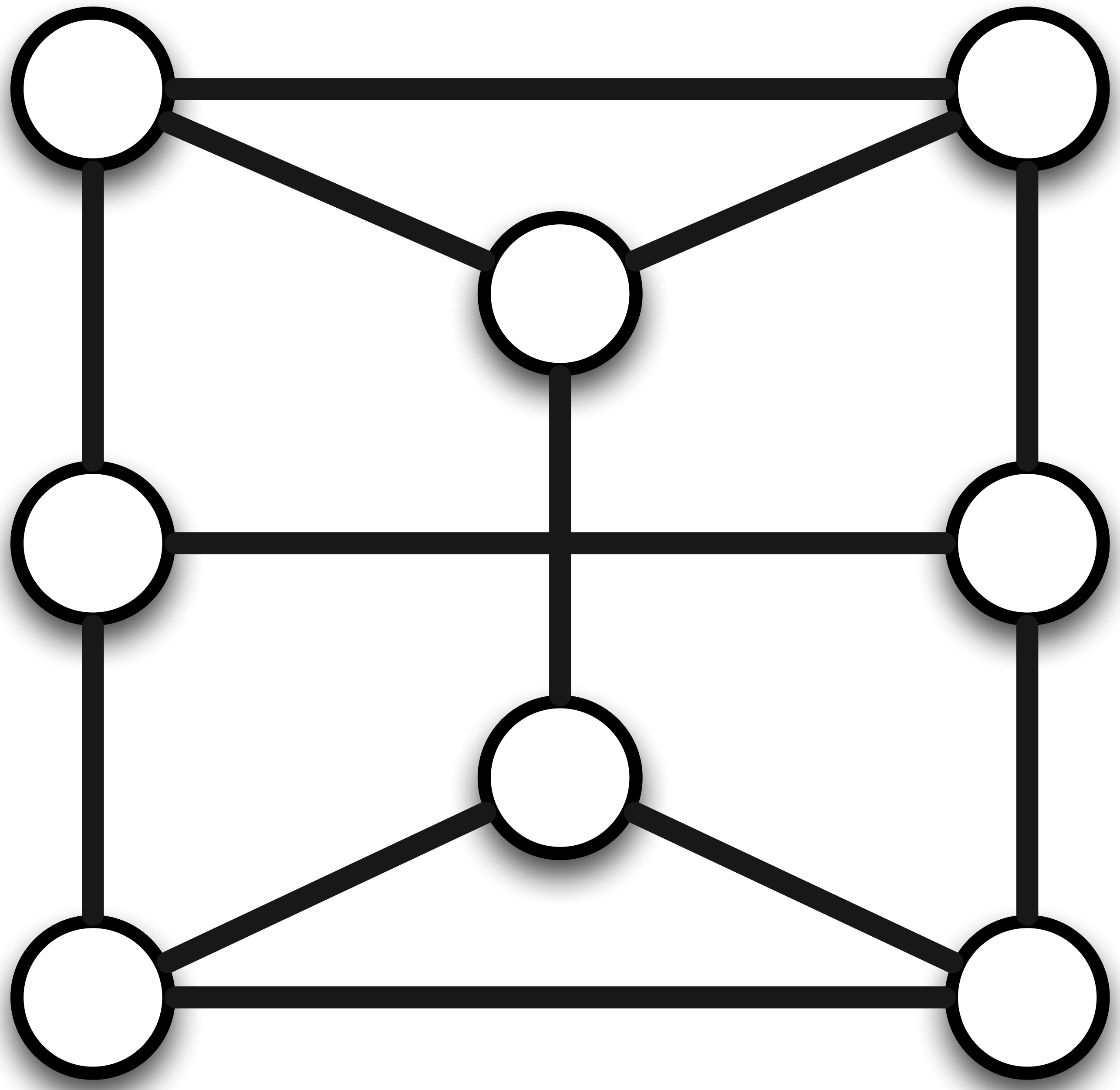
Jeu 12 - Il faut casser tous les cycles

4



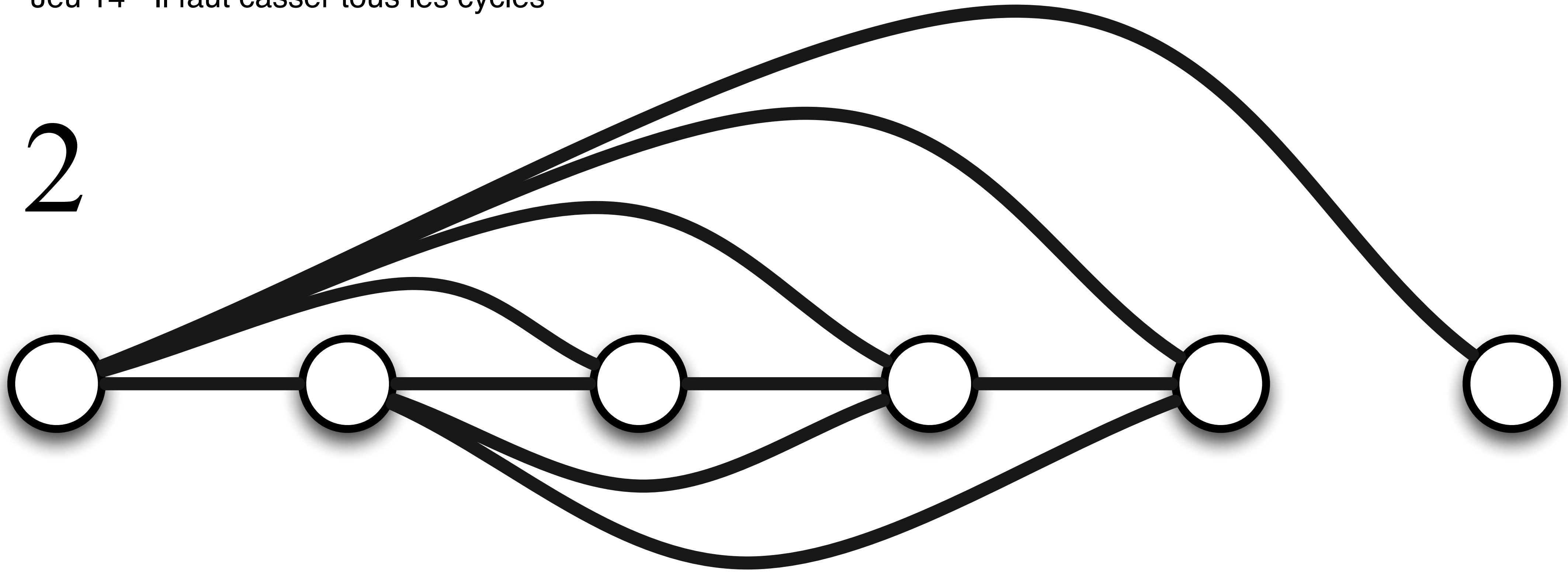
Jeu 13 - Il faut casser tous les cycles

3

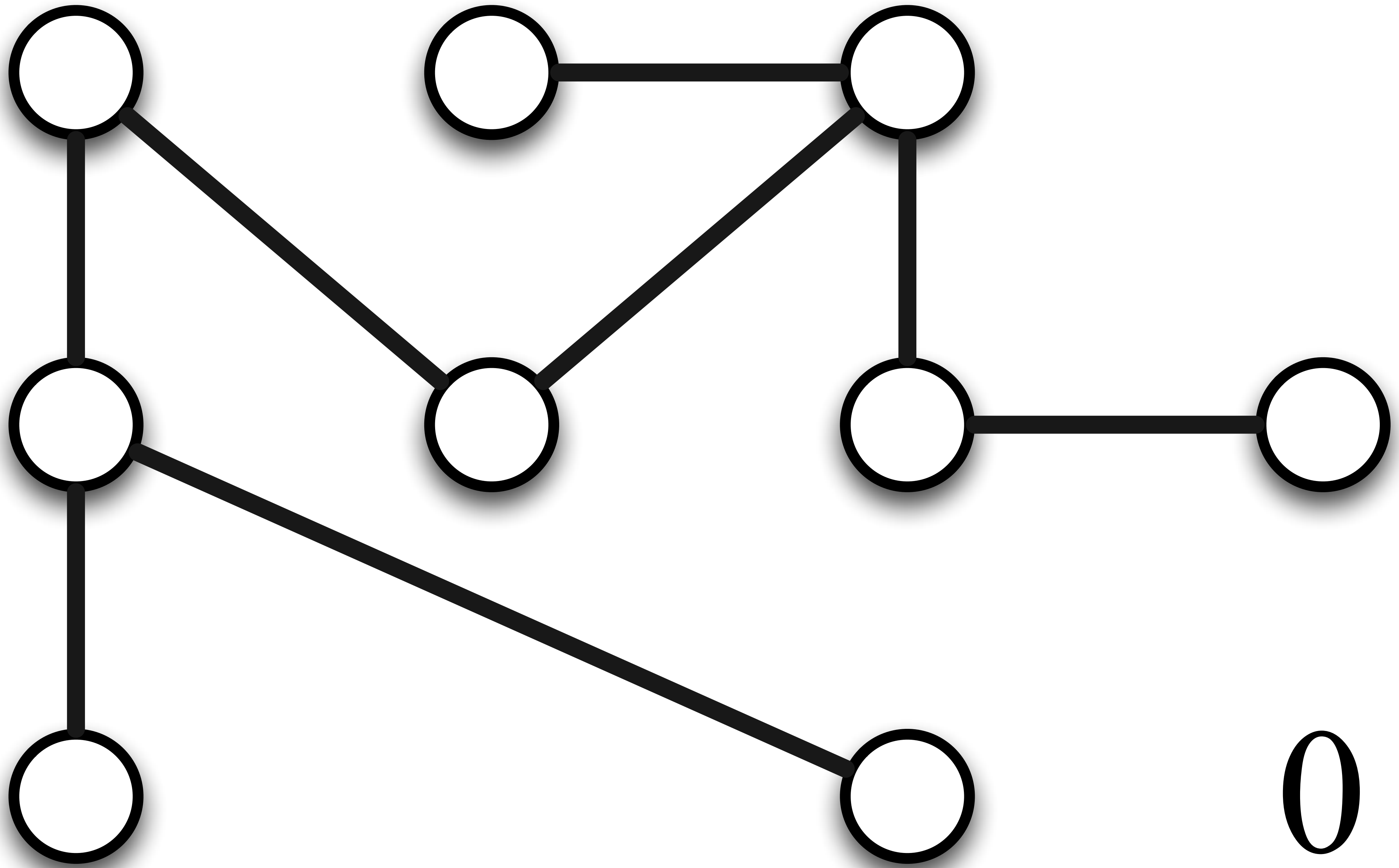


Jeu 14 - Il faut casser tous les cycles

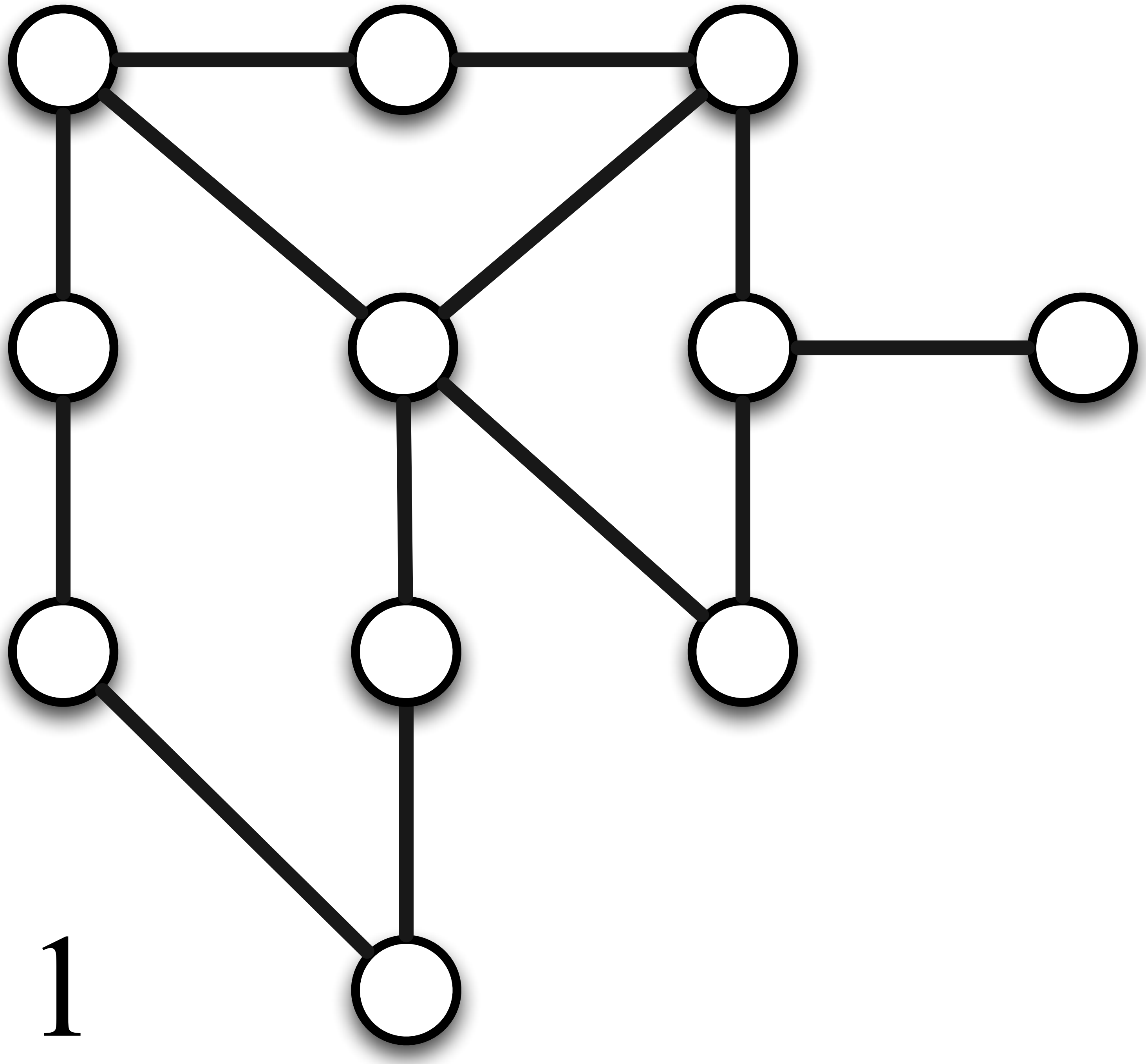
2



Jeu 15 - Il faut casser tous les cycles

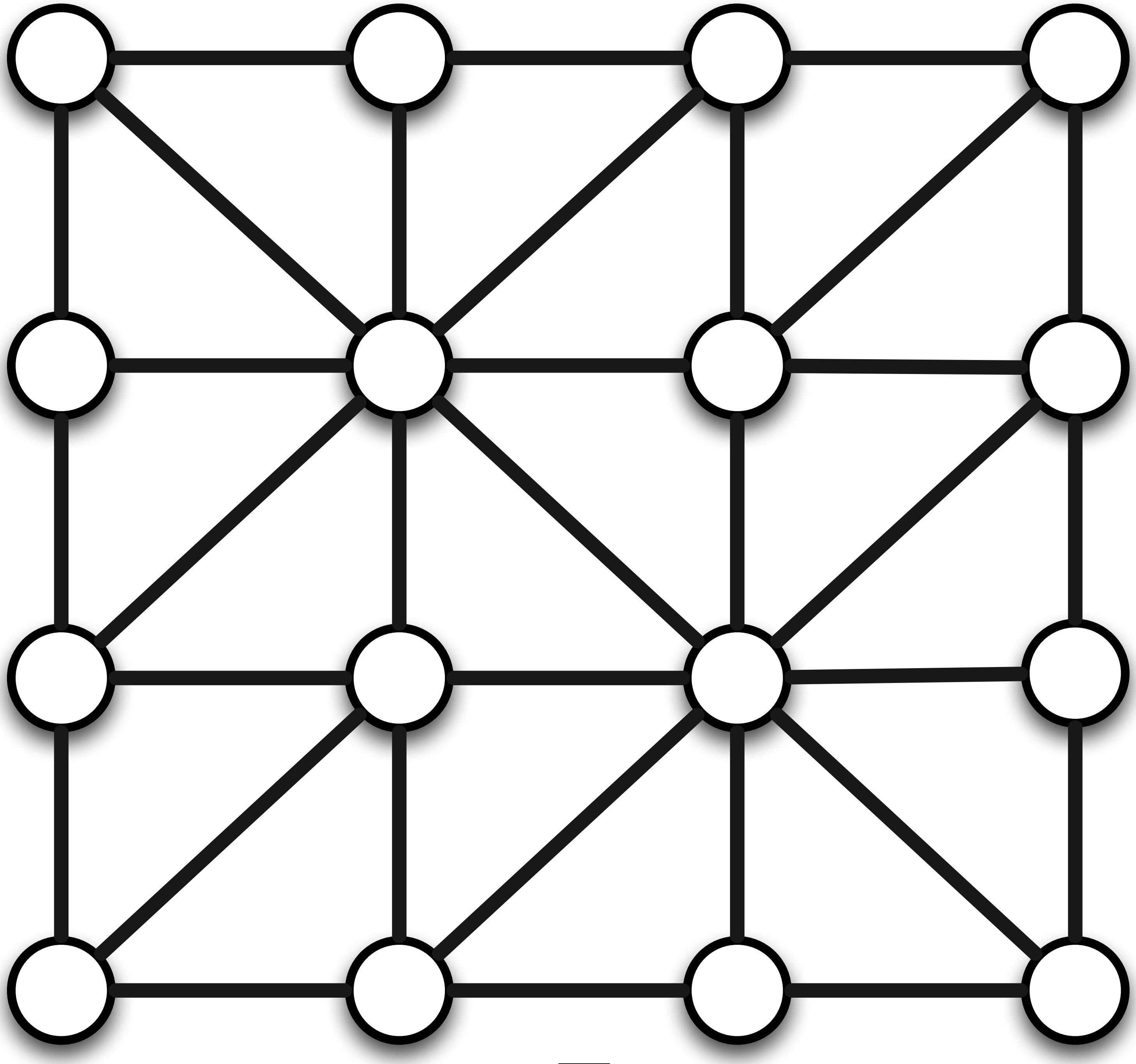


Jeu 16 - Il faut casser tous les cycles

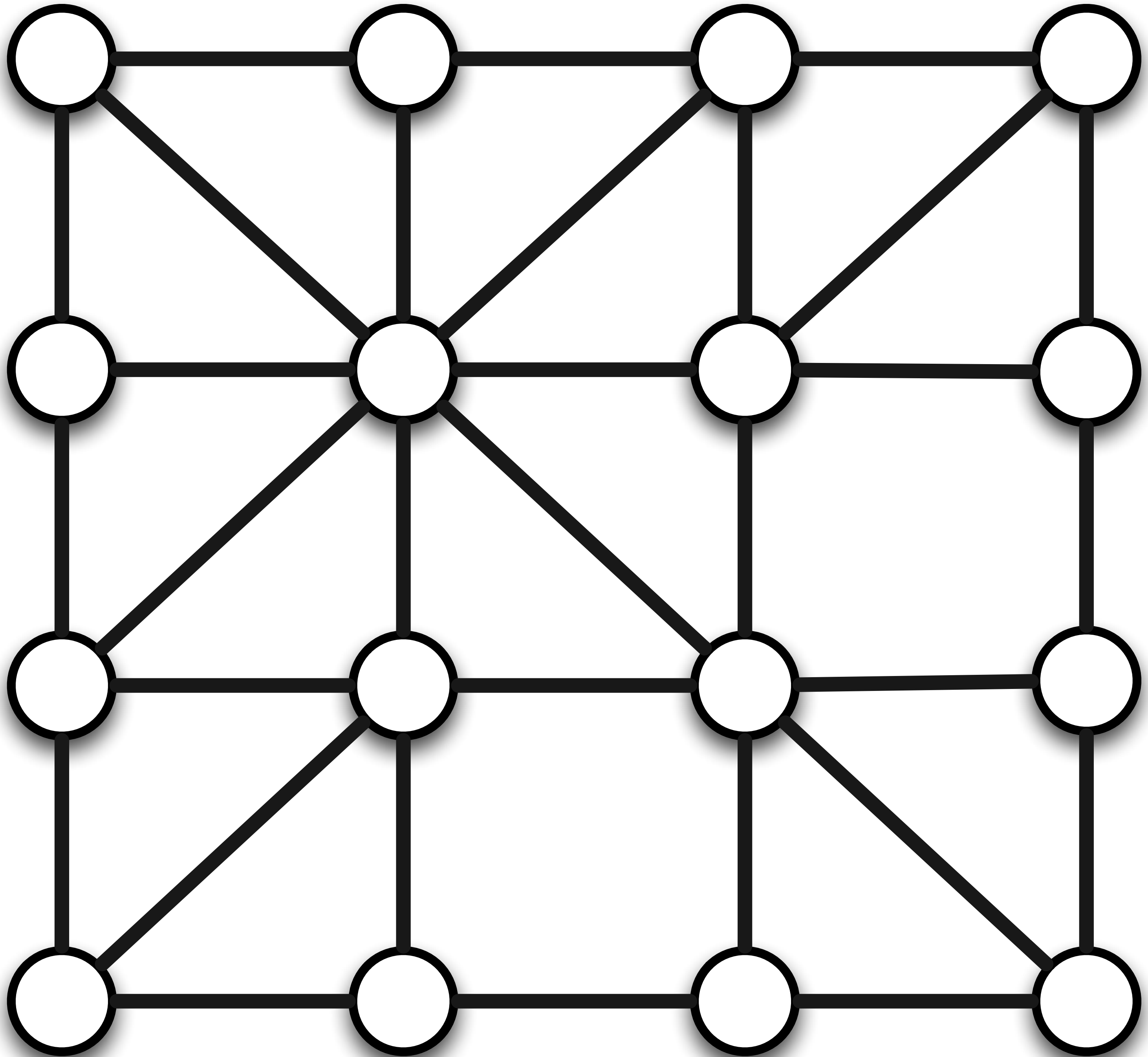


1

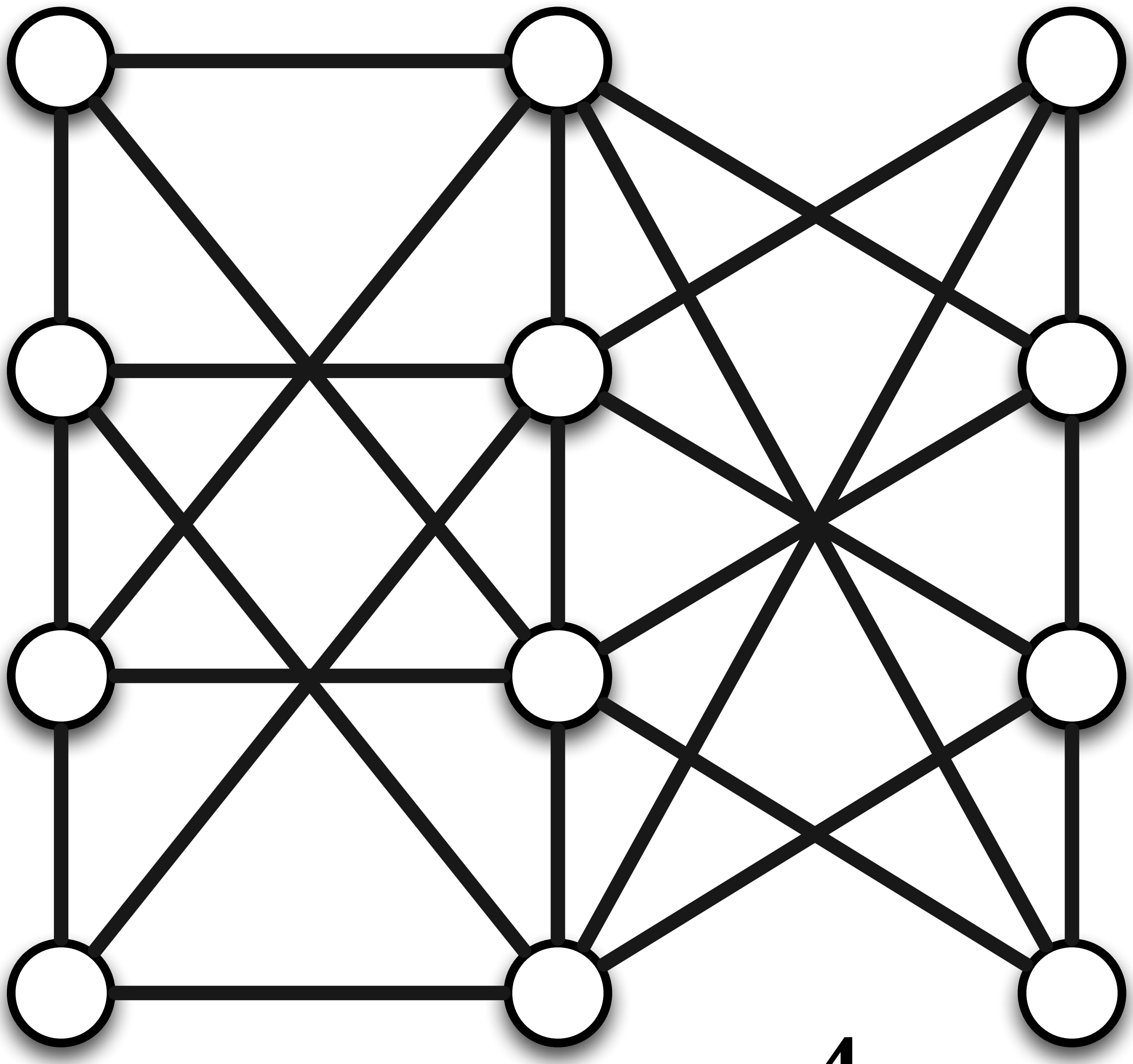
Jeu 17 - Il faut casser tous les cycles



Jeu 18 - Il faut casser tous les cycles

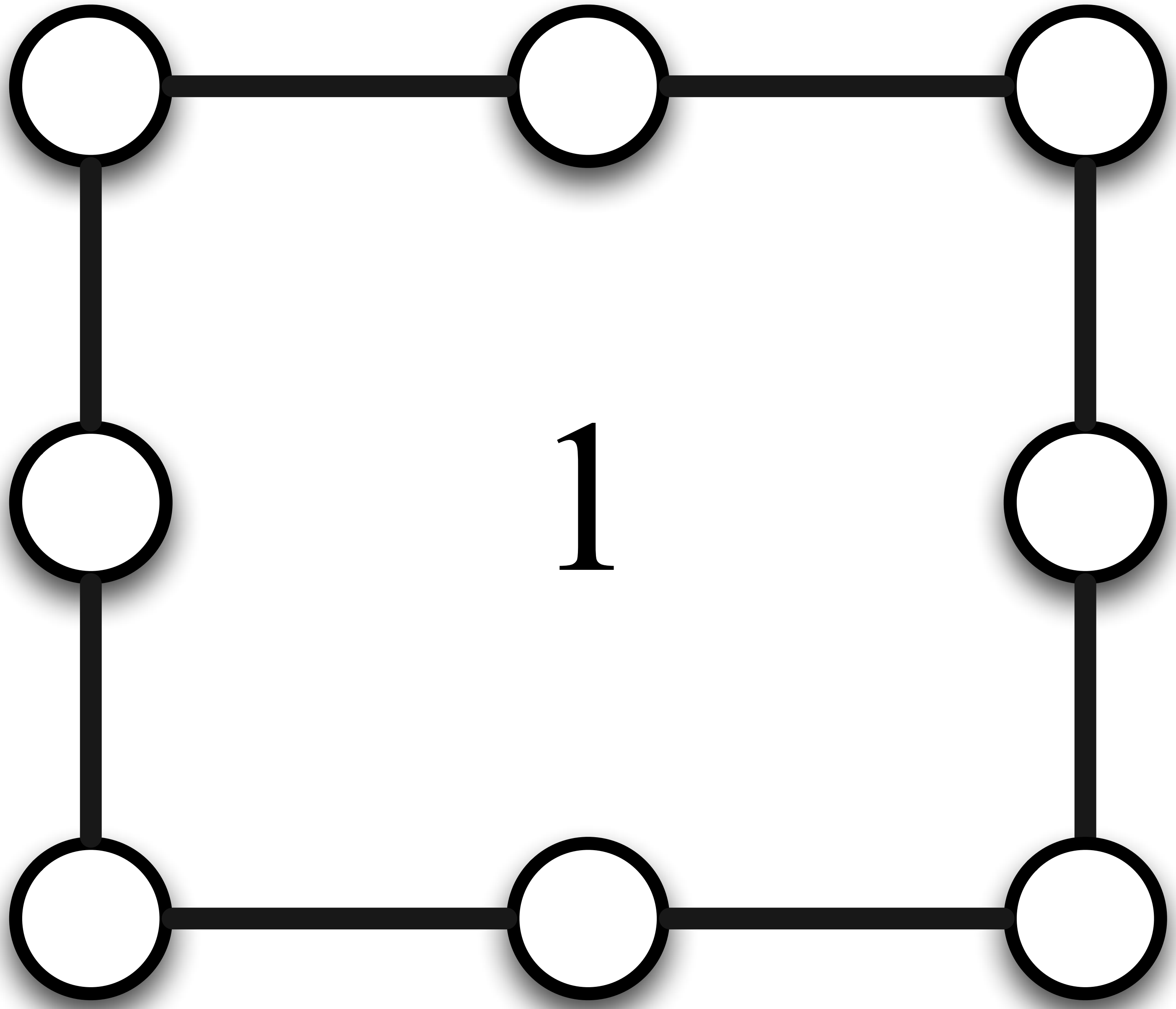


Jeu 19 - Il faut casser tous les cycles

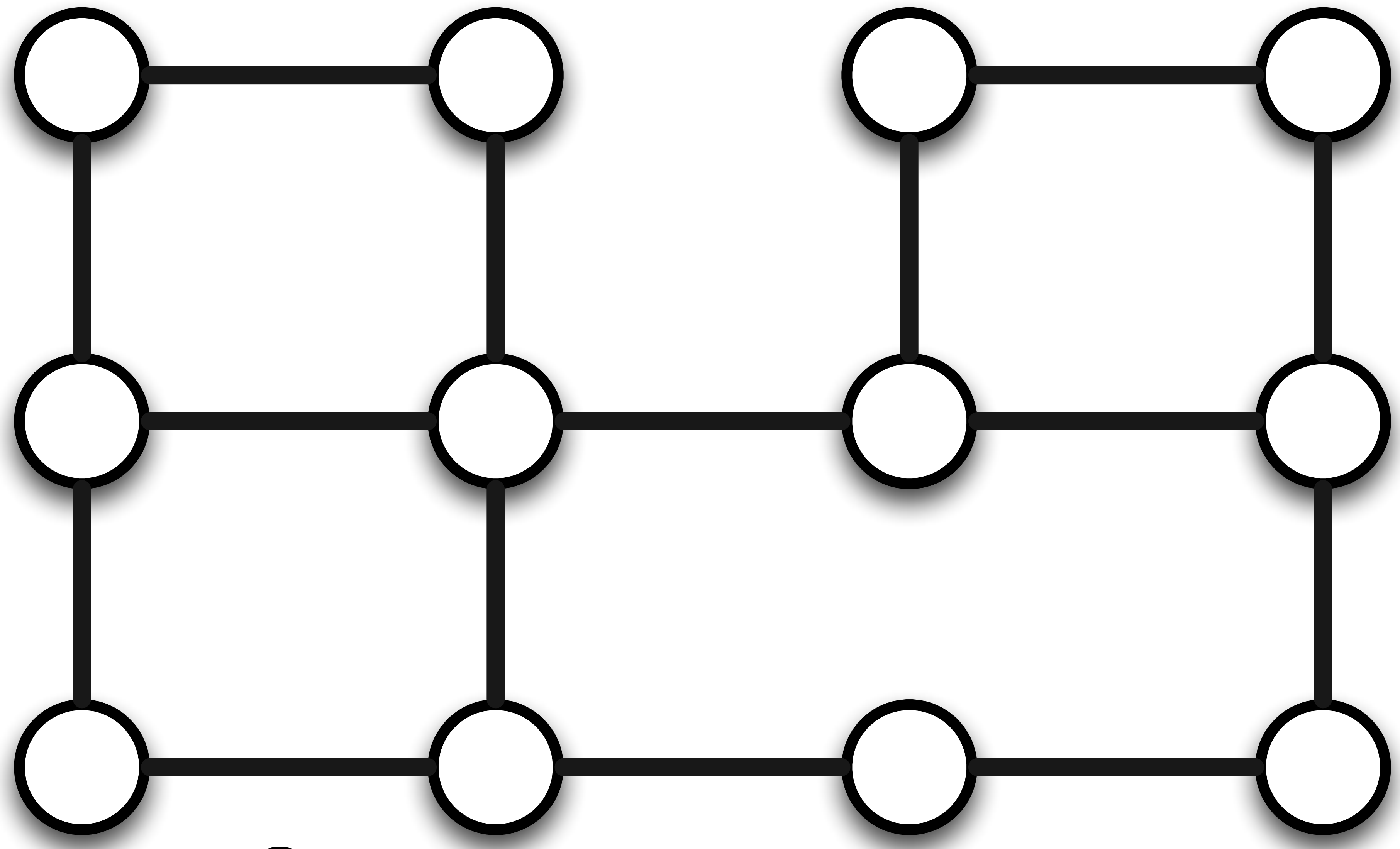


4

Jeu 20 - Il faut casser tous les cycles

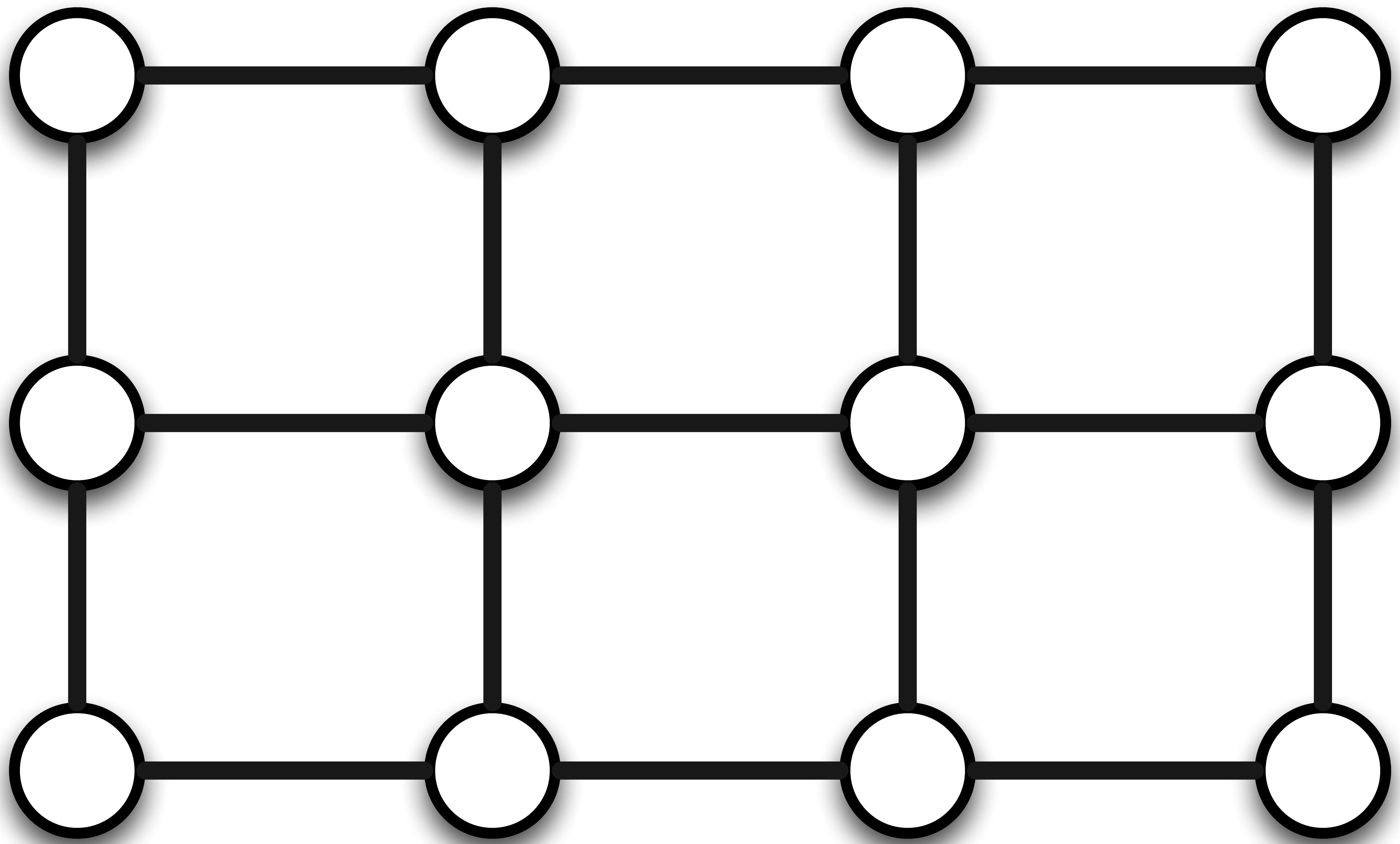


Jeu 21 - Il faut casser tous les cycles



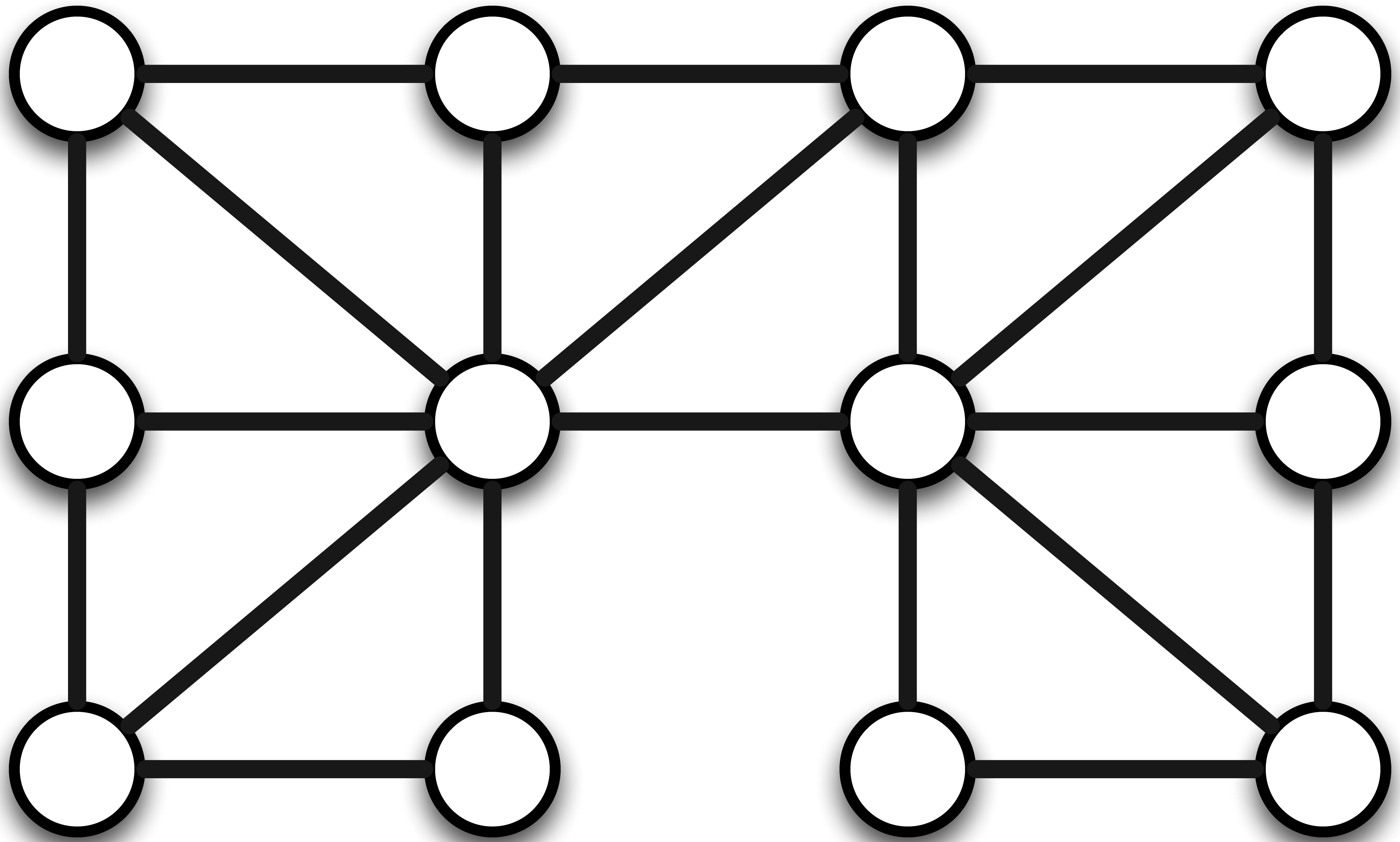
2

Jeu 22 - Il faut casser tous les cycles



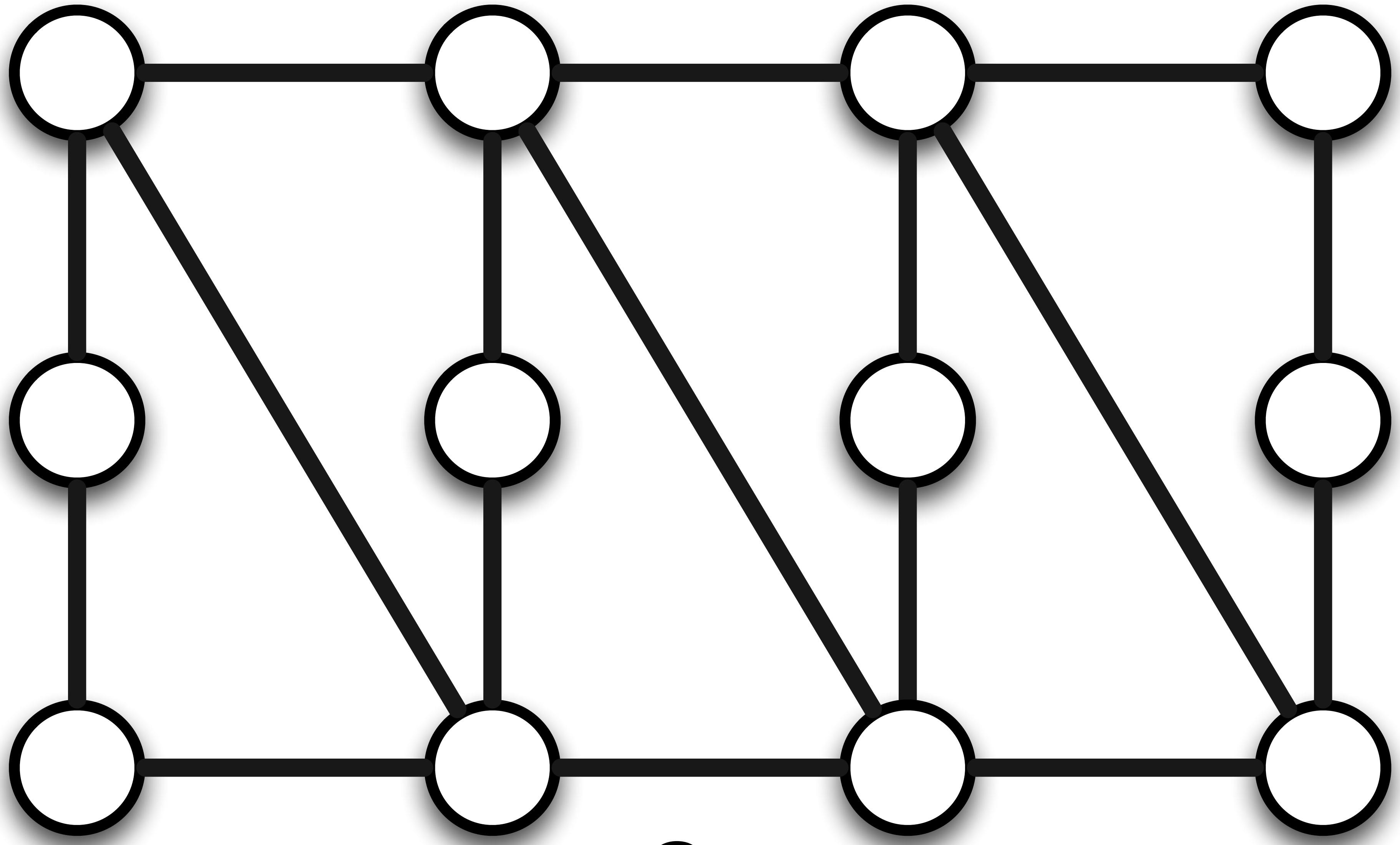
3

Jeu 23 - Il faut casser tous les cycles



3

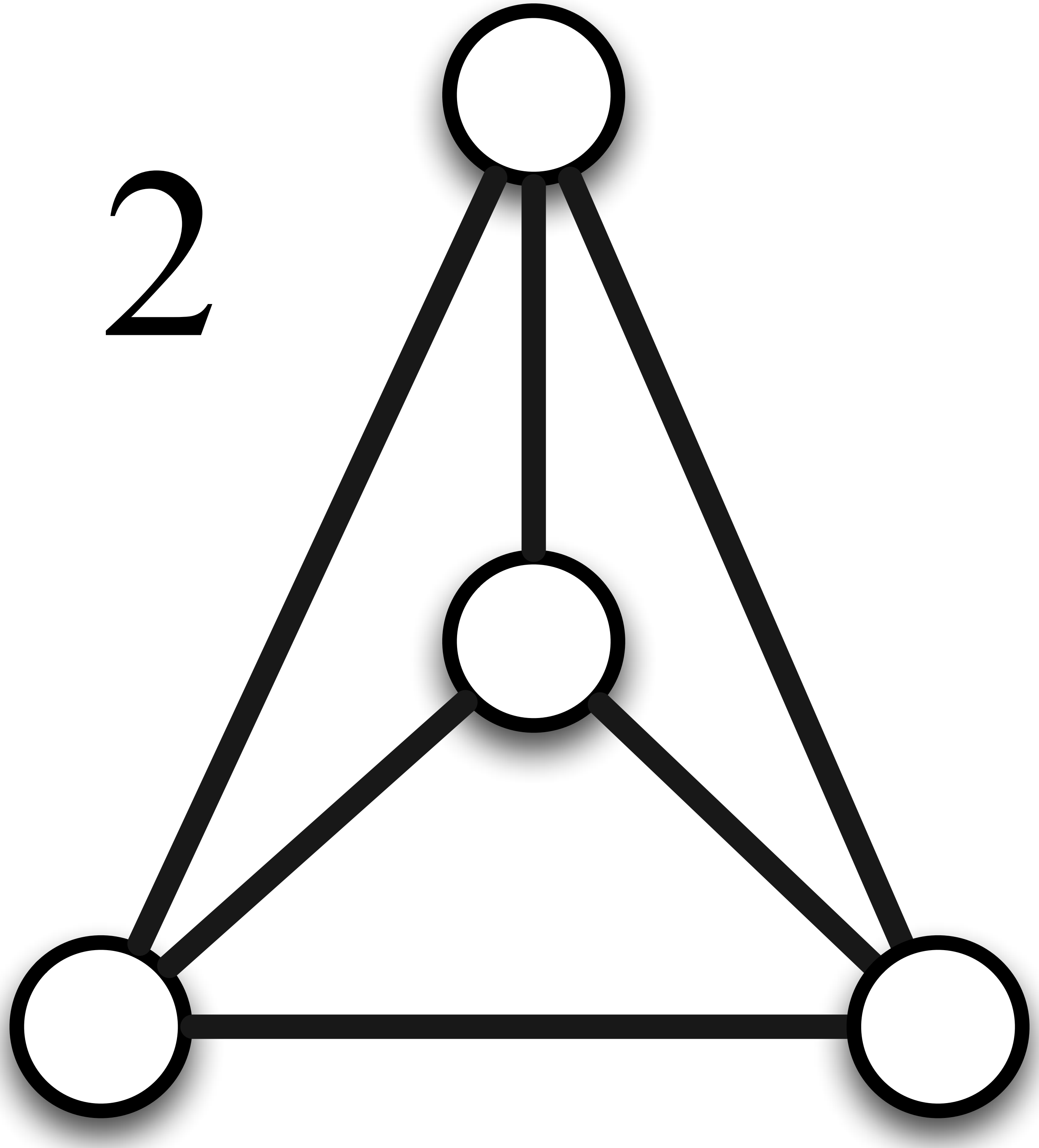
Jeu 24 - Il faut casser tous les cycles



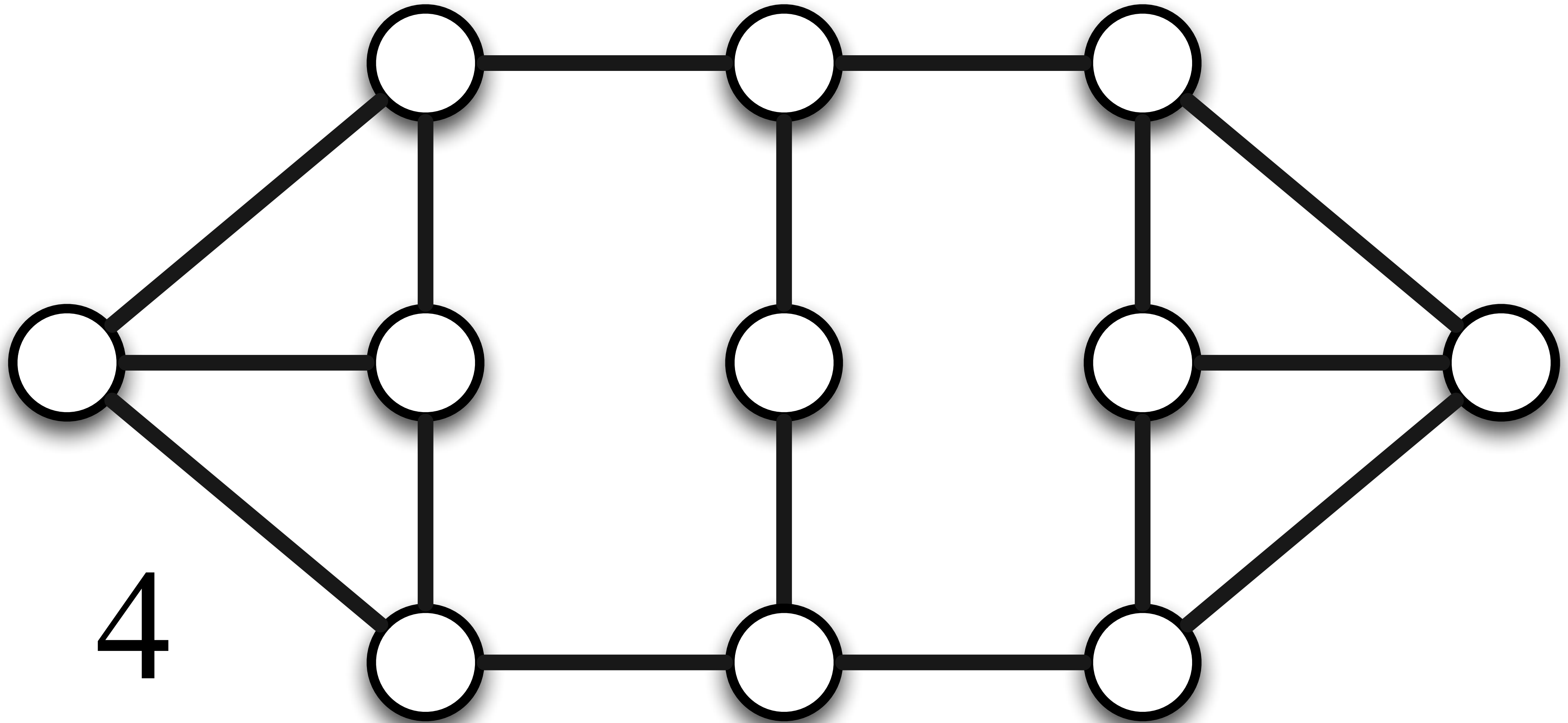
3

Jeu 25 - Il faut casser tous les cycles

2

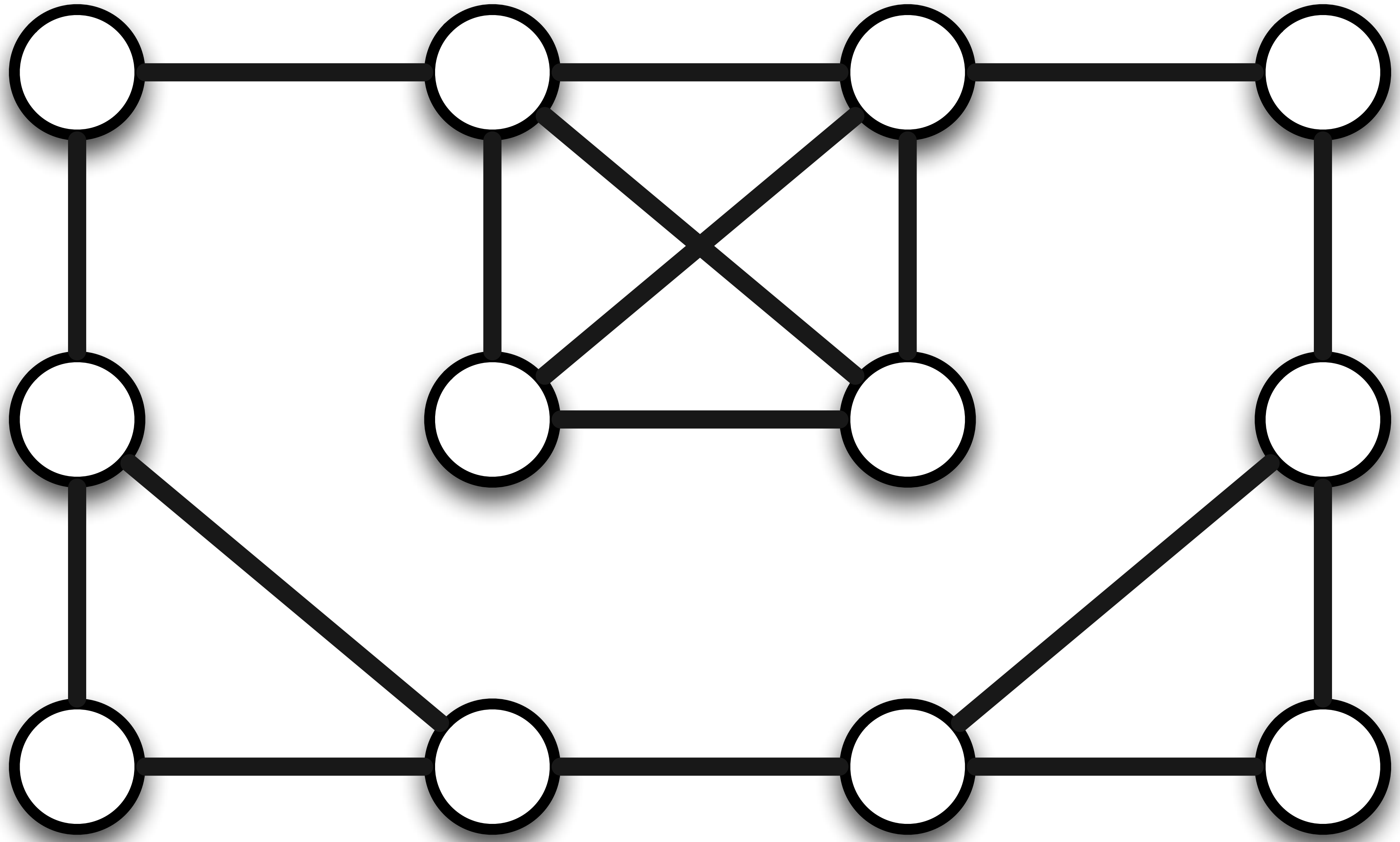


Jeu 26 - Il faut casser tous les cycles



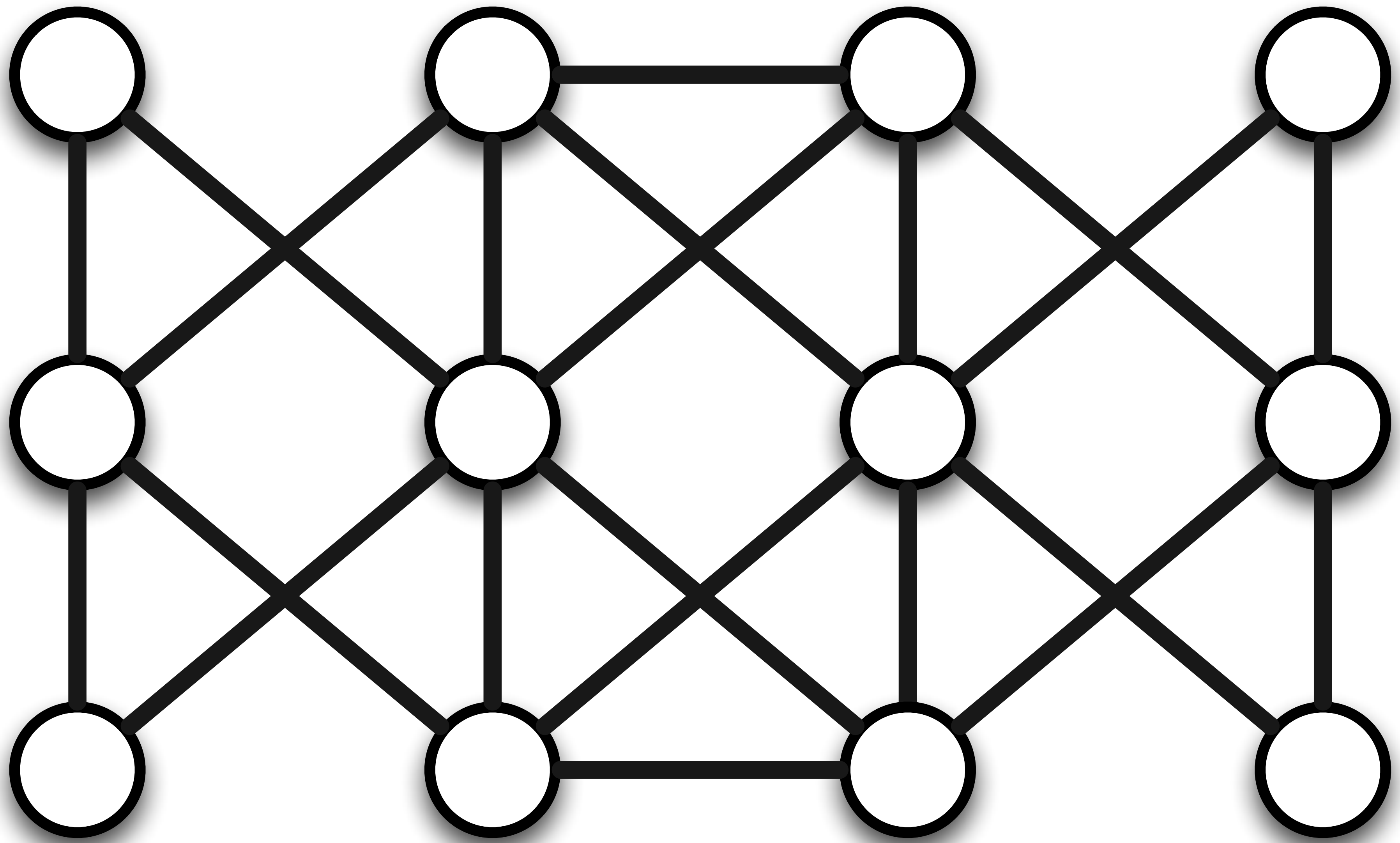
4

Jeu 27 - Il faut casser tous les cycles



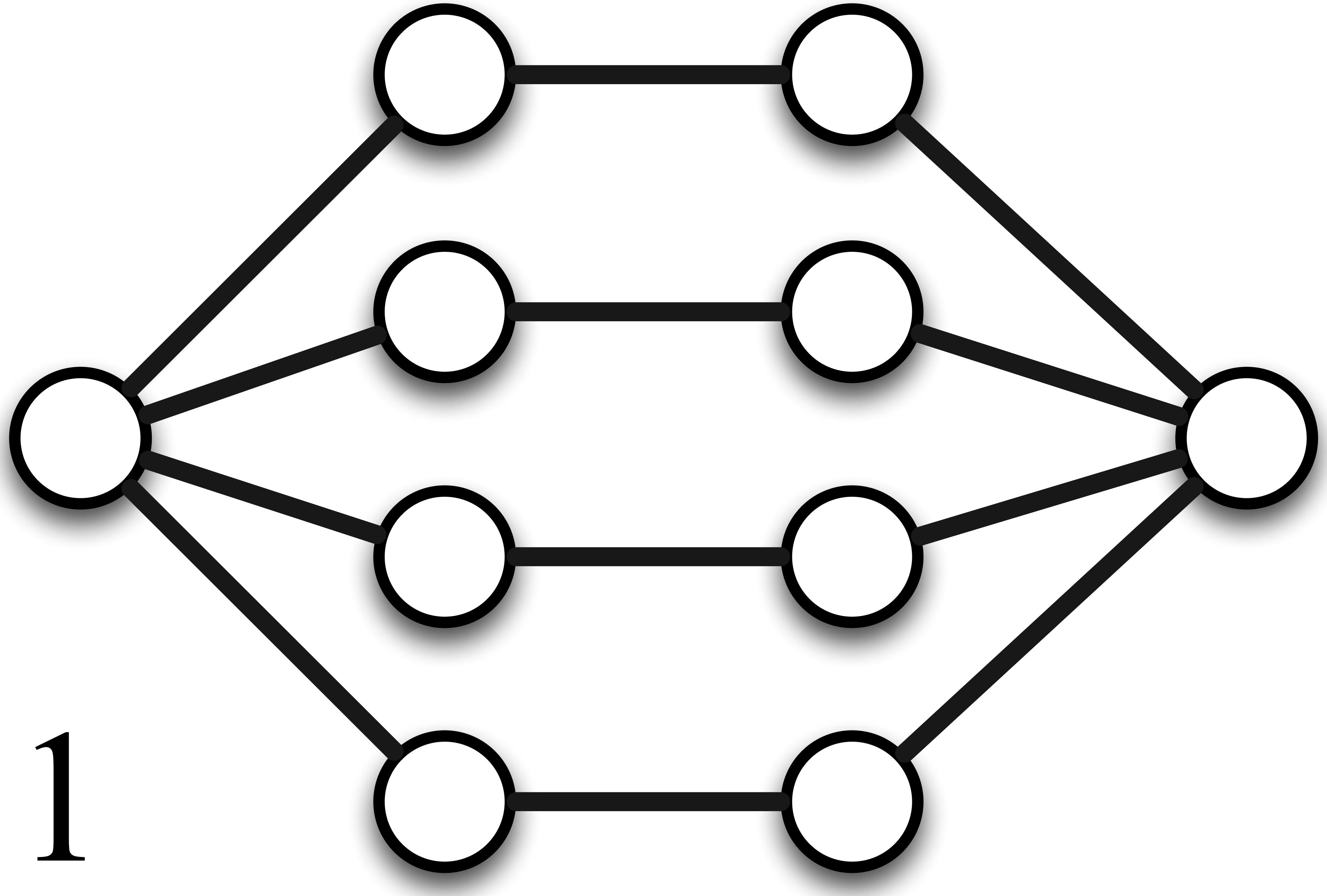
4

Jeu 28 - Il faut casser tous les cycles



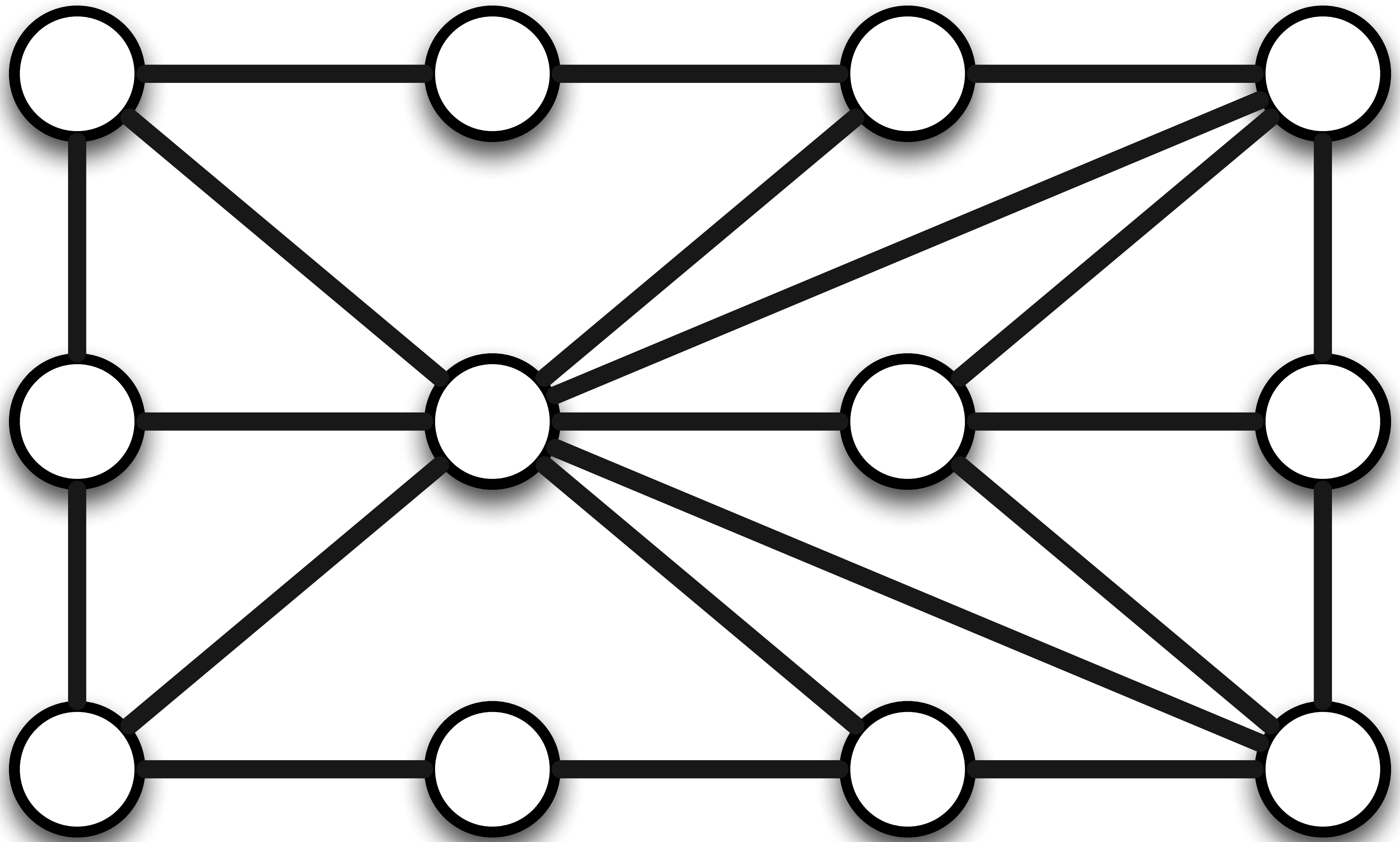
4

Jeu 29 - Il faut casser tous les cycles



1

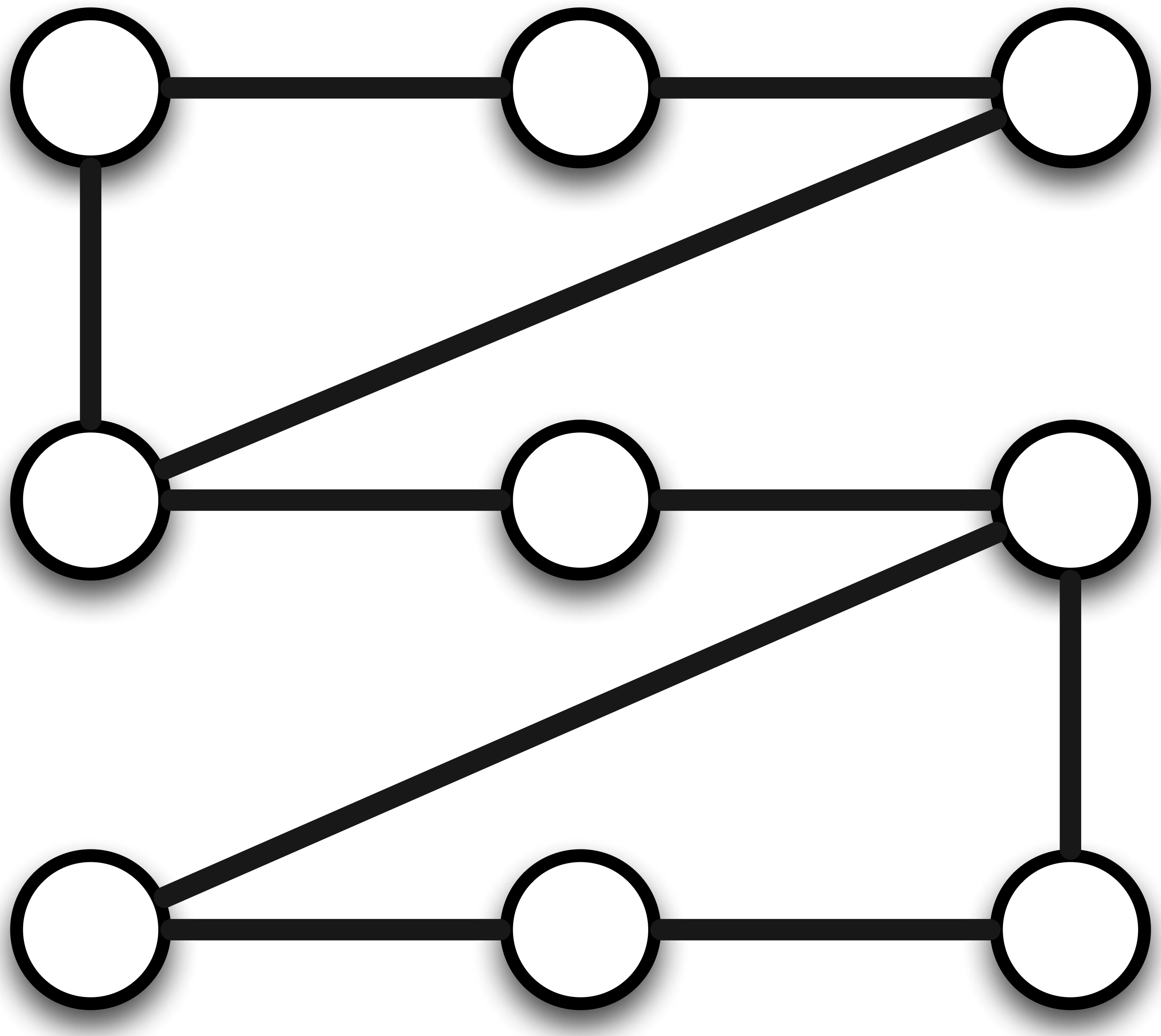
Jeu 30 - Il faut casser tous les cycles



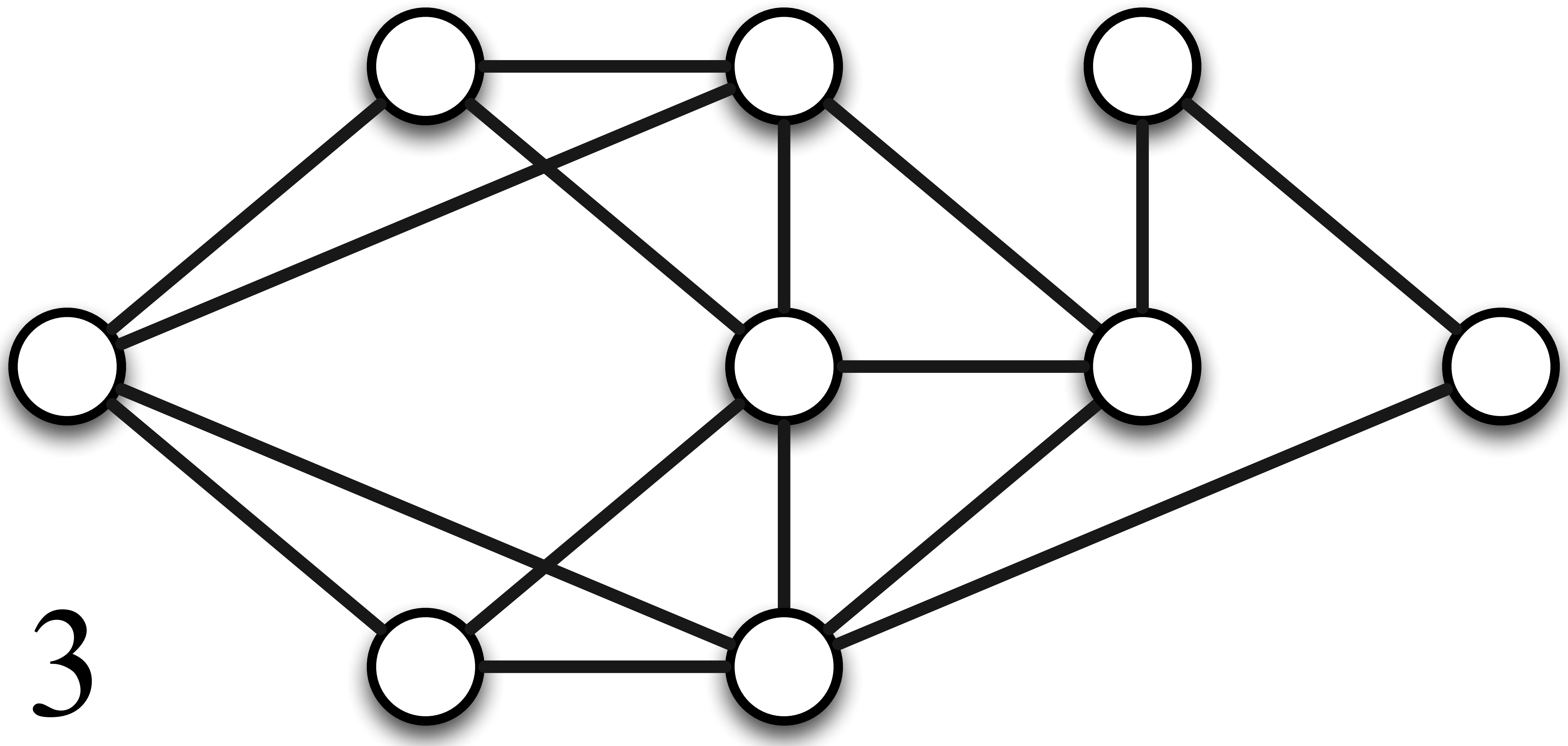
3

Jeu 31 - Il faut casser tous les cycles

2

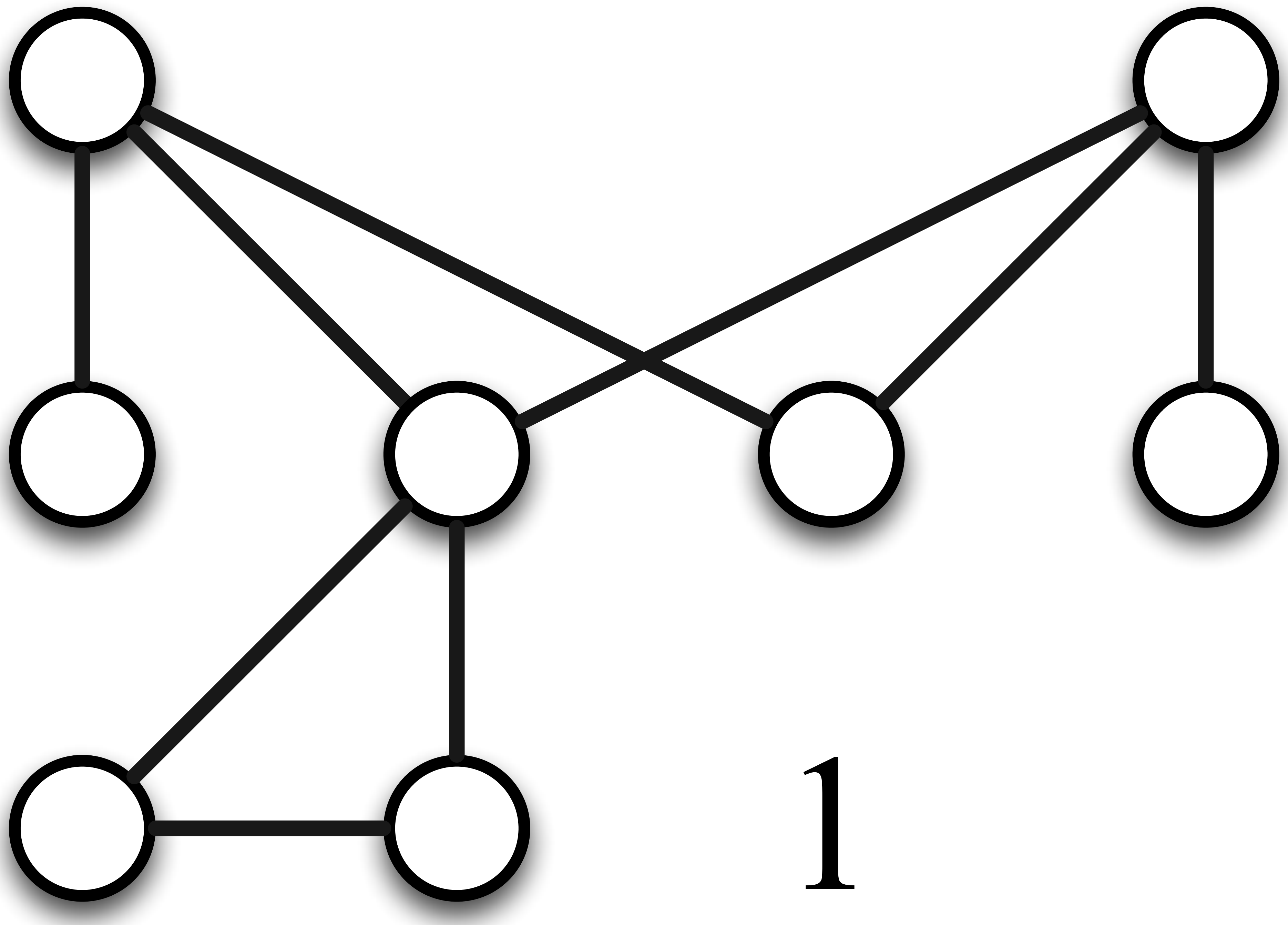


Jeu 32 - Il faut casser tous les cycles



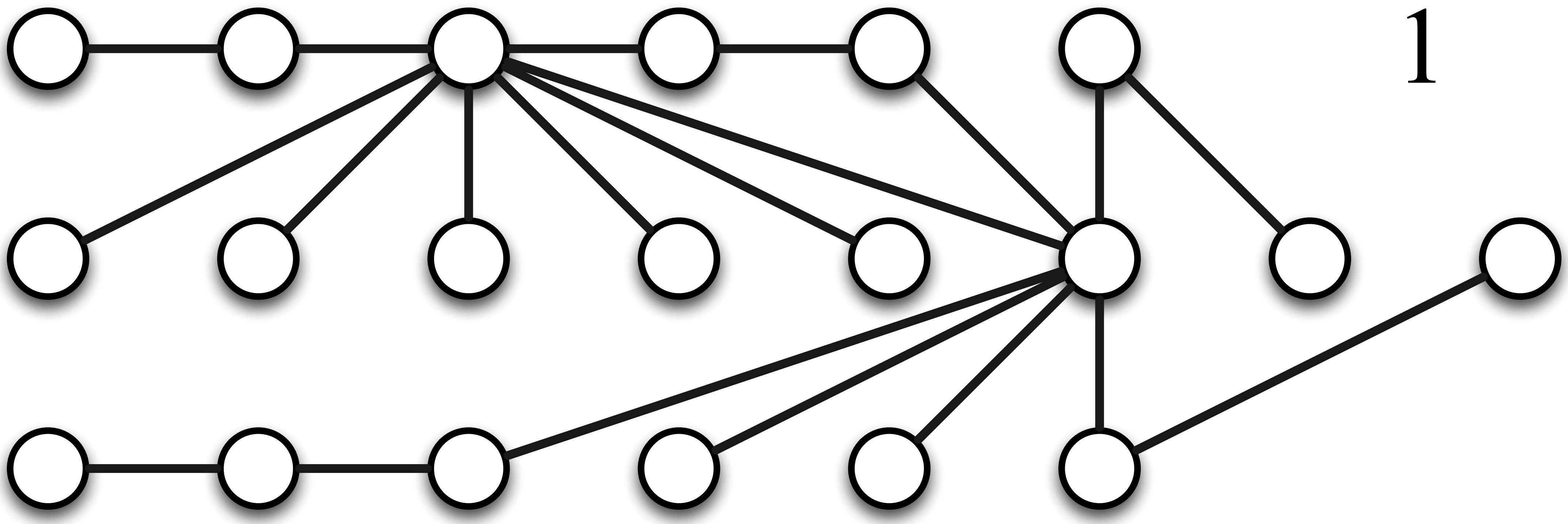
3

Jeu 33 - Il faut casser tous les cycles



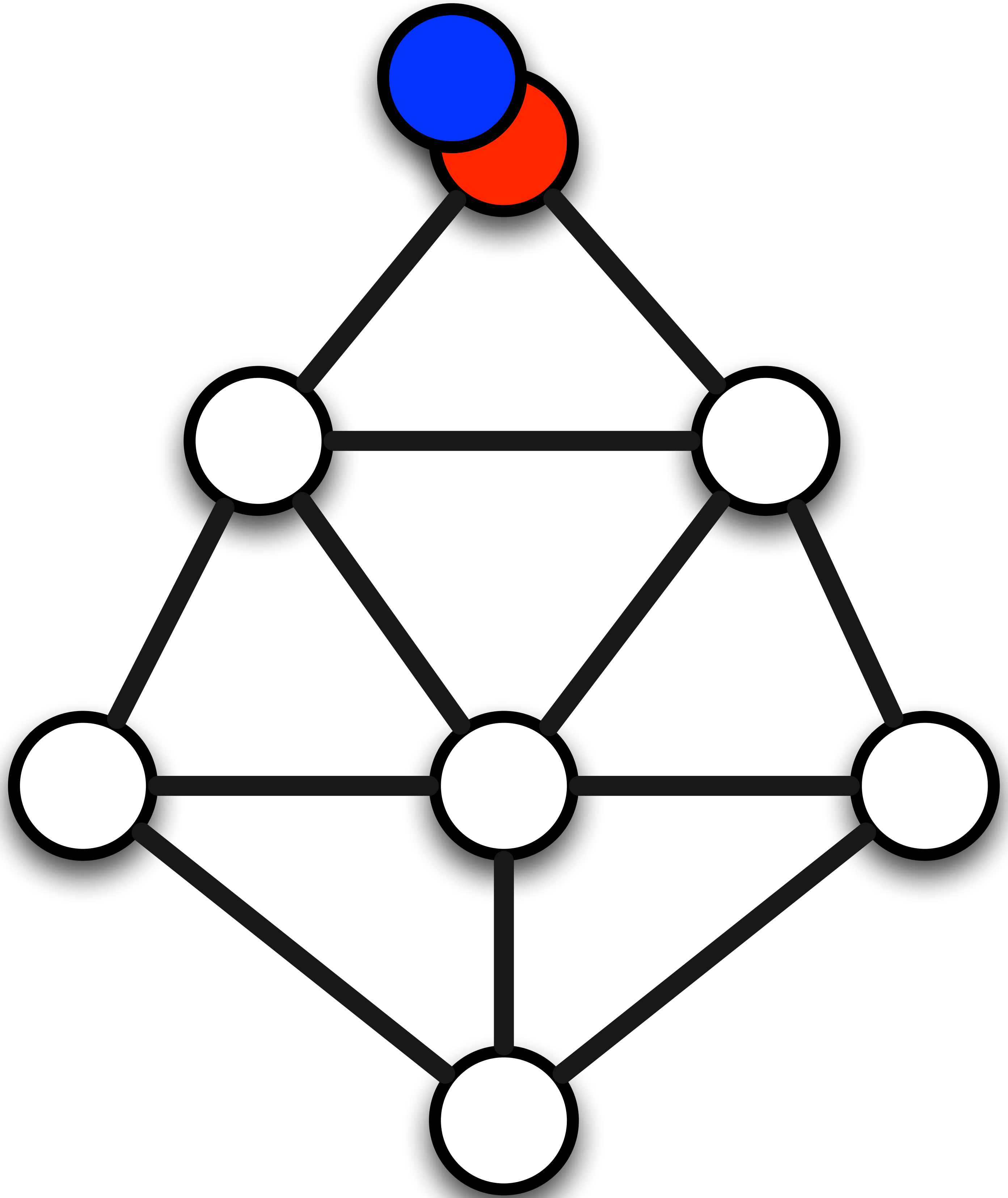
1

Jeu 34 - Il faut casser tous les cycles

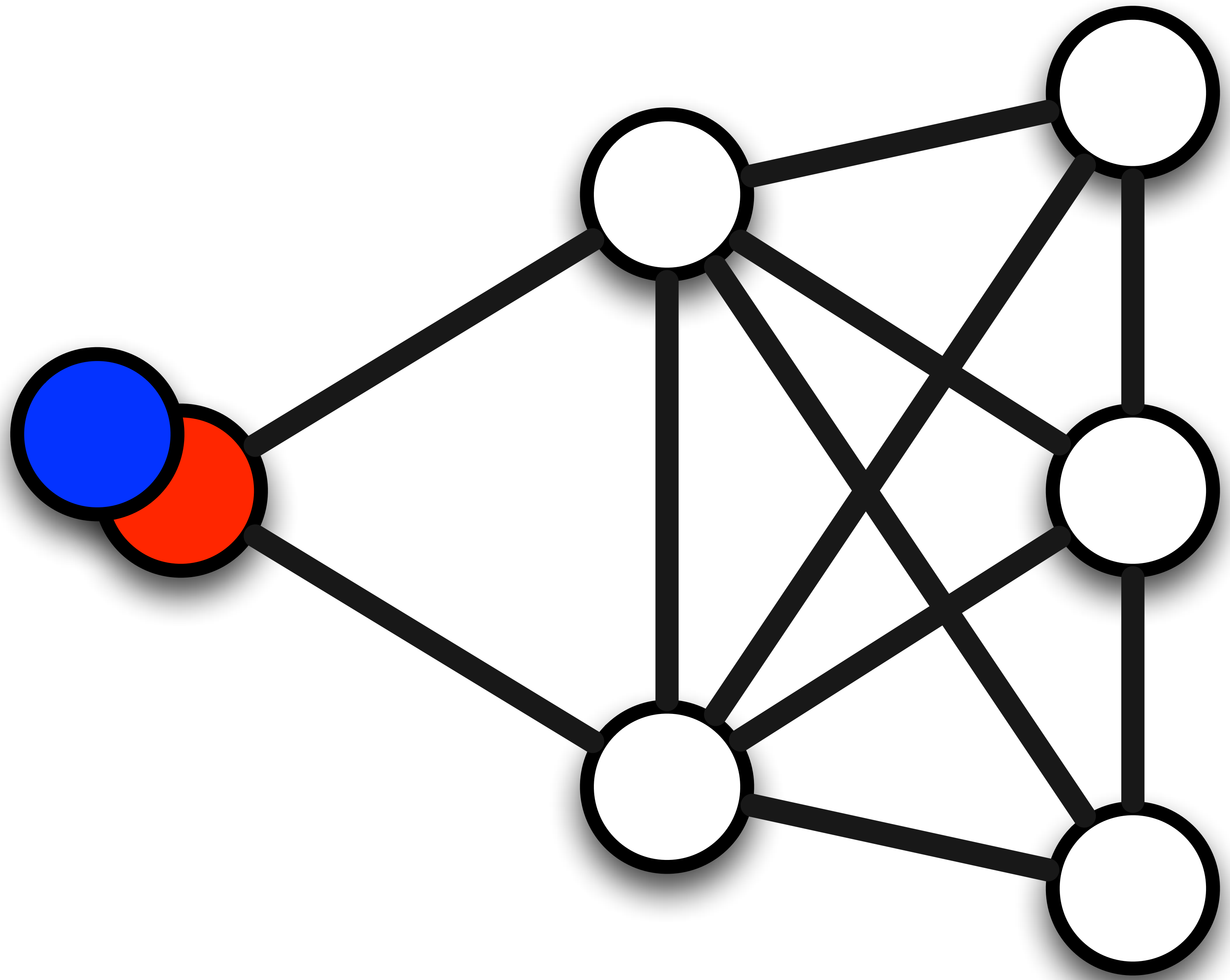


6.5 Le surfeur et le peintre

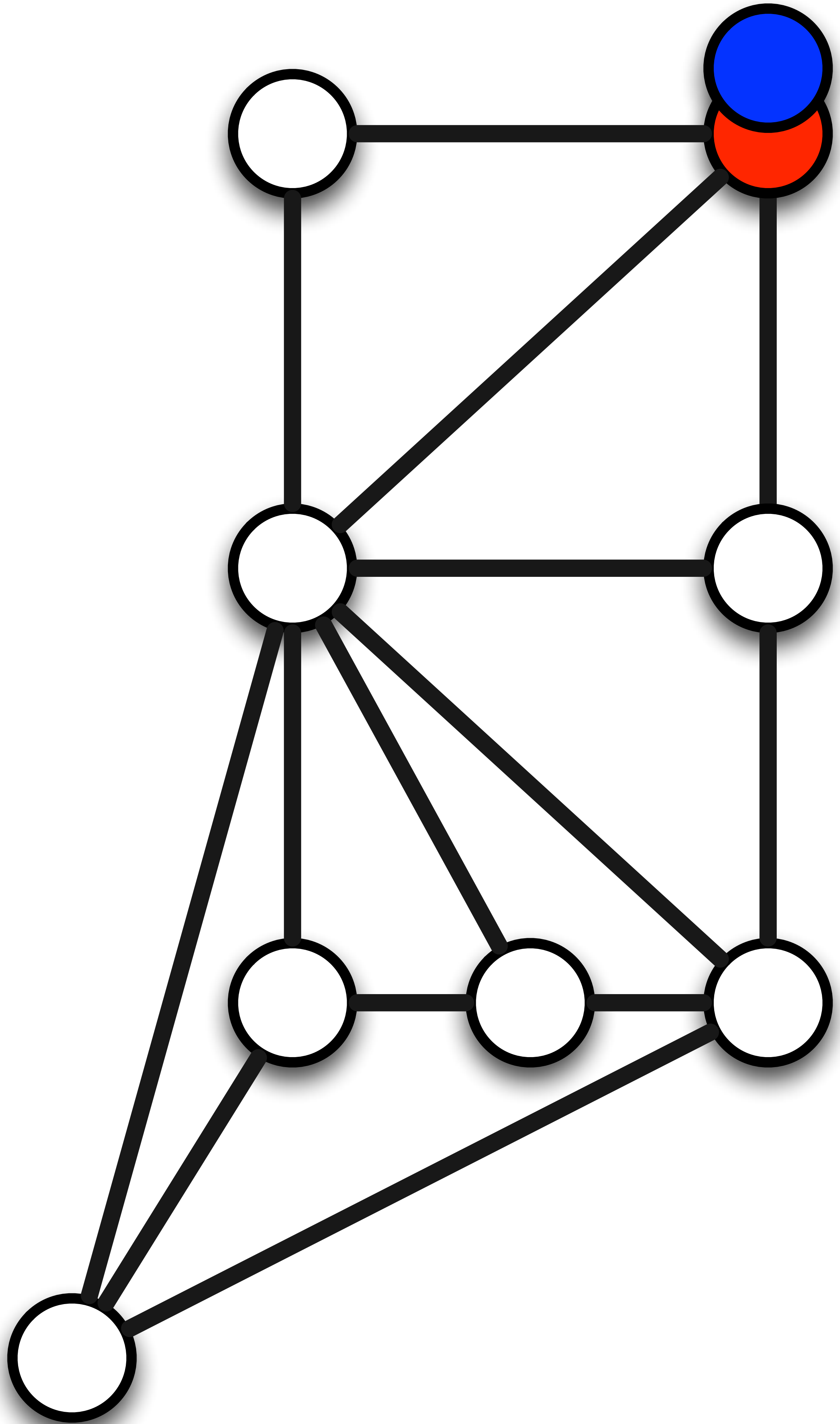
Jeu 1 - Le surfeur et le peintre



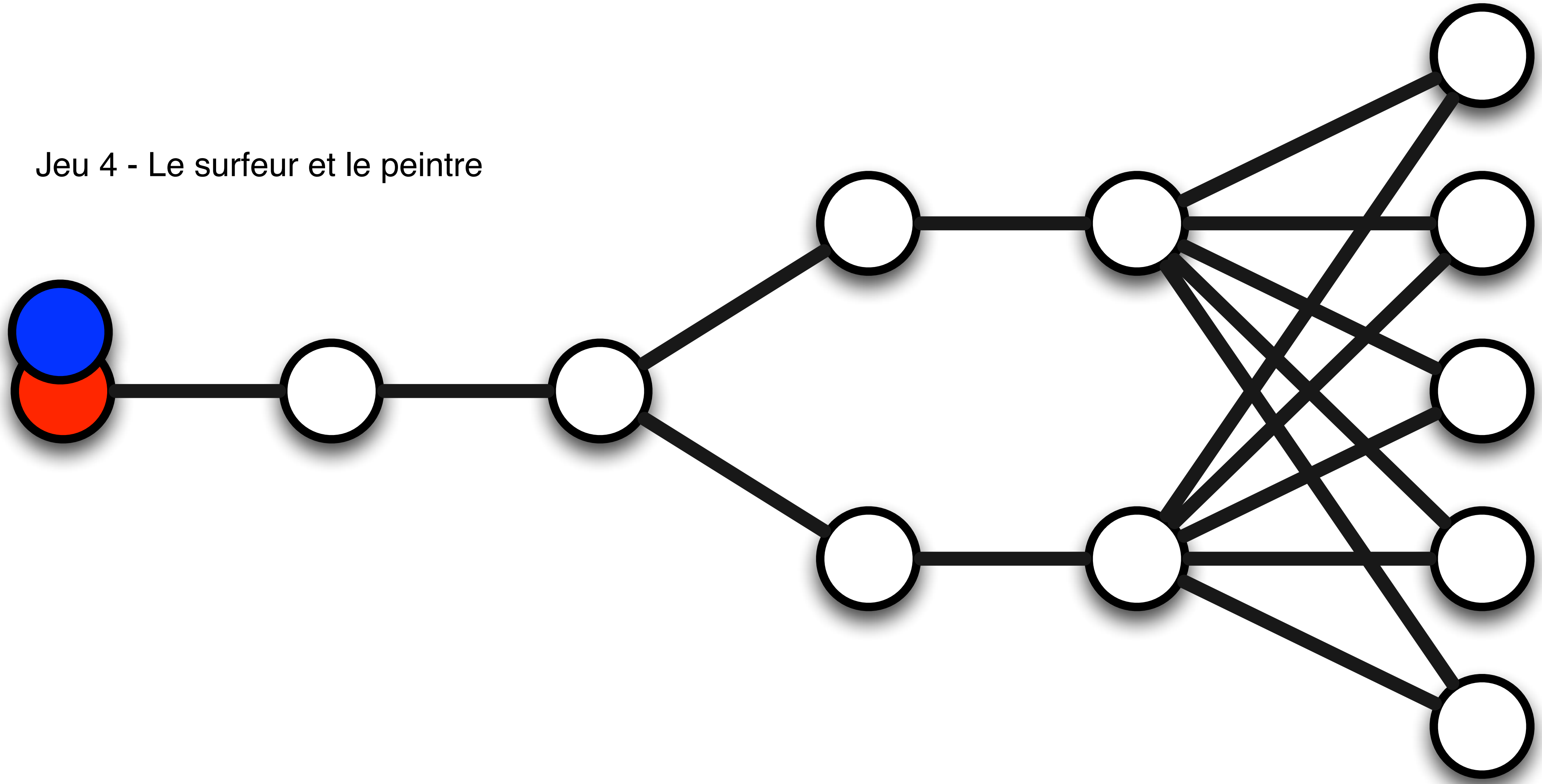
Jeu 2 - Le surfeur et le peintre



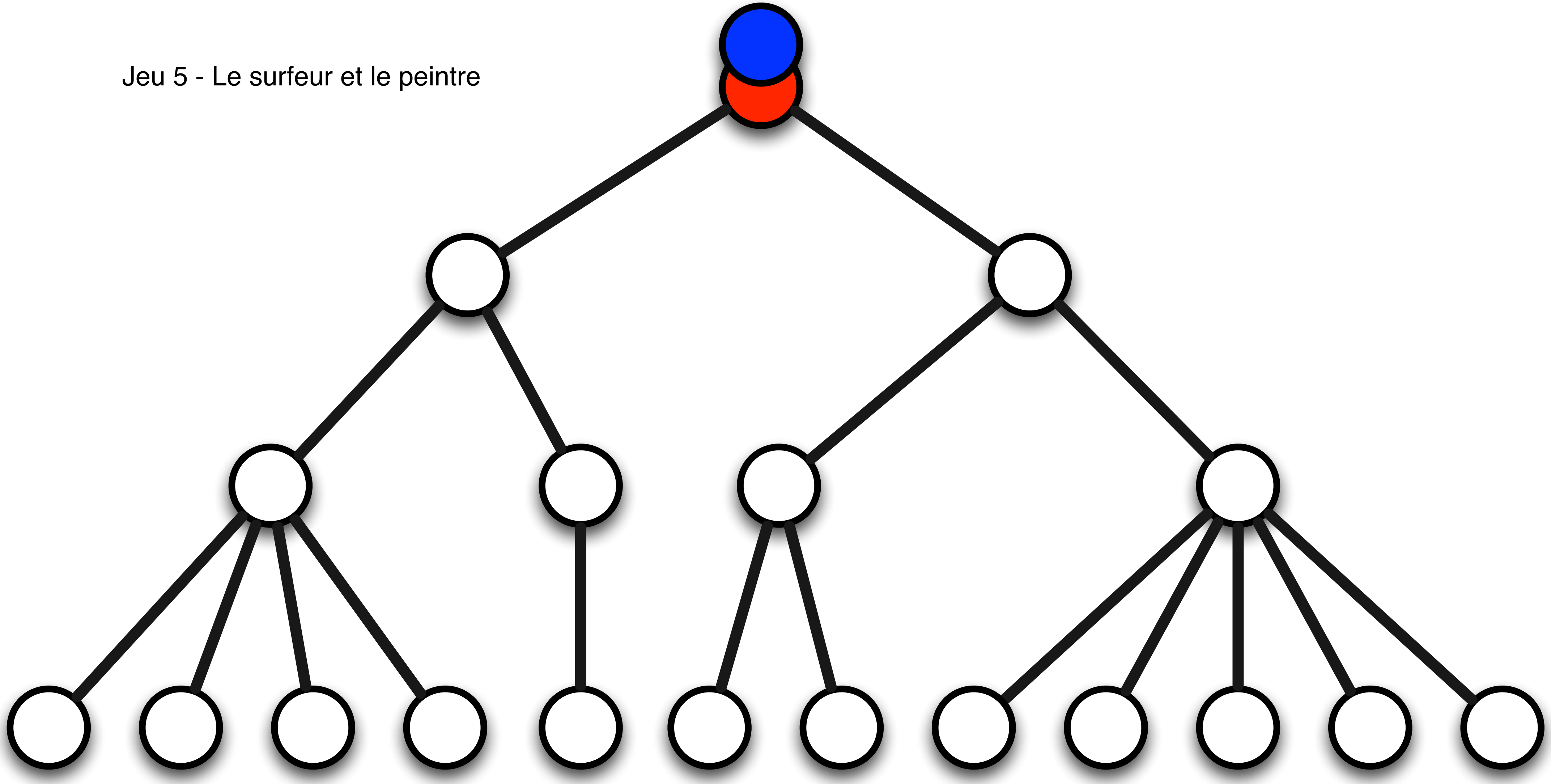
Jeu 3 - Le surfeur et le peintre



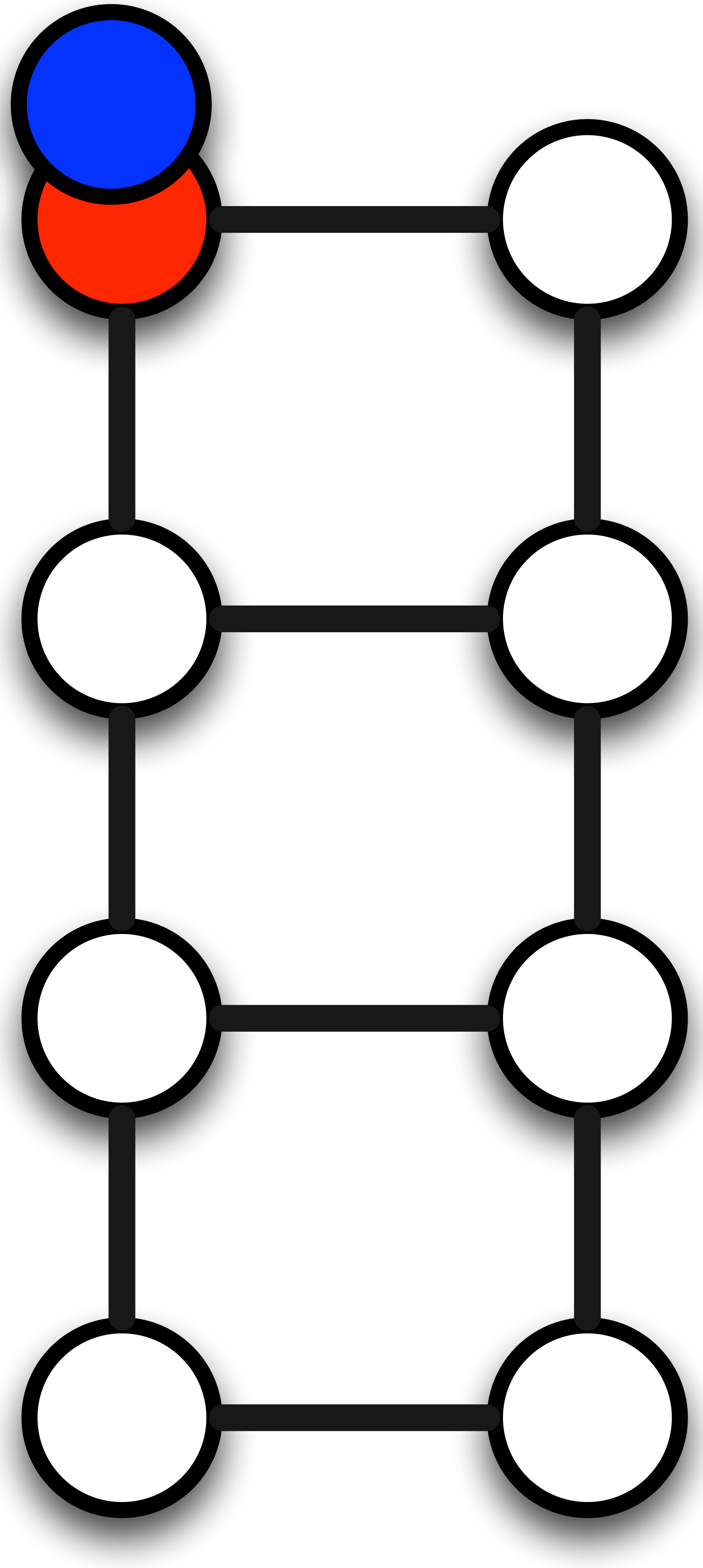
Jeu 4 - Le surfeur et le peintre



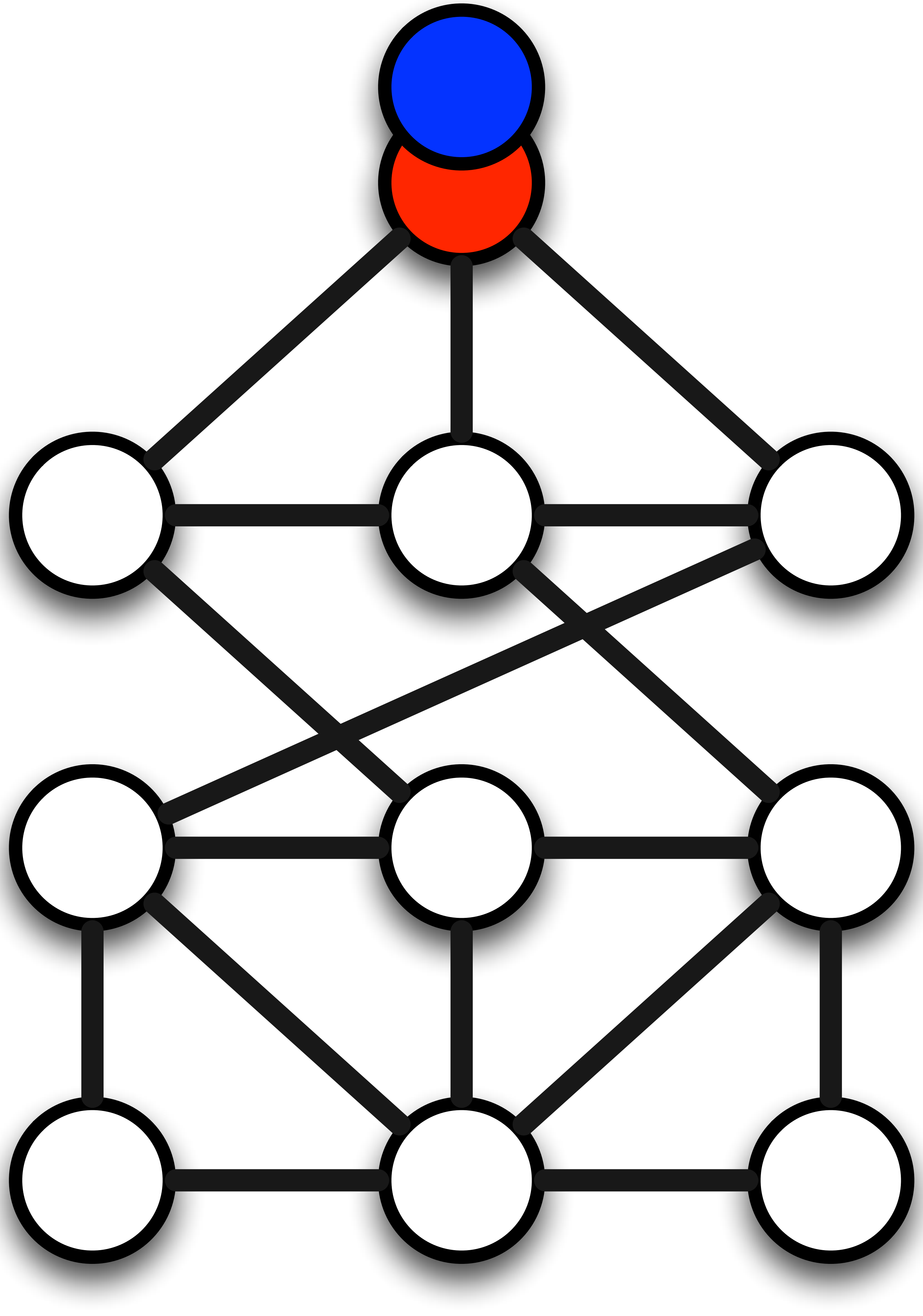
Jeu 5 - Le surfeur et le peintre



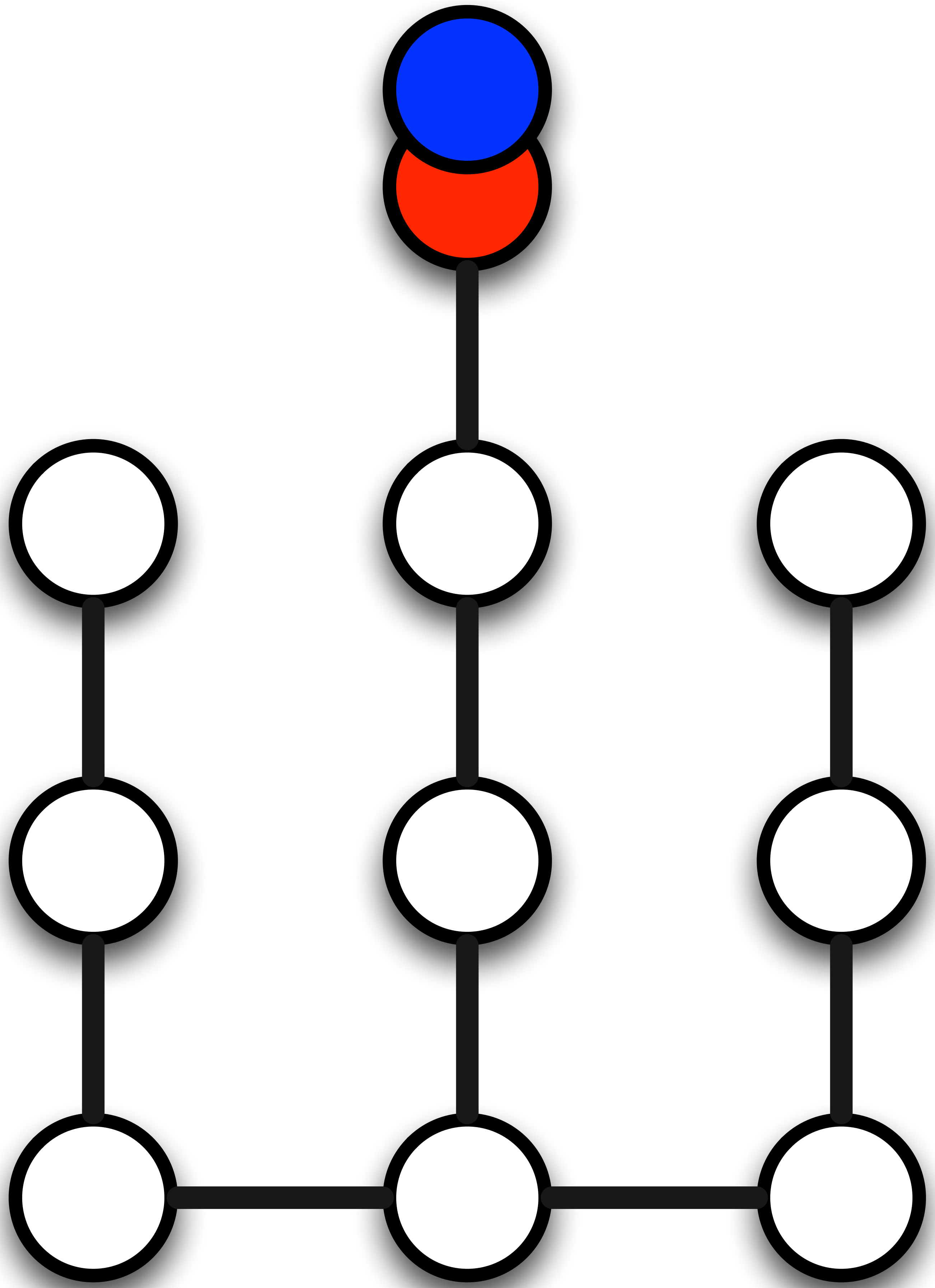
Jeu 6 - Le surfeur et le peintre



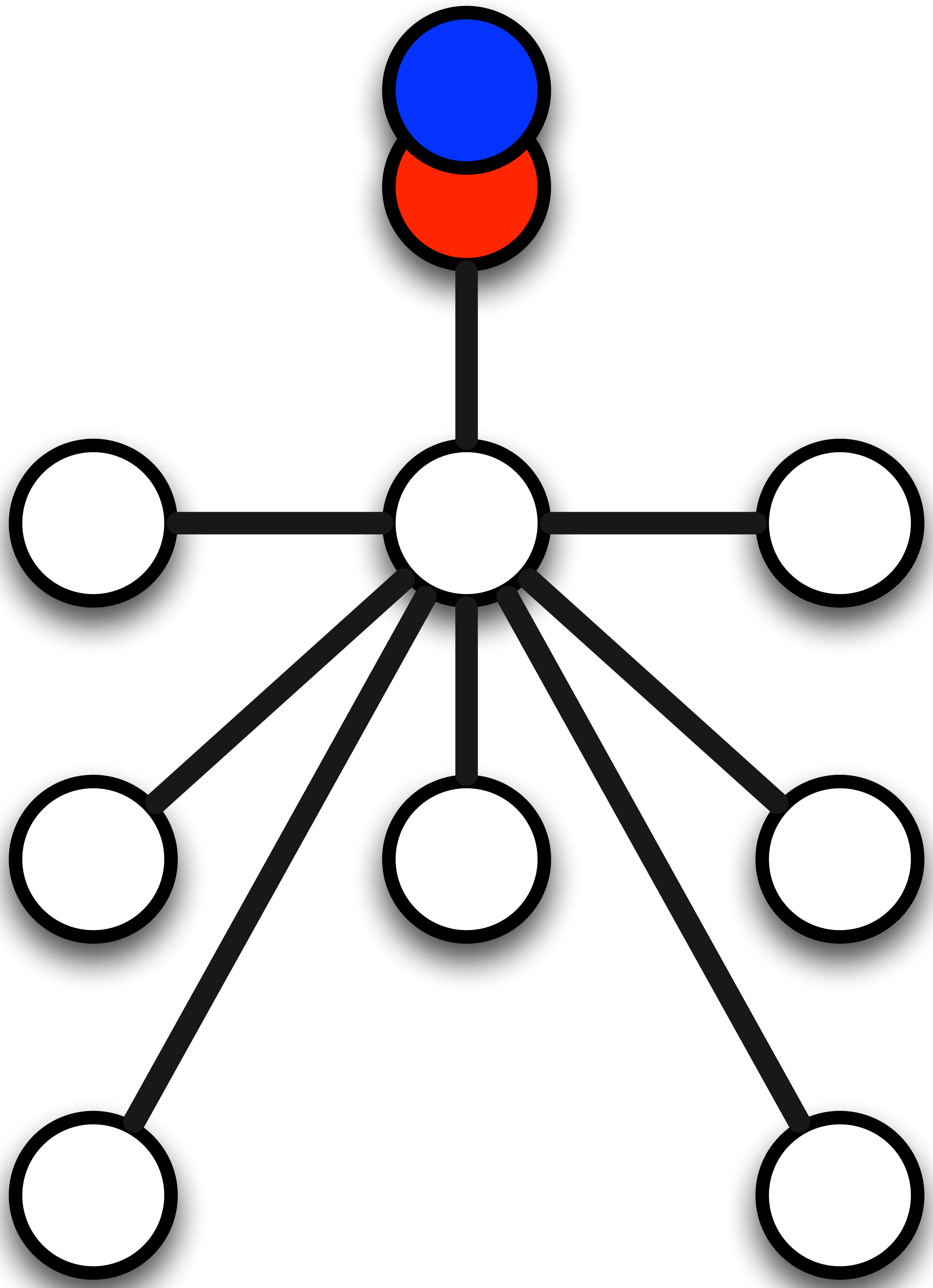
Jeu 7 - Le surfeur et le peintre



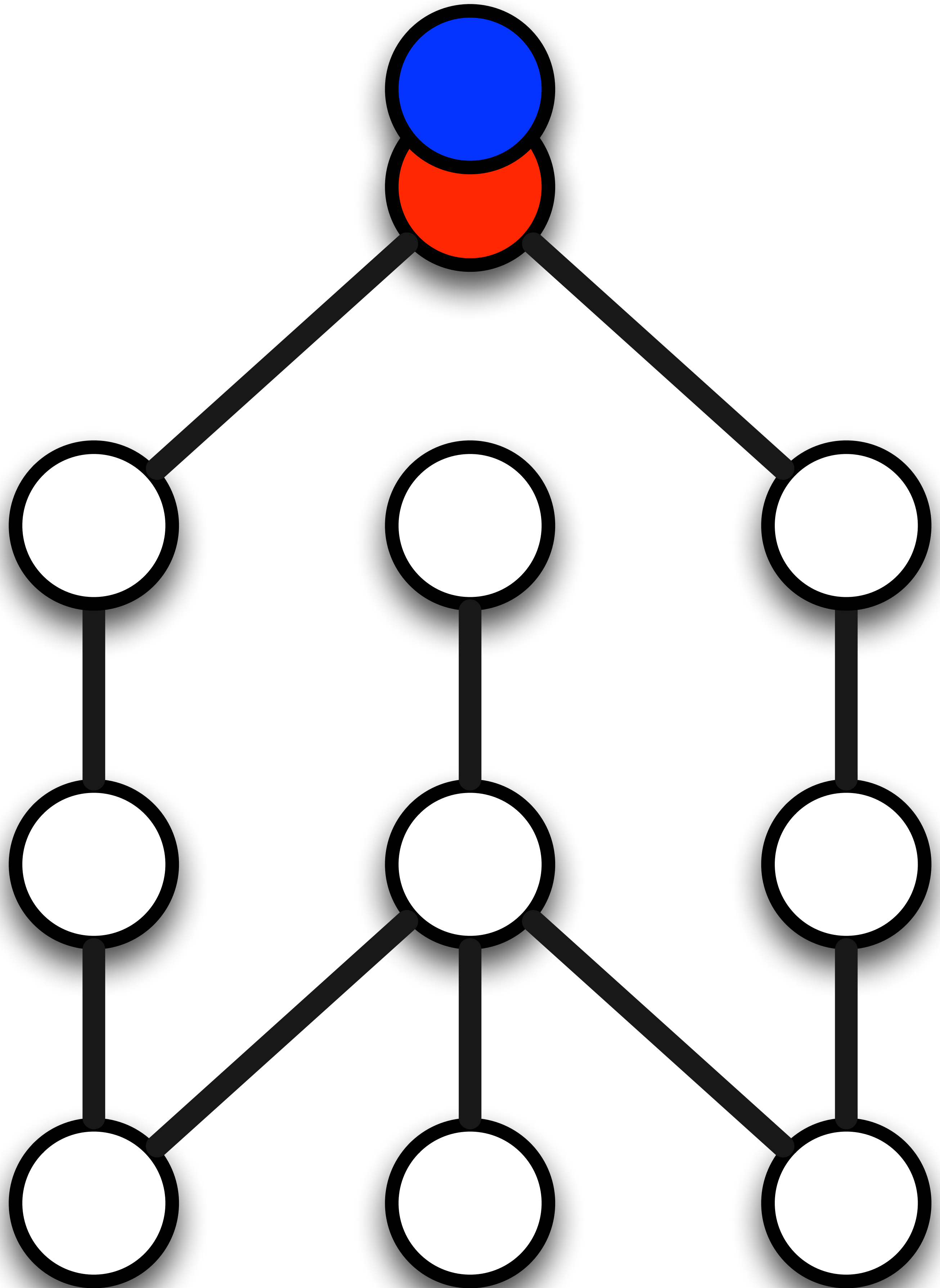
Jeu 8 - Le surfeur et le peintre



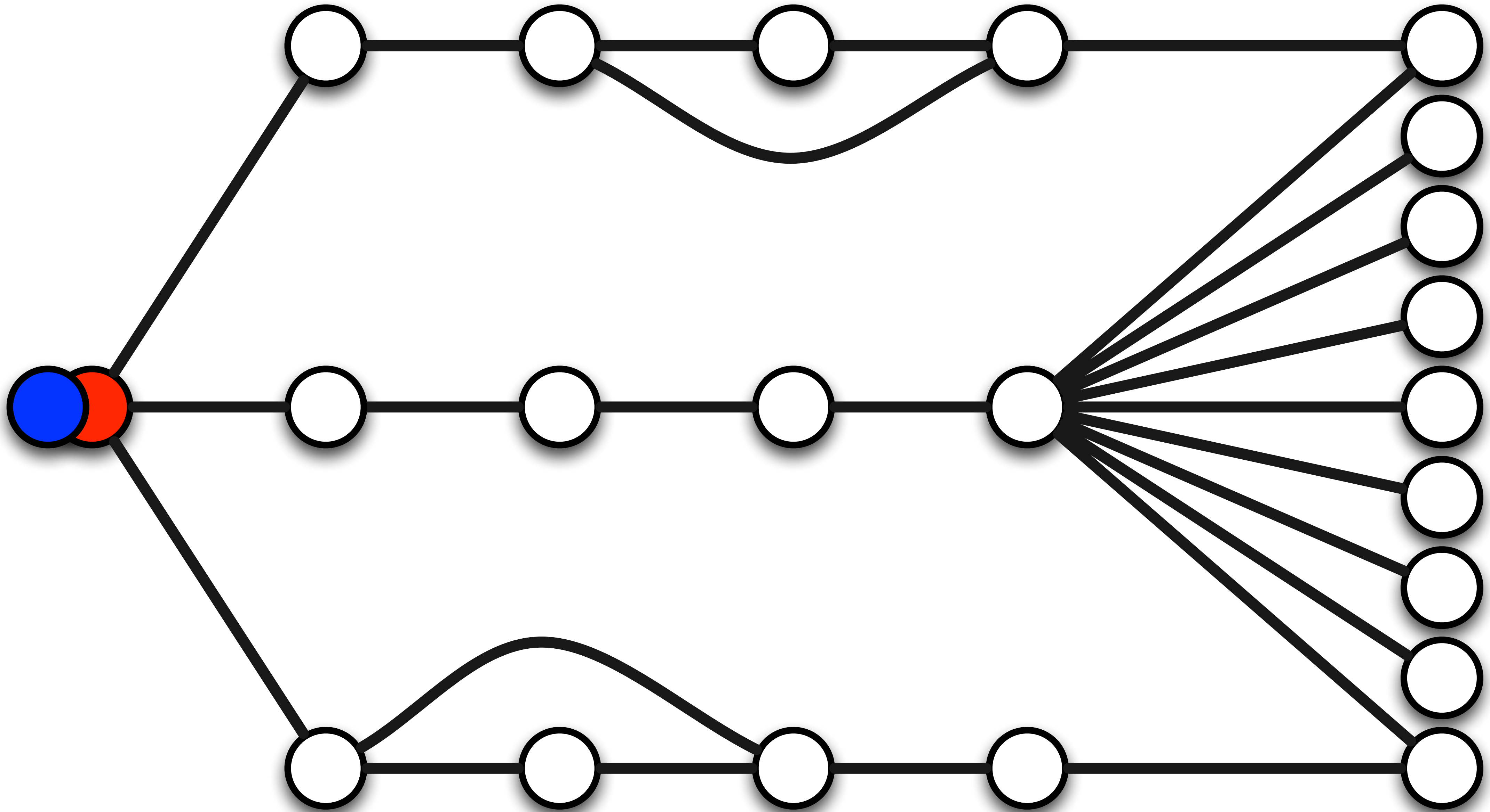
Jeu 9 - Le surfeur et le peintre



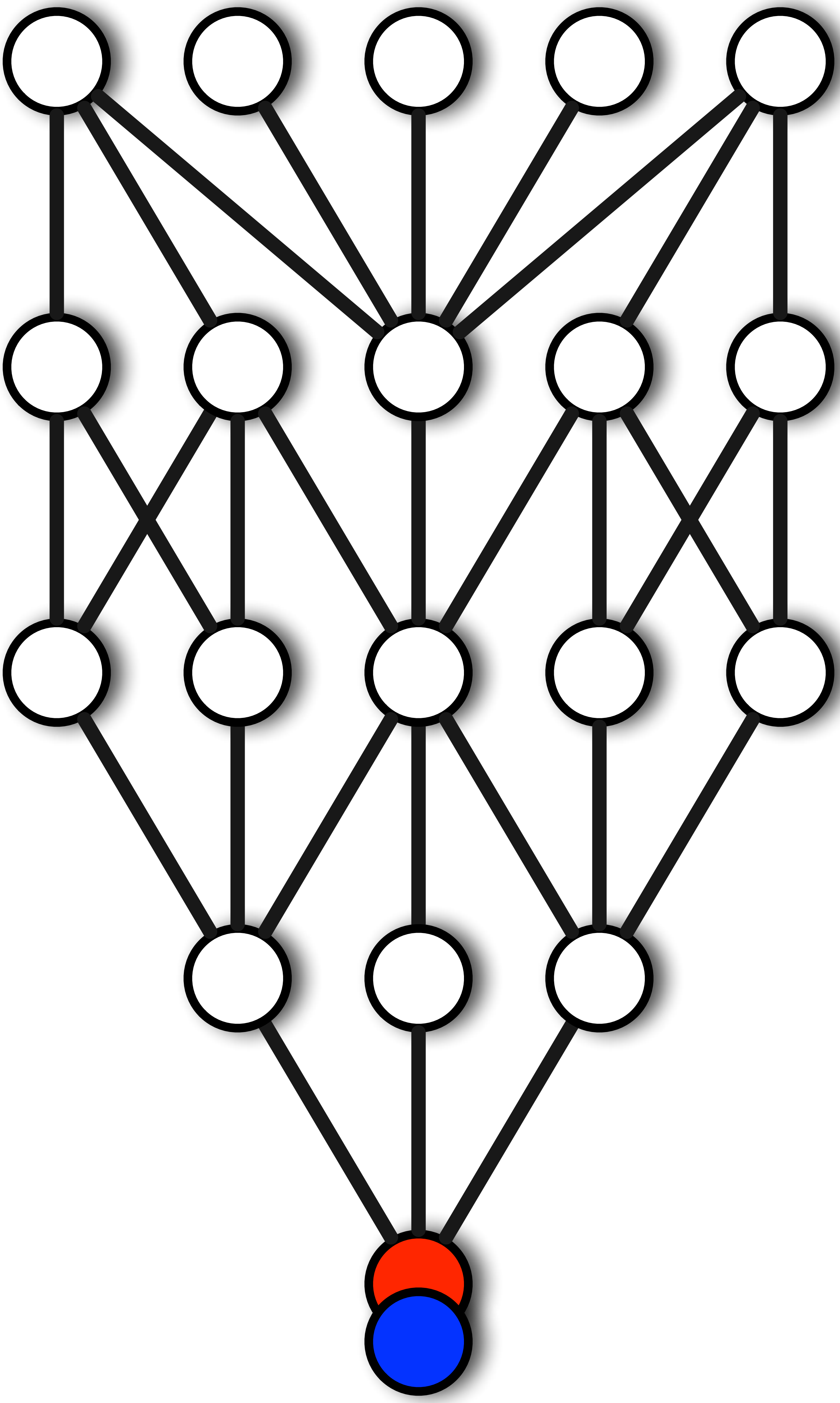
Jeu 10 - Le surfeur et le peintre



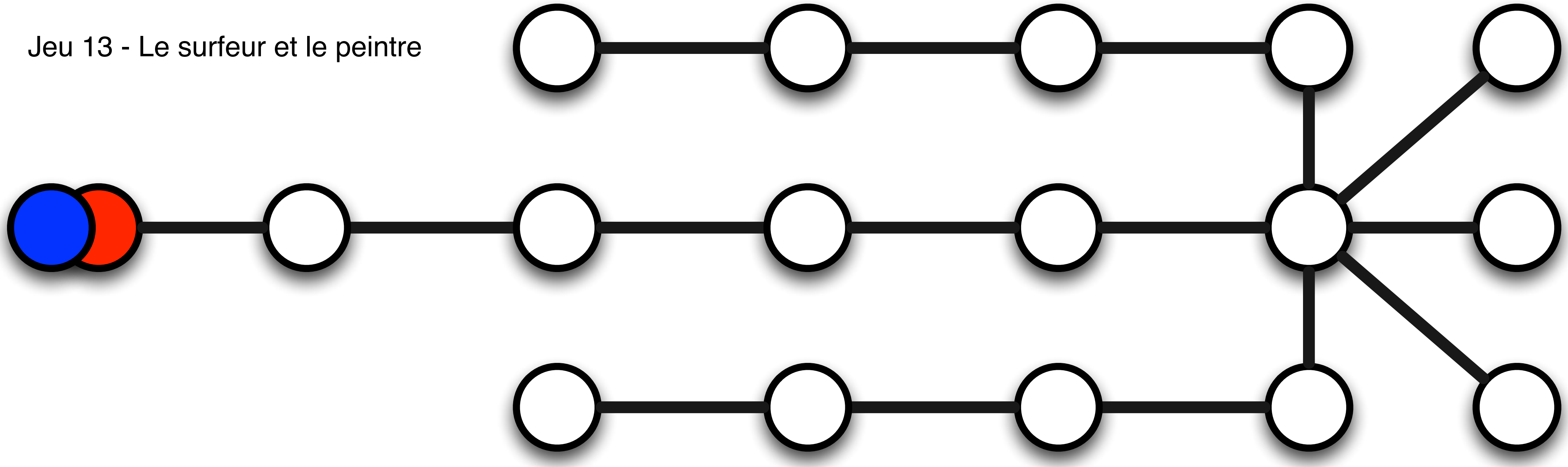
Jeu 11 - Le surfeur et le peintre



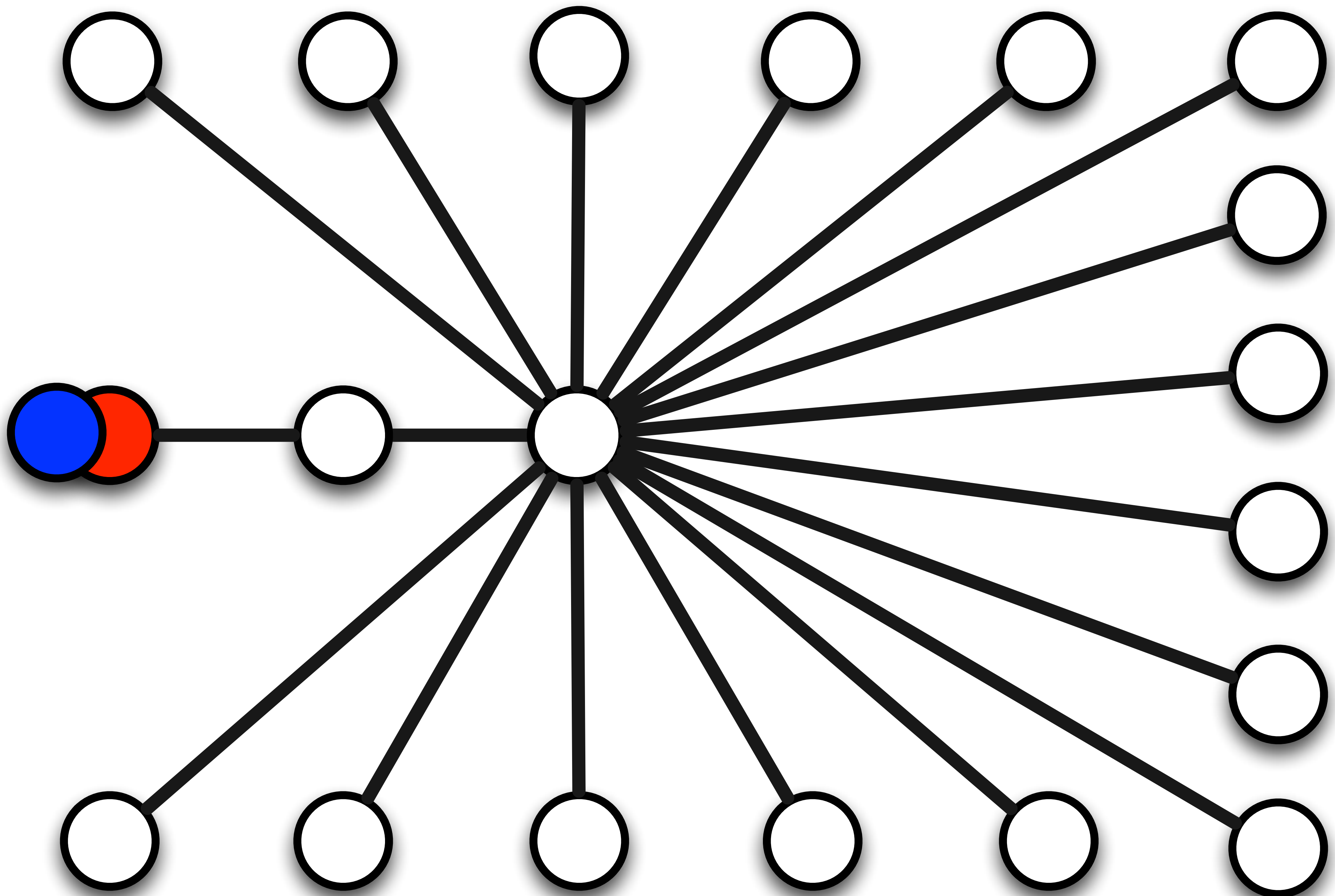
Jeu 12 - Le surfeur et le peintre



Jeu 13 - Le surfeur et le peintre

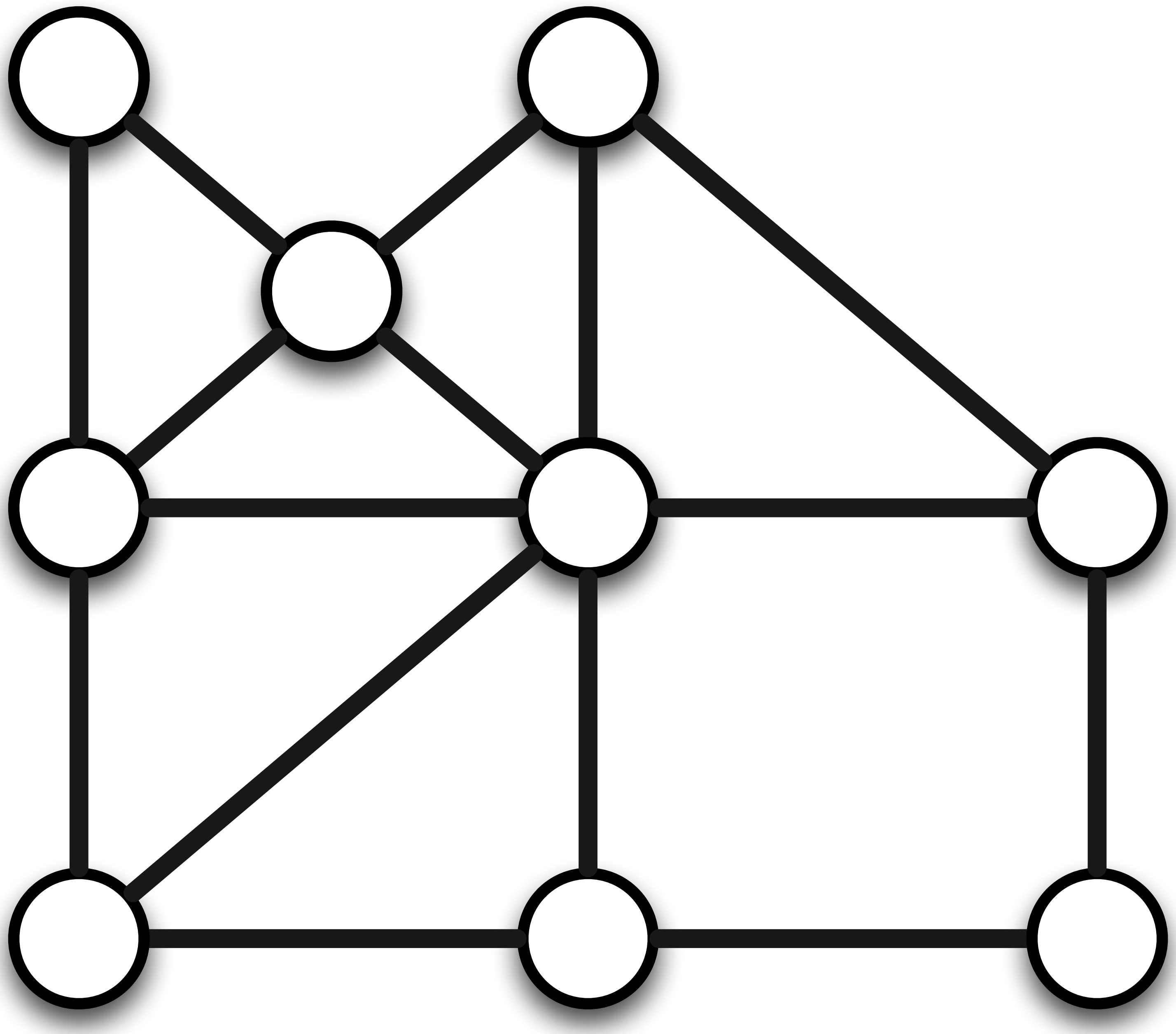


Jeu 14 - Le surfeur et le peintre

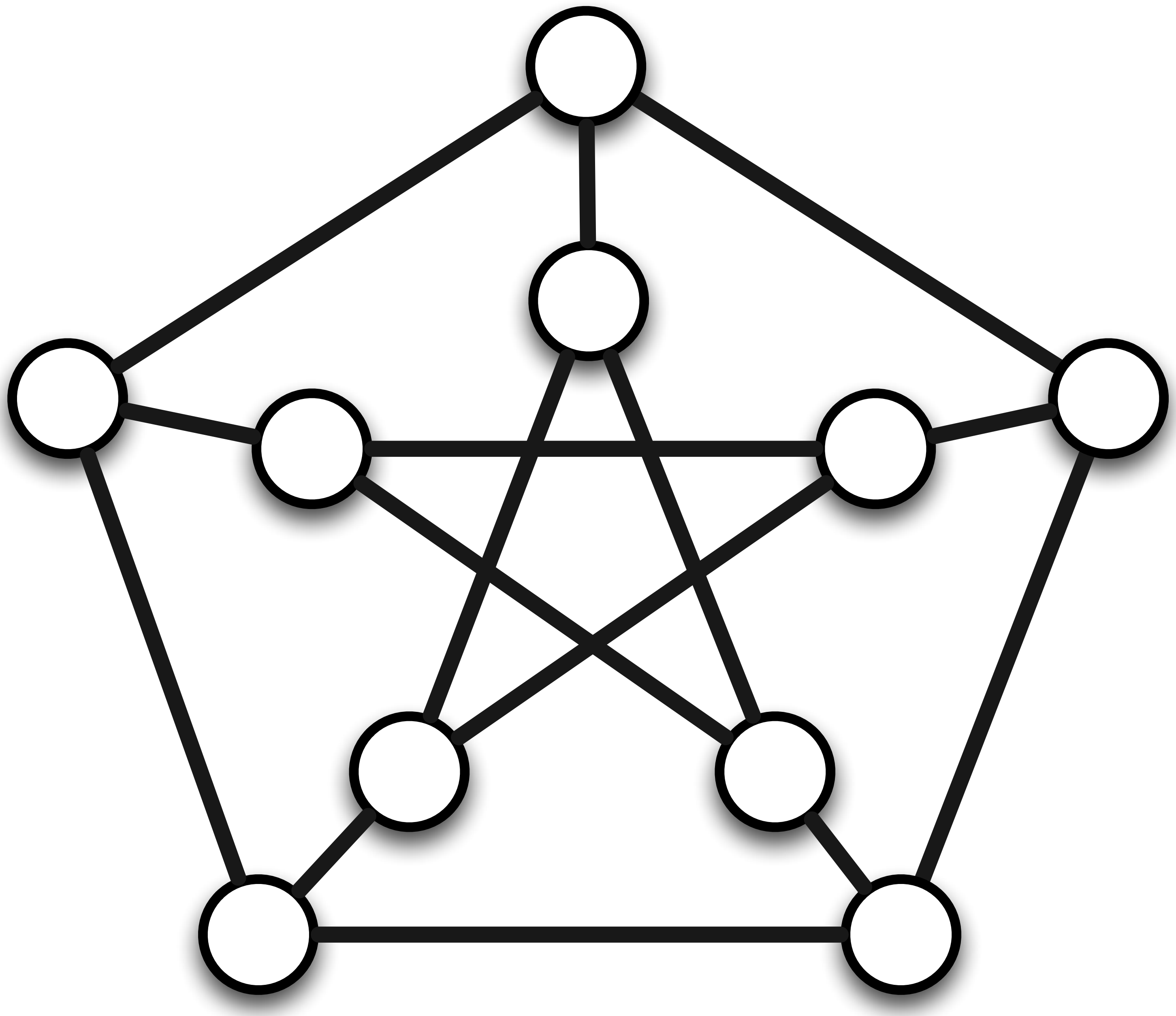


6.6 Les gendarmes et le voleur

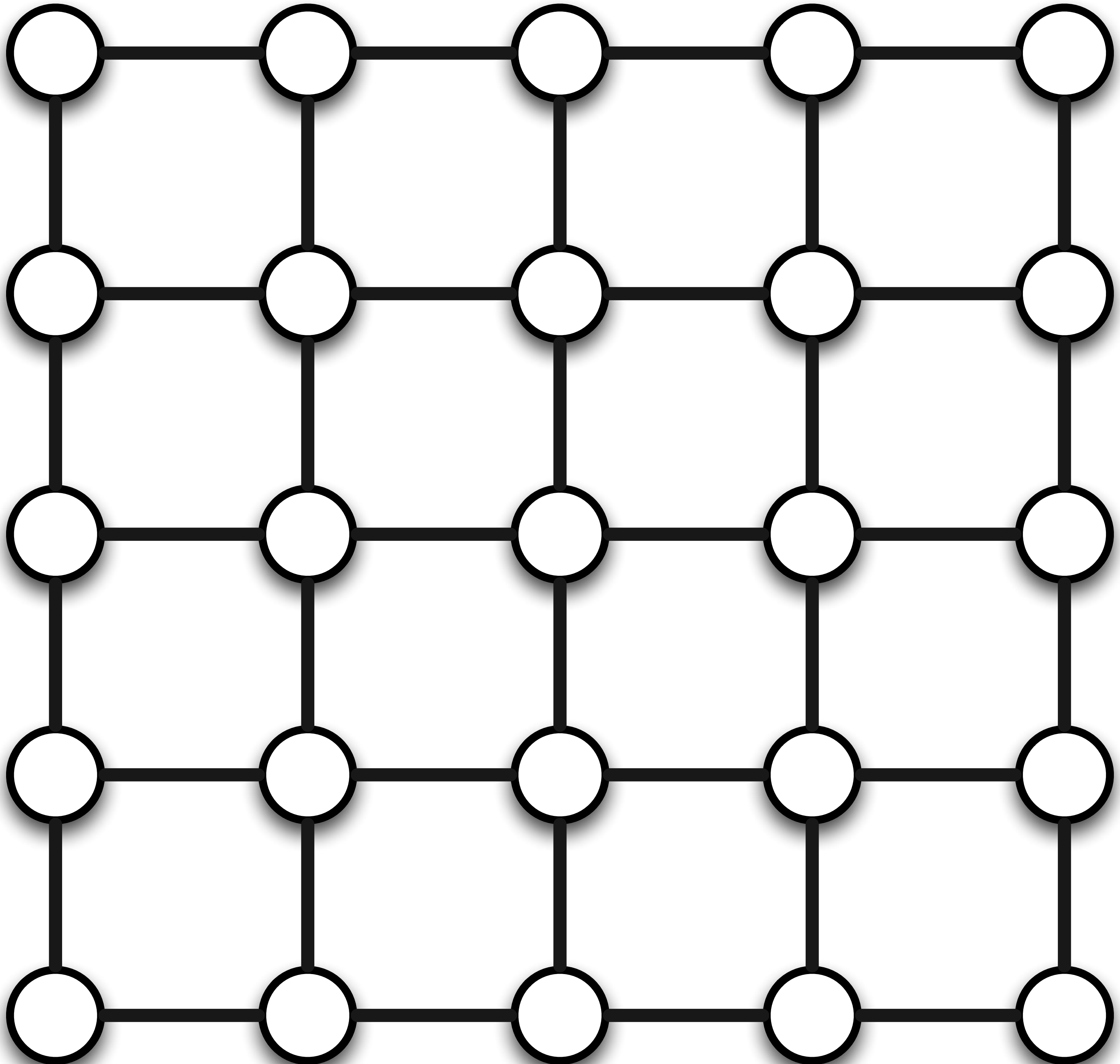
Jeu 1 - Les gendarmes et le voleur



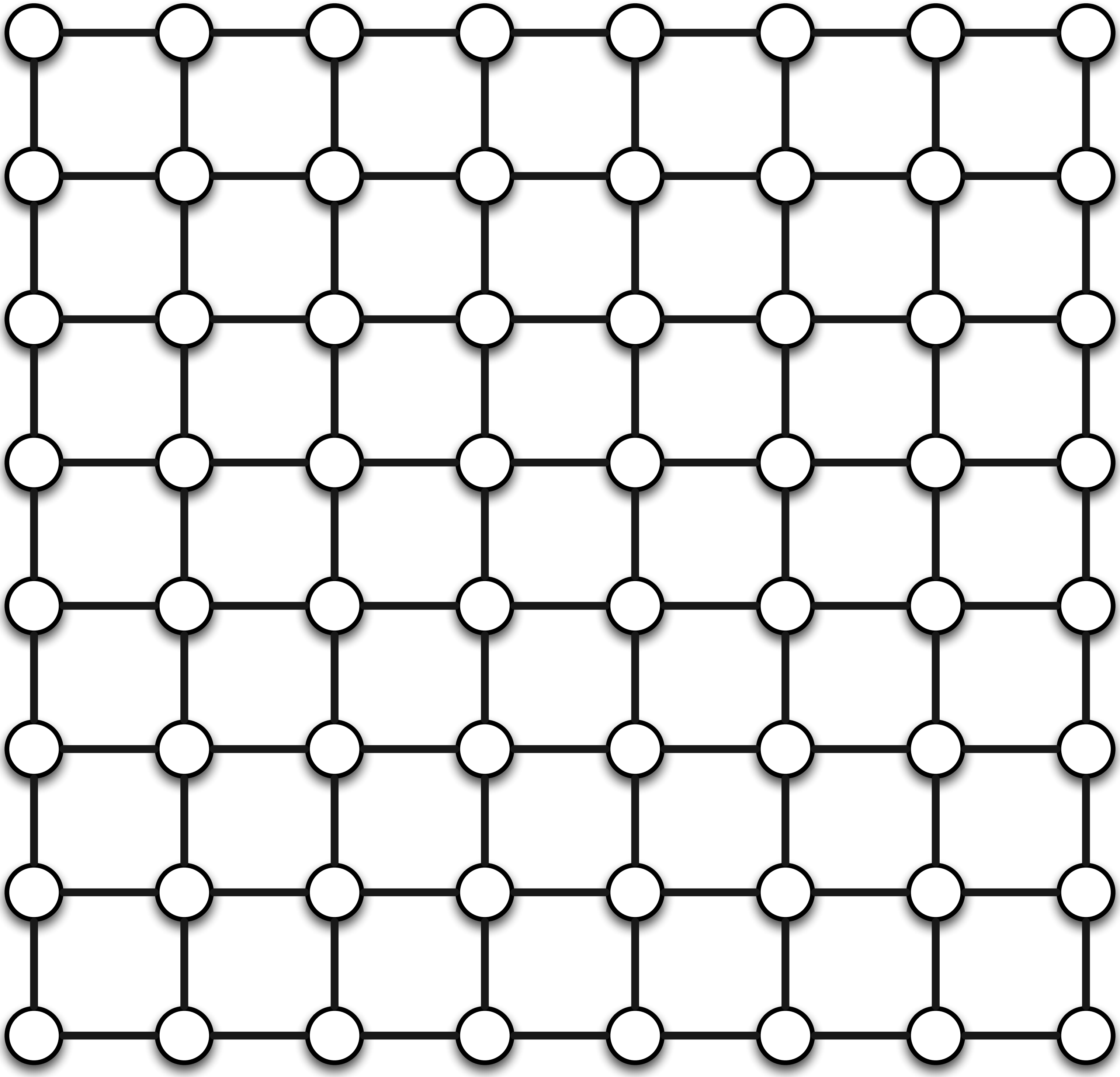
Jeu 2 - Les gendarmes et le voleur



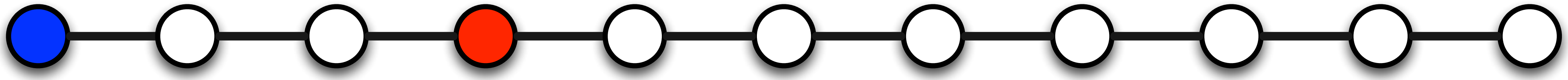
Jeu 3 - Les gendarmes et le voleur



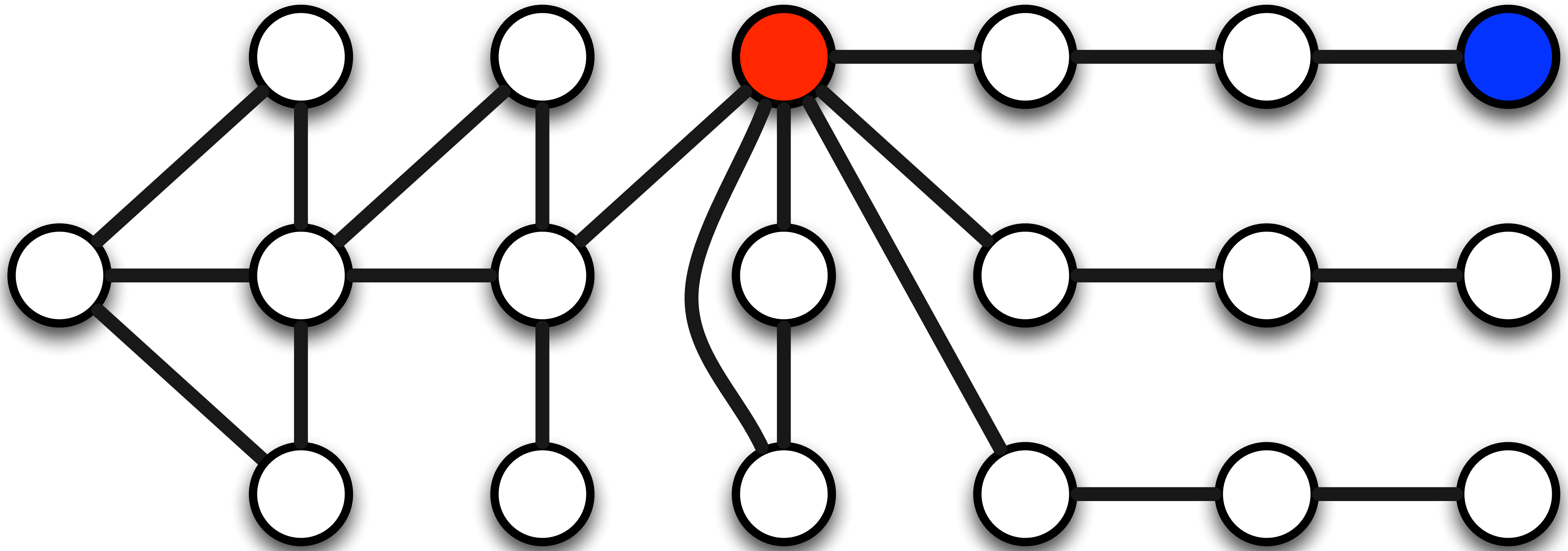
Jeu 4 - Les gendarmes et le voleur



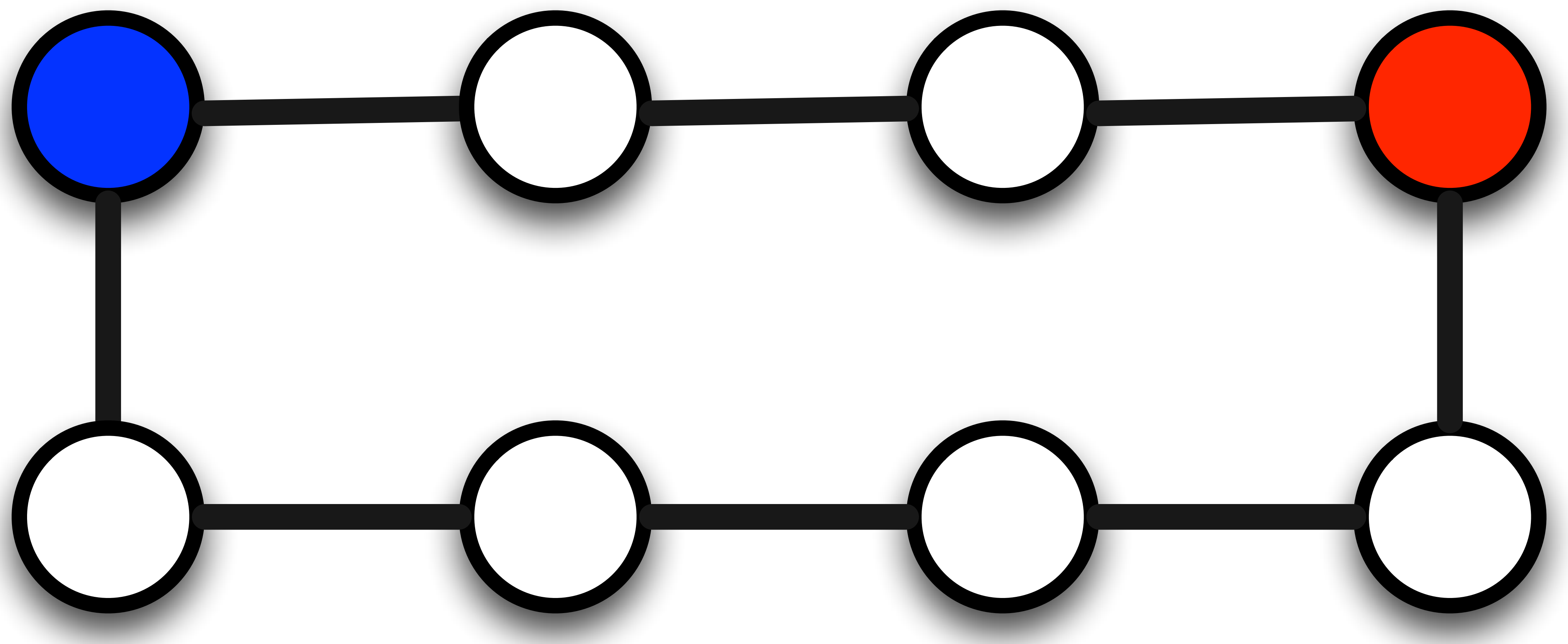
Jeu 5 - Les gendarmes et le voleur



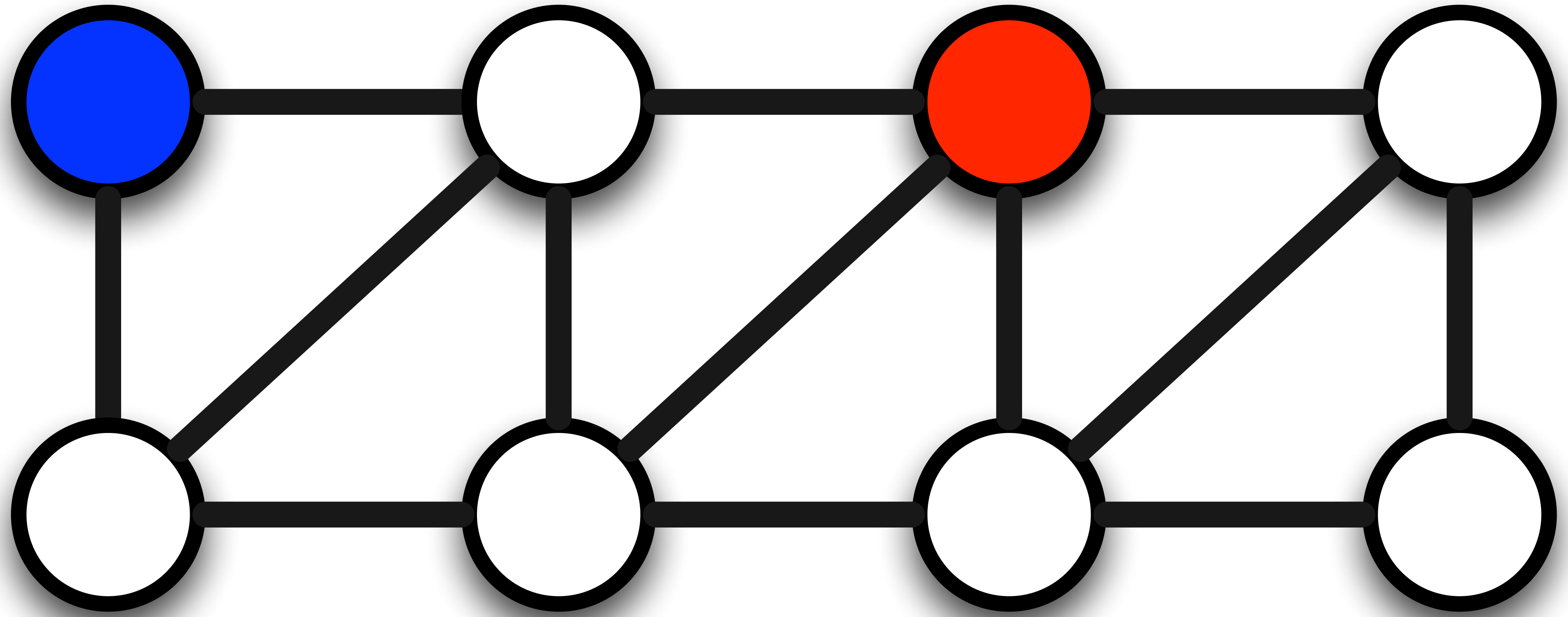
Jeu 6 - Les gendarmes et le voleur



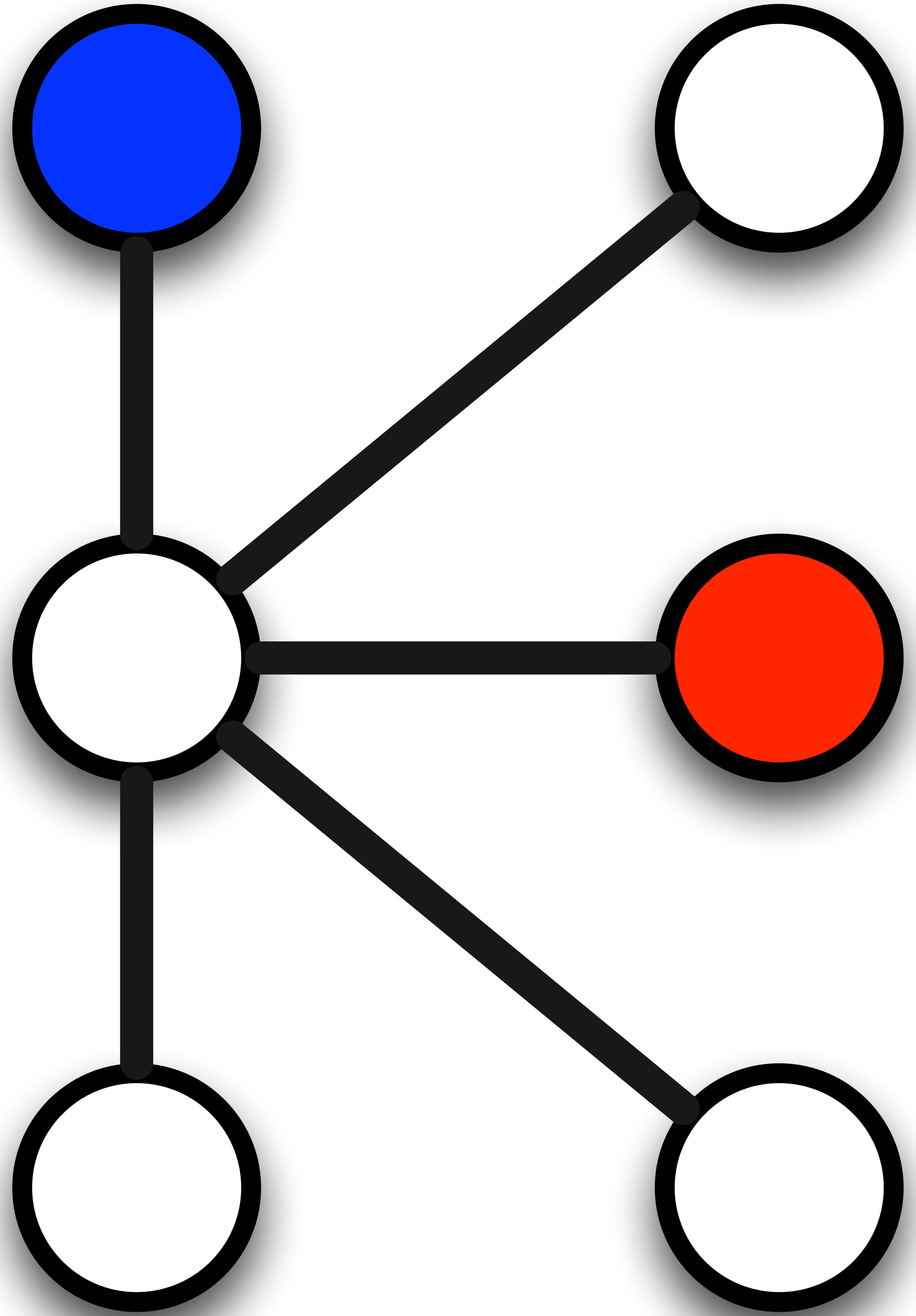
Jeu 7 - Les gendarmes et le voleur



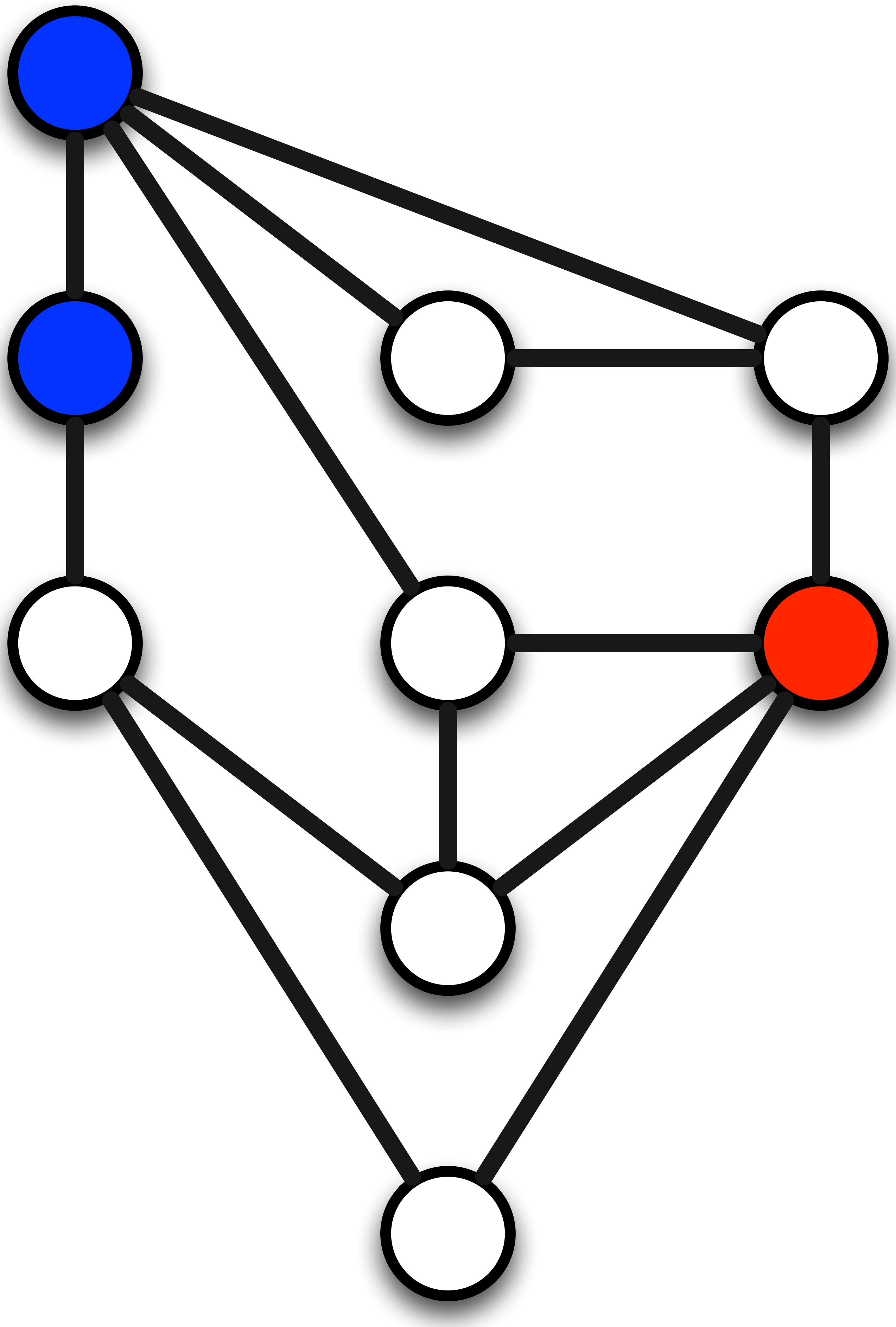
Jeu 8 - Les gendarmes et le voleur



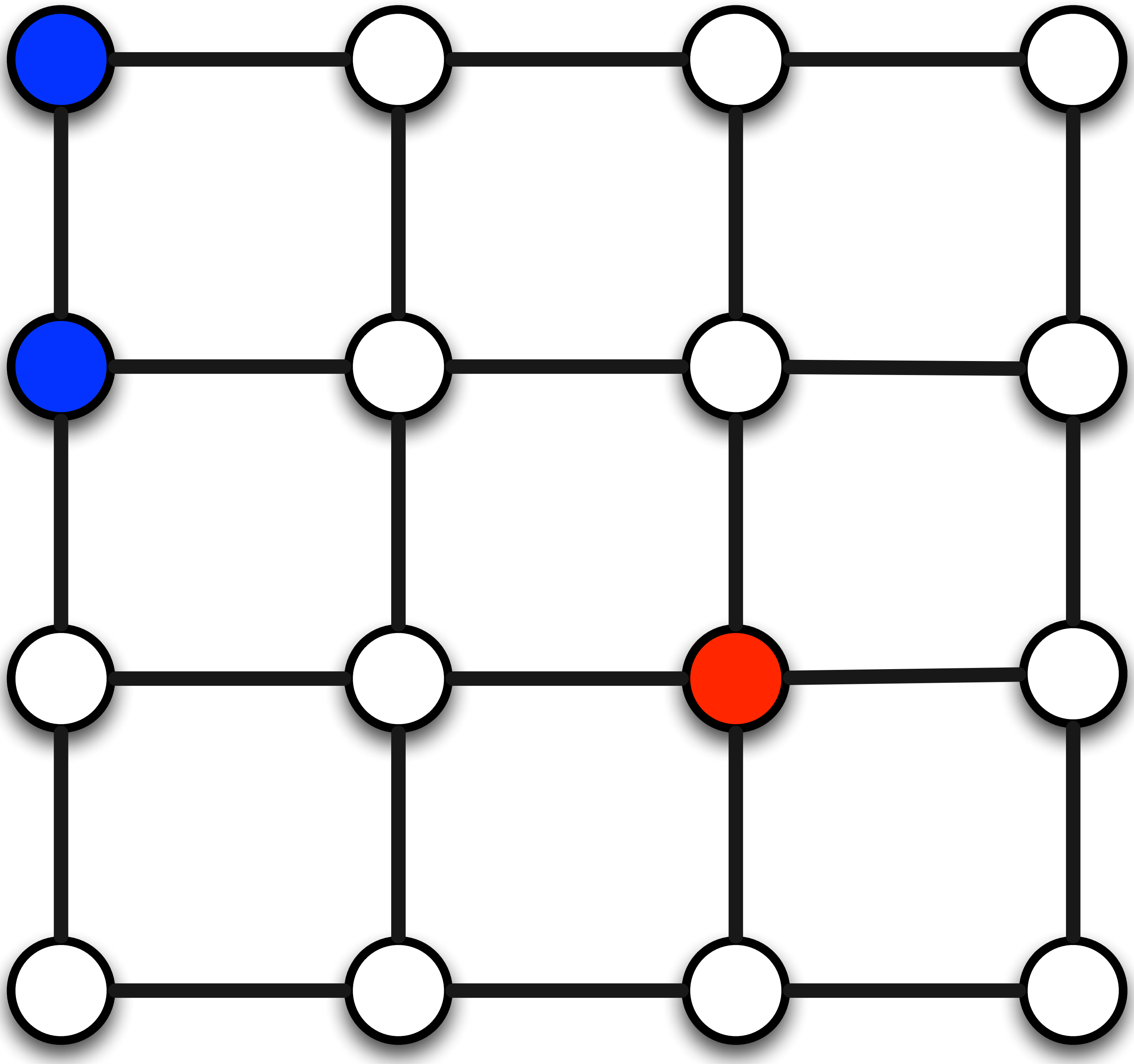
Jeu 9 - Les gendarmes et le voleur



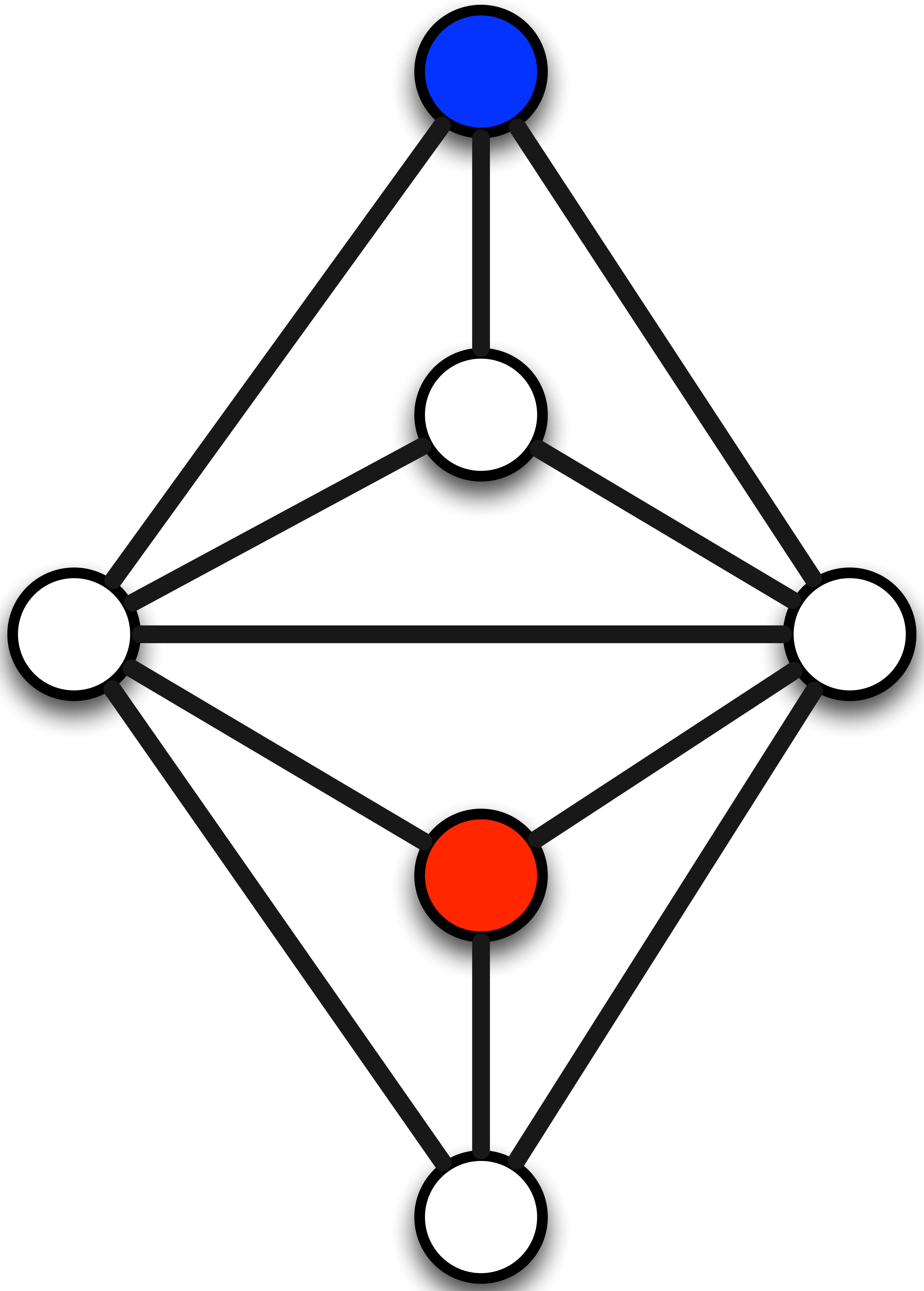
Jeu 10 - Les gendarmes et le voleur



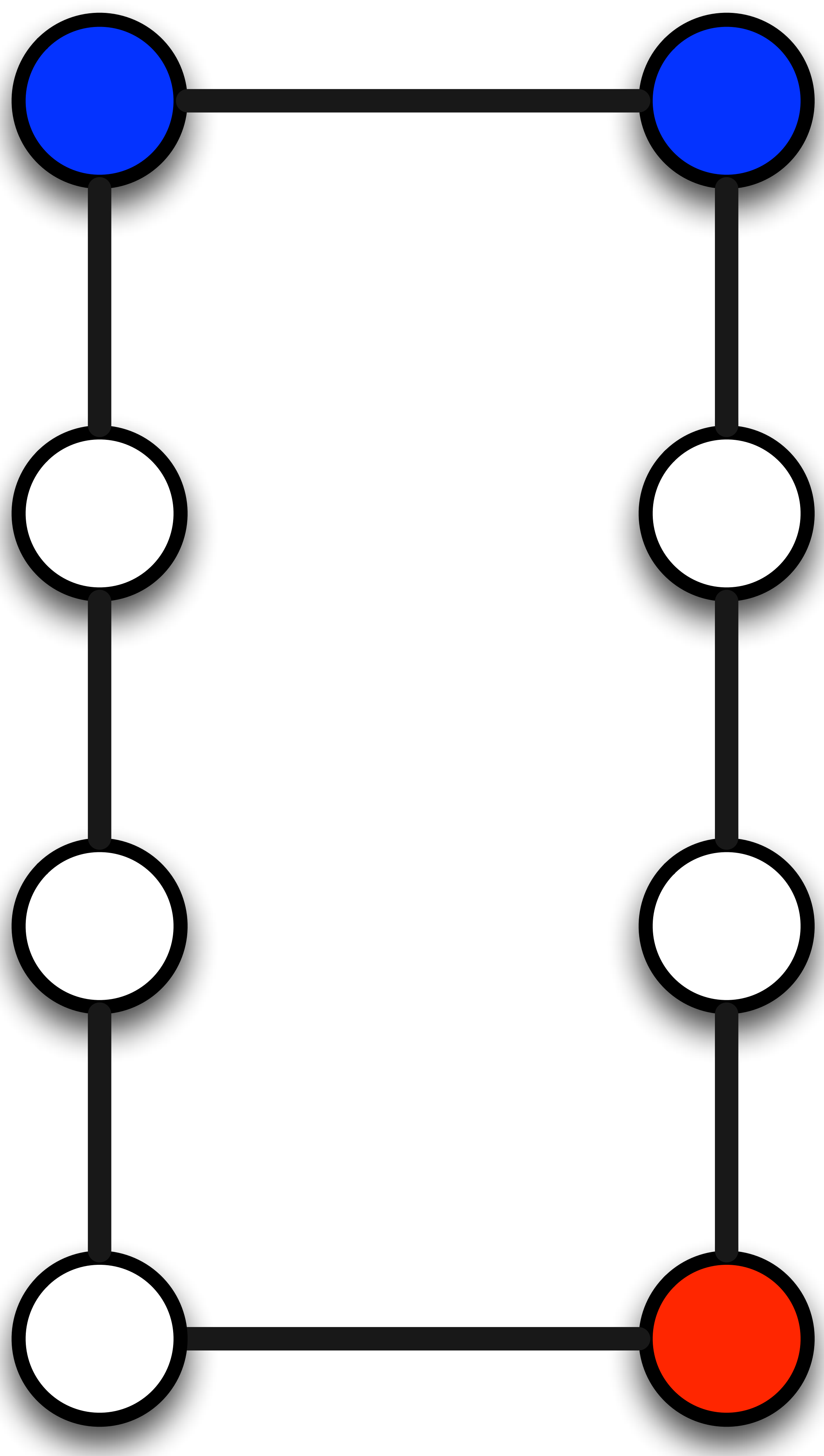
Jeu 11 - Les gendarmes et le voleur



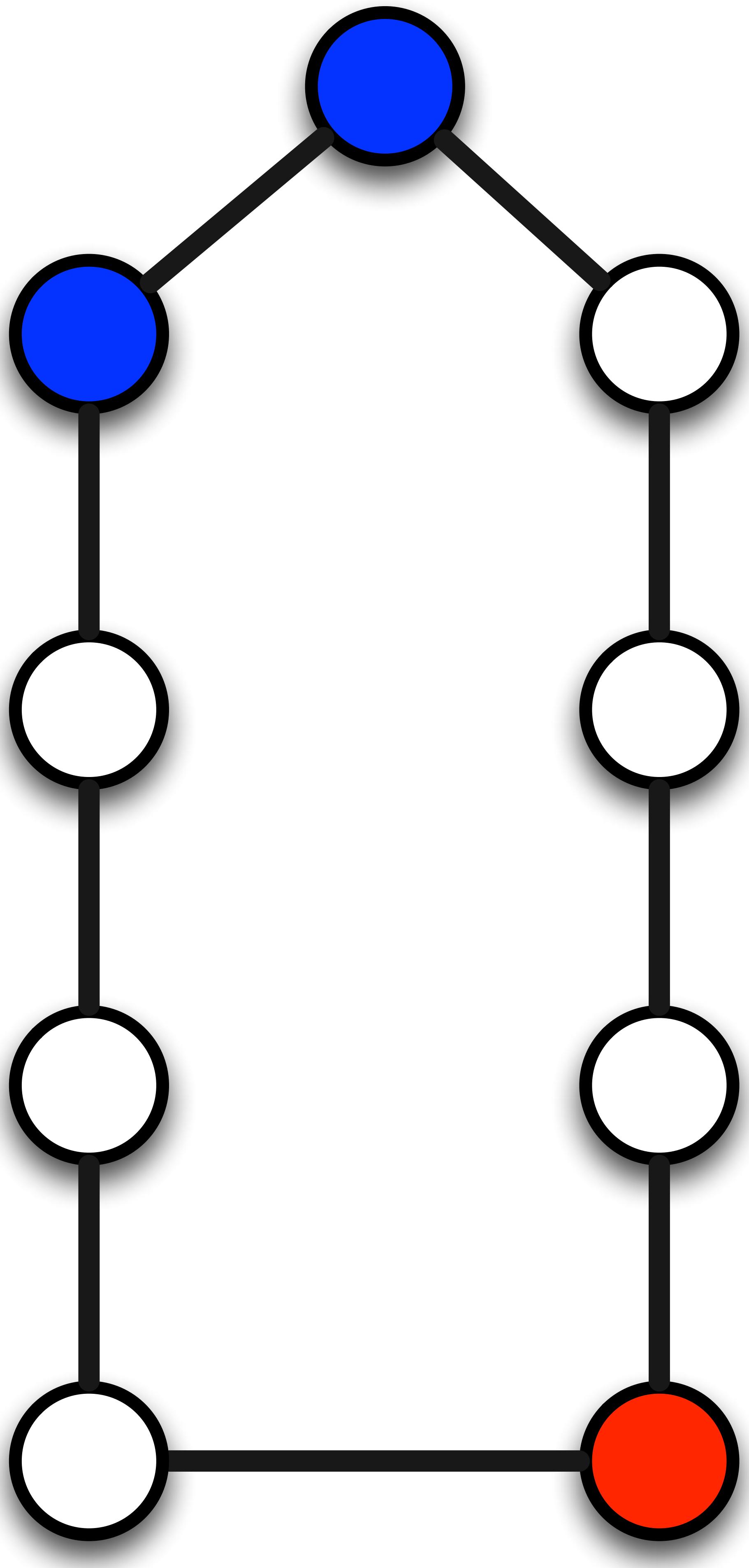
Jeu 12 - Les gendarmes et le voleur



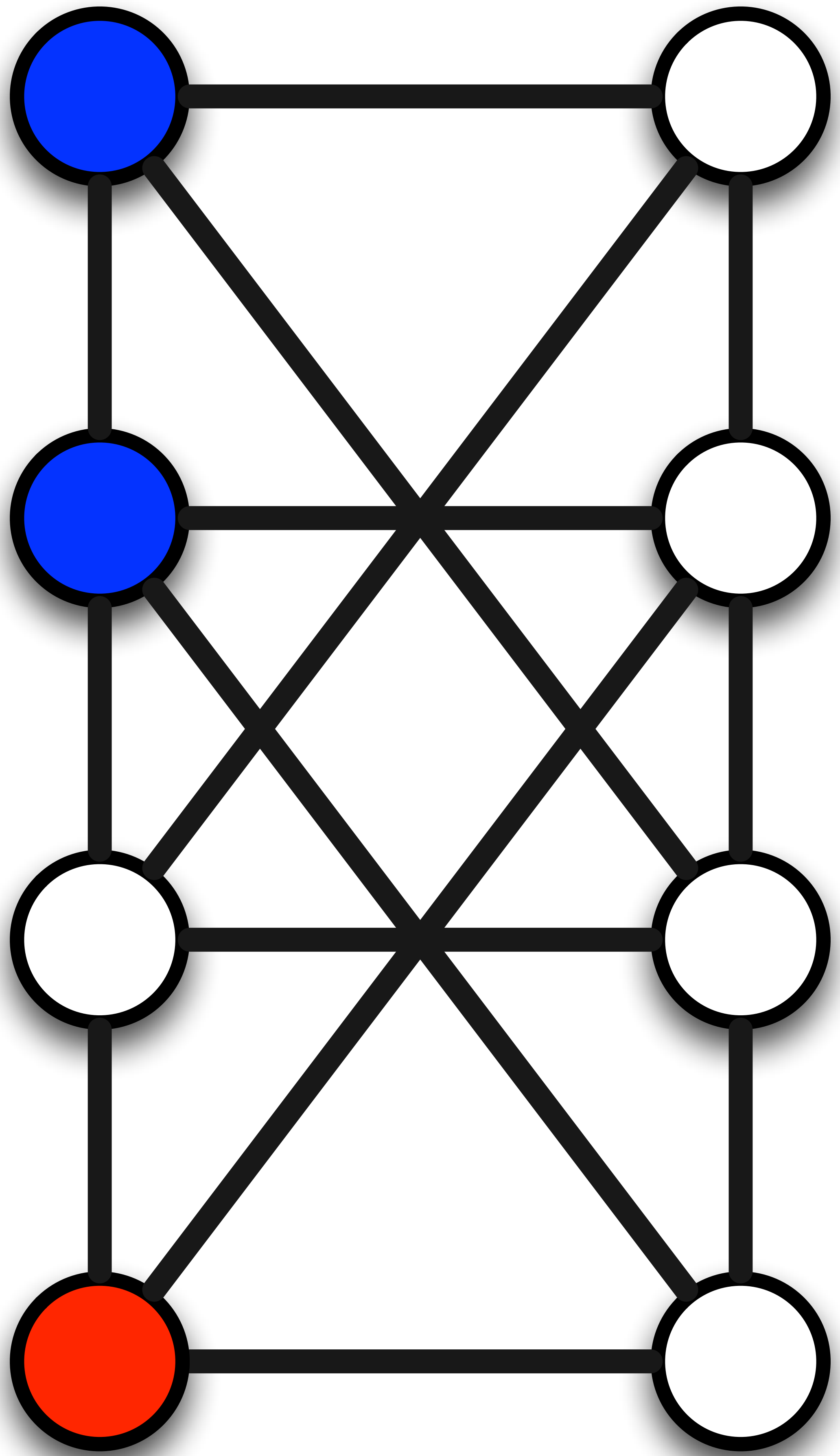
Jeu 13 - Les gendarmes et le voleur



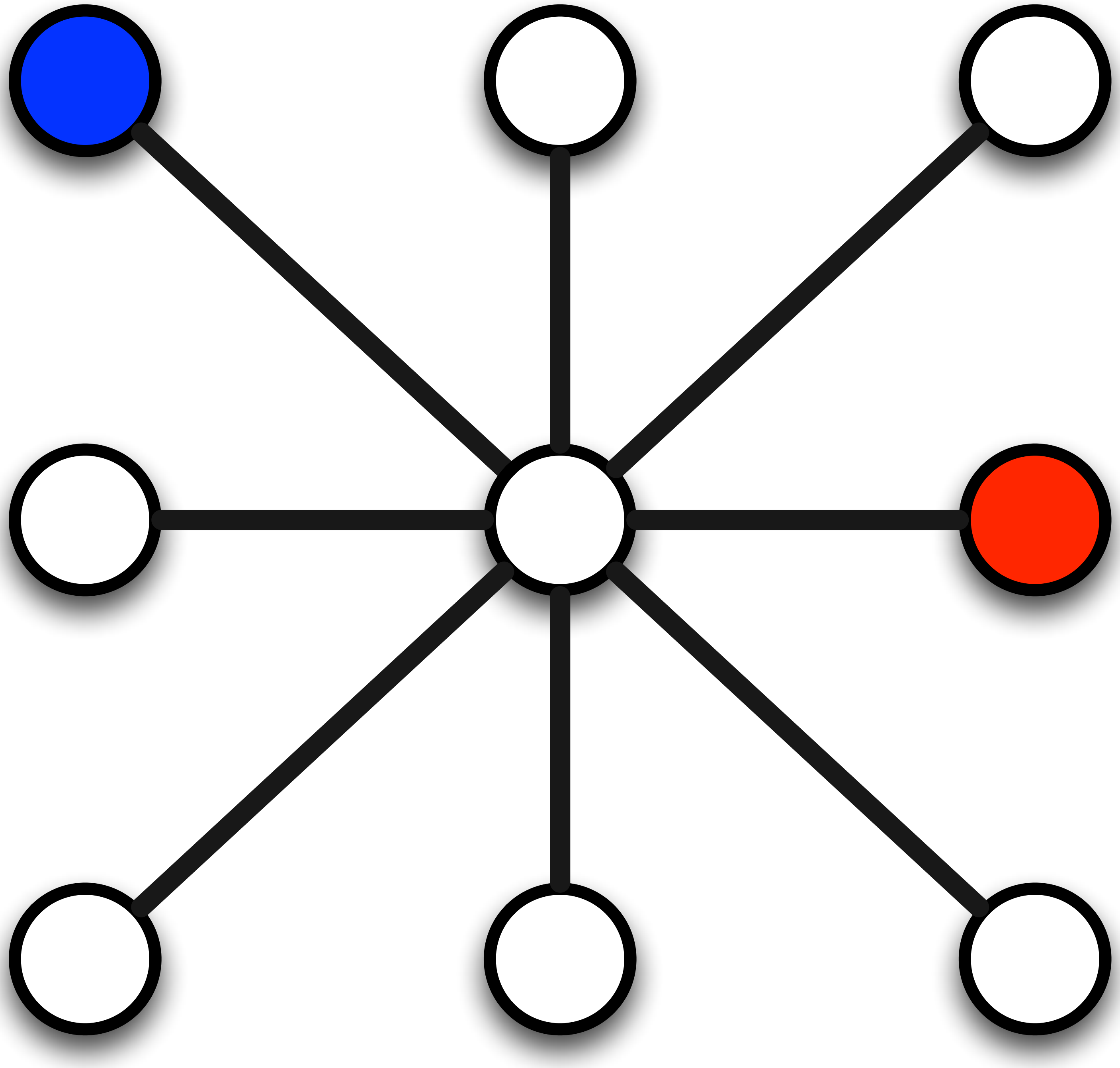
Jeu 14 - Les gendarmes et le voleur



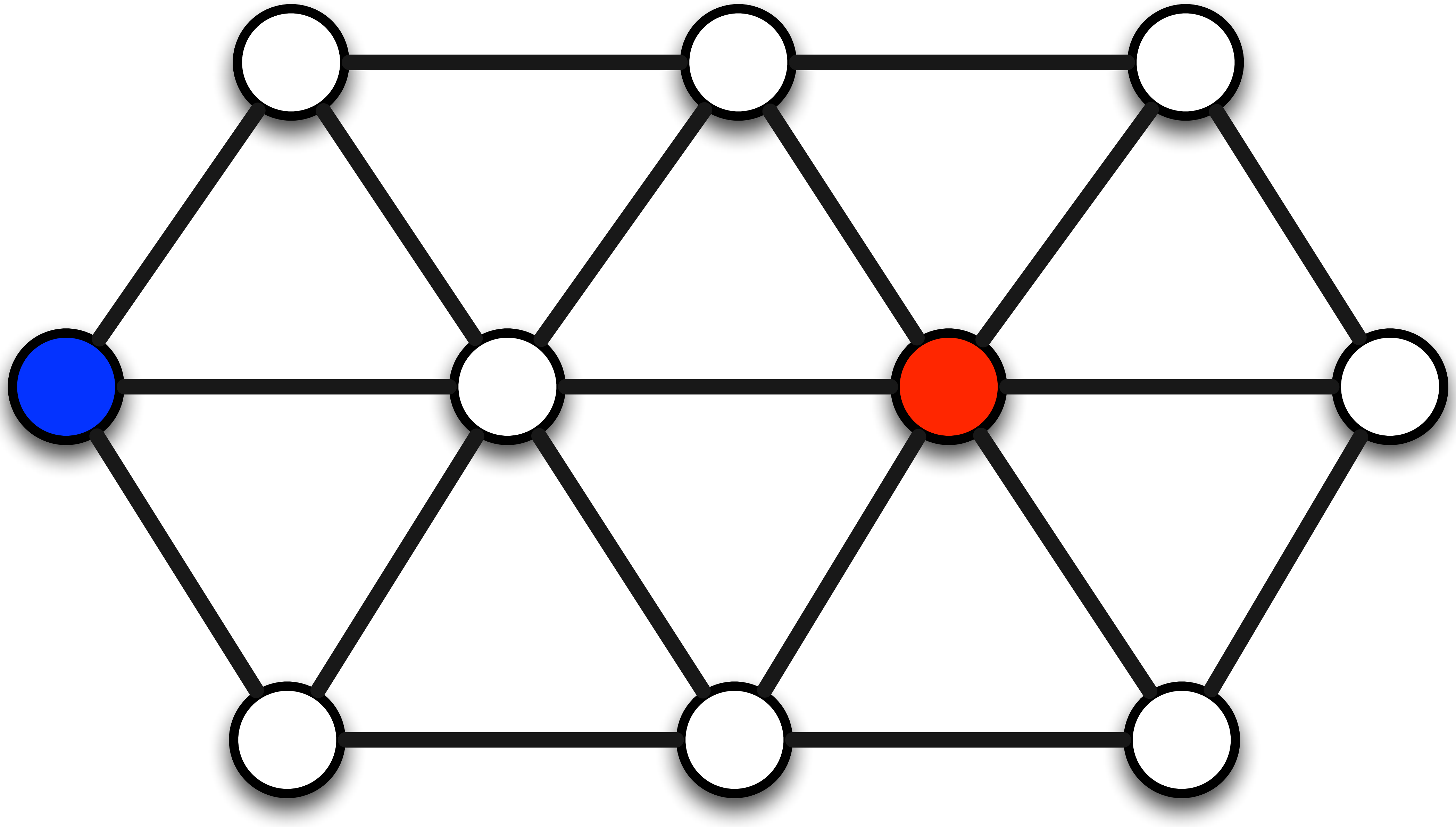
Jeu 15 - Les gendarmes et le voleur



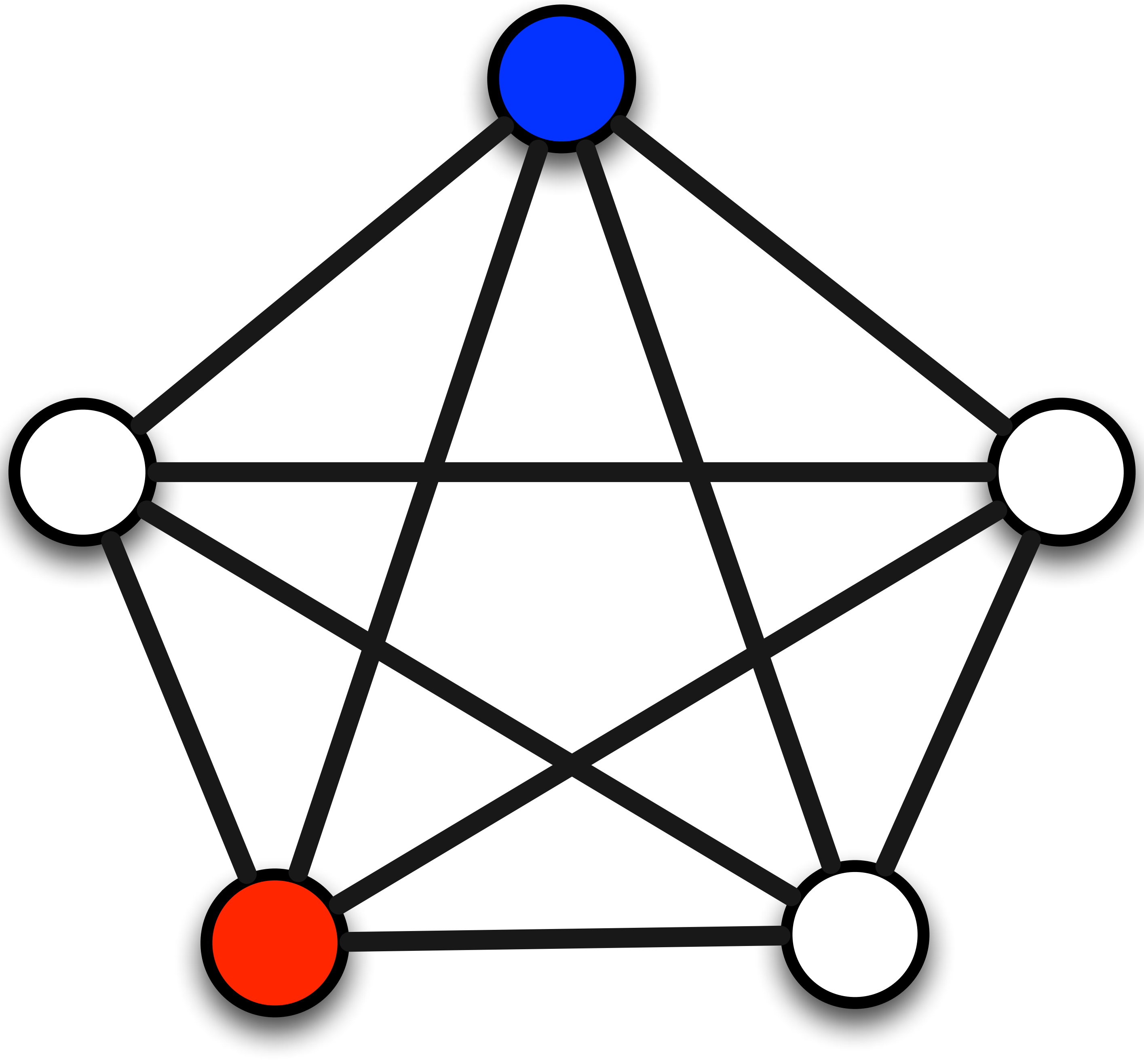
Jeu 16 - Les gendarmes et le voleur



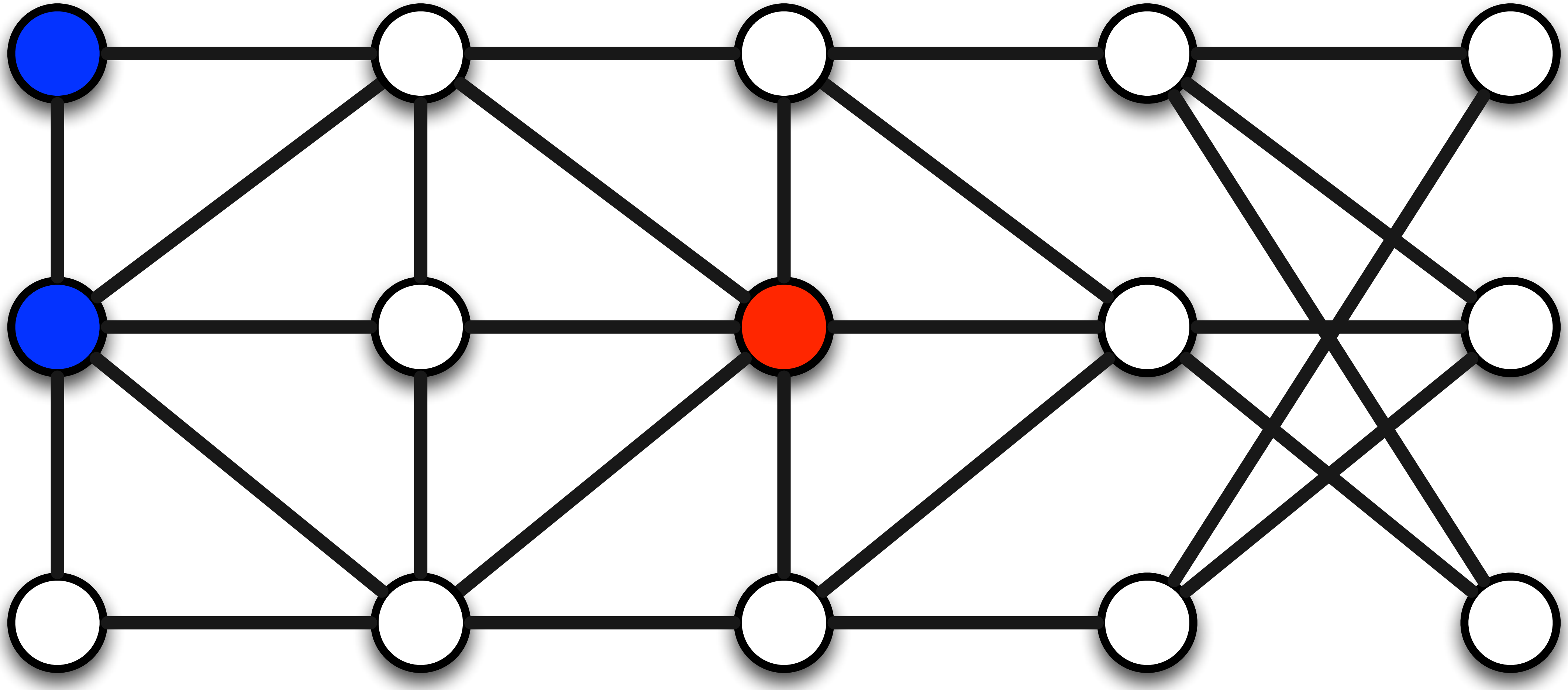
Jeu 17 - Les gendarmes et le voleur



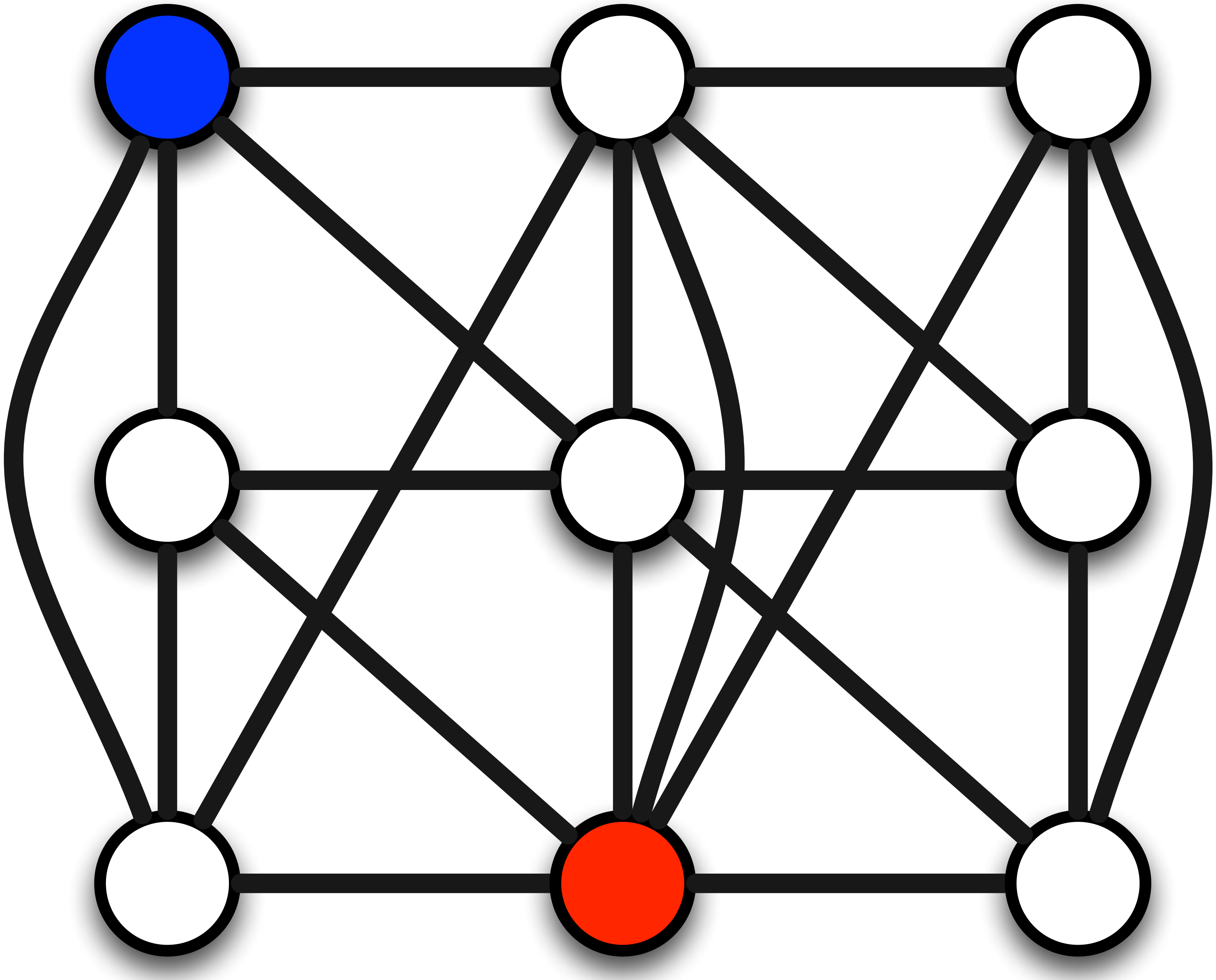
Jeu 18 - Les gendarmes et le voleur



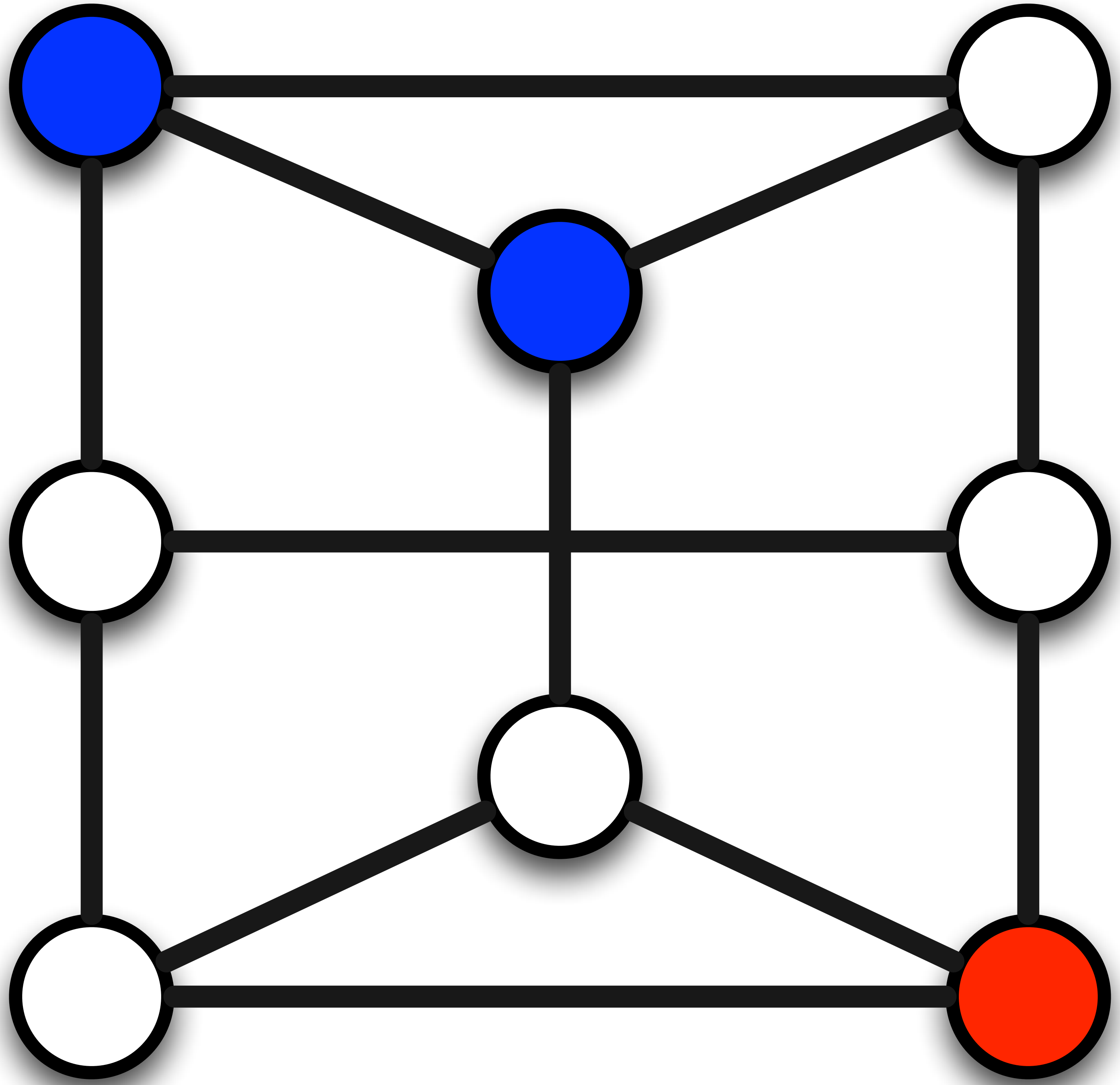
Jeu 19 - Les gendarmes et le voleur



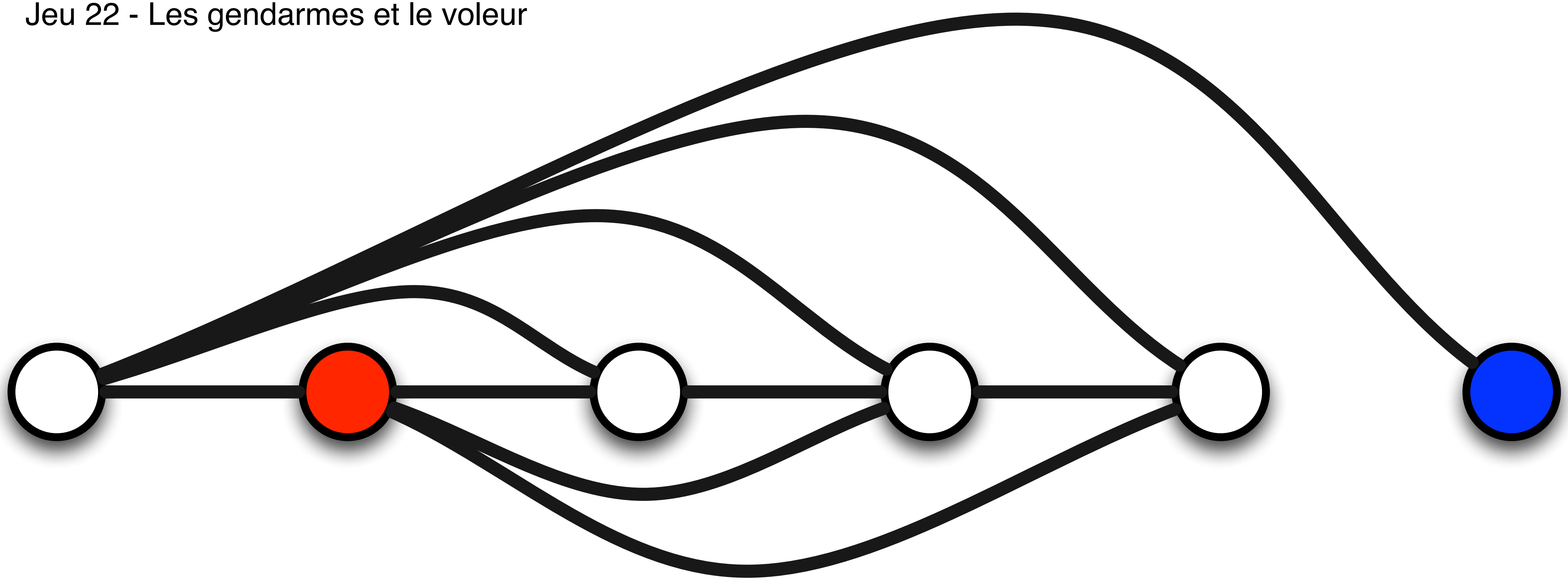
Jeu 20 - Les gendarmes et le voleur



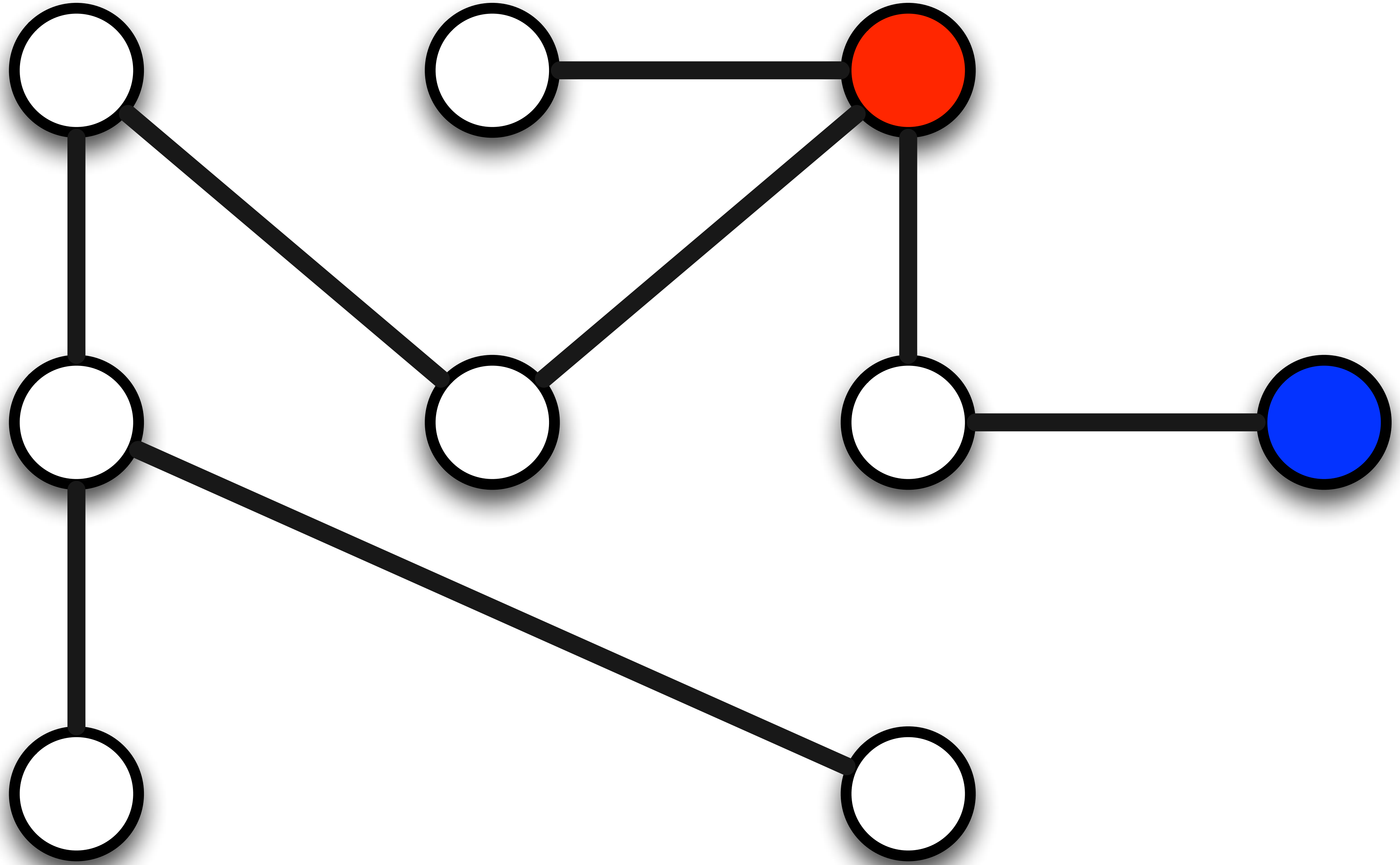
Jeu 21 - Les gendarmes et le voleur



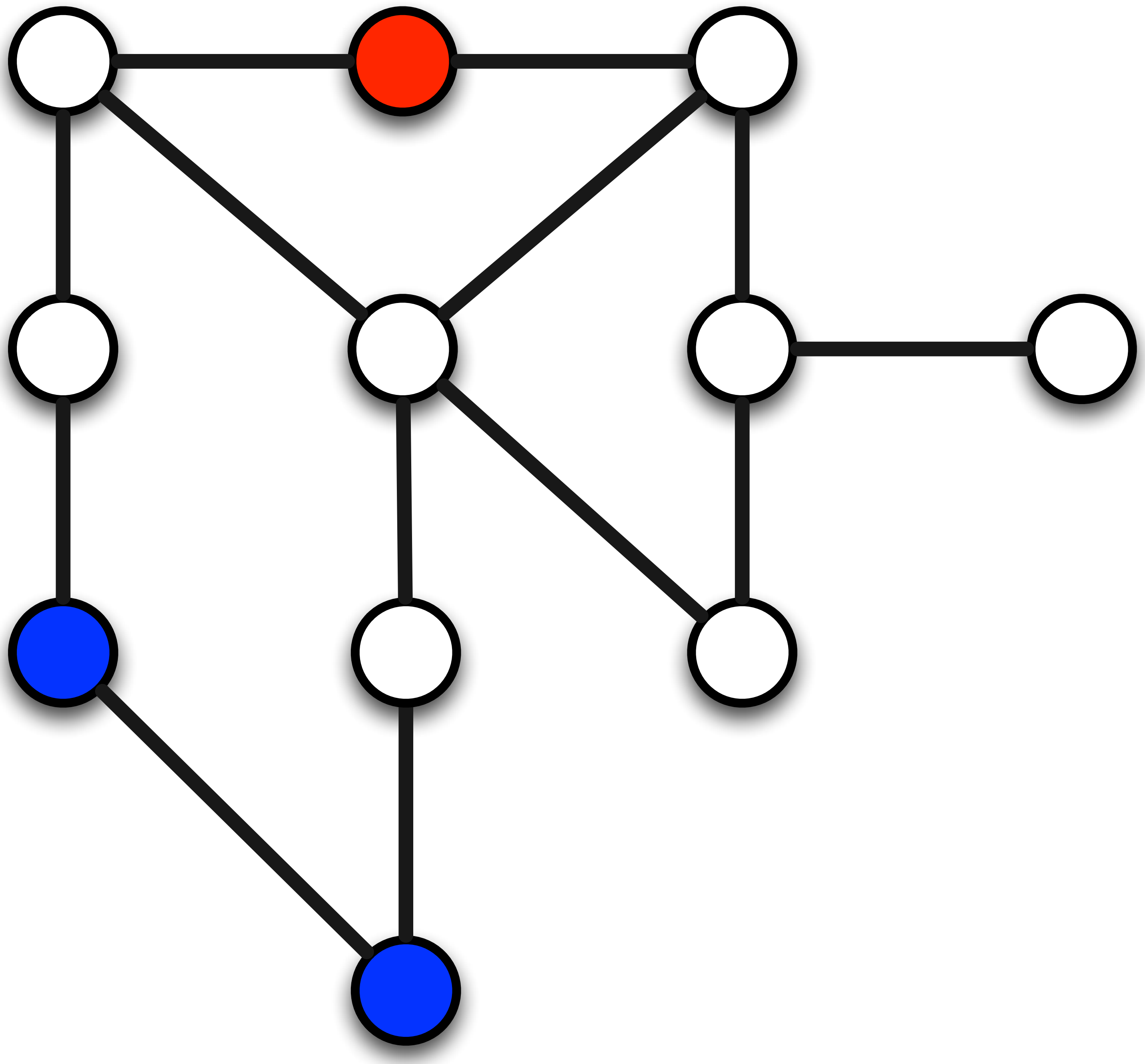
Jeu 22 - Les gendarmes et le voleur



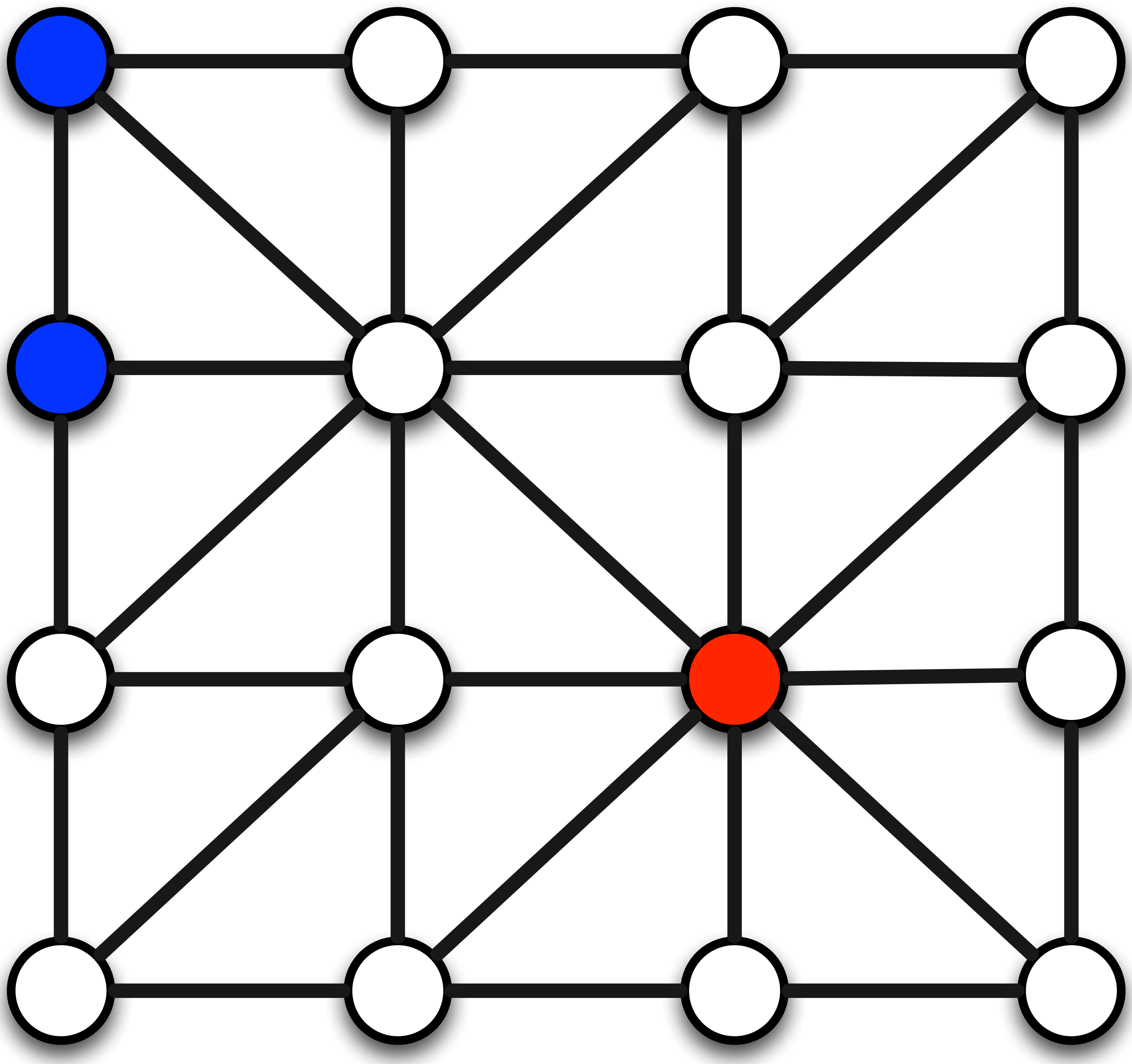
Jeu 23 - Les gendarmes et le voleur



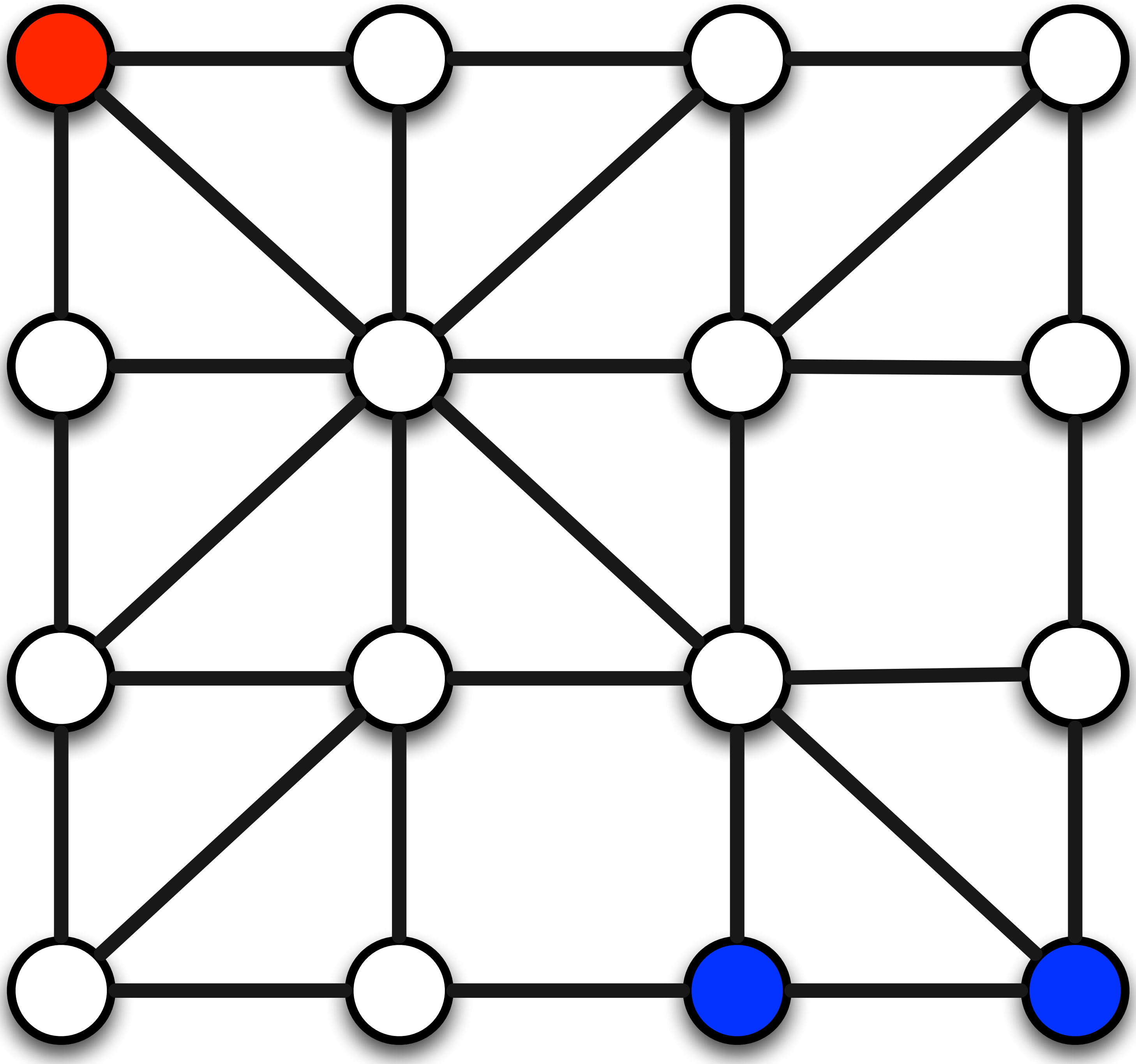
Jeu 24 - Les gendarmes et le voleur



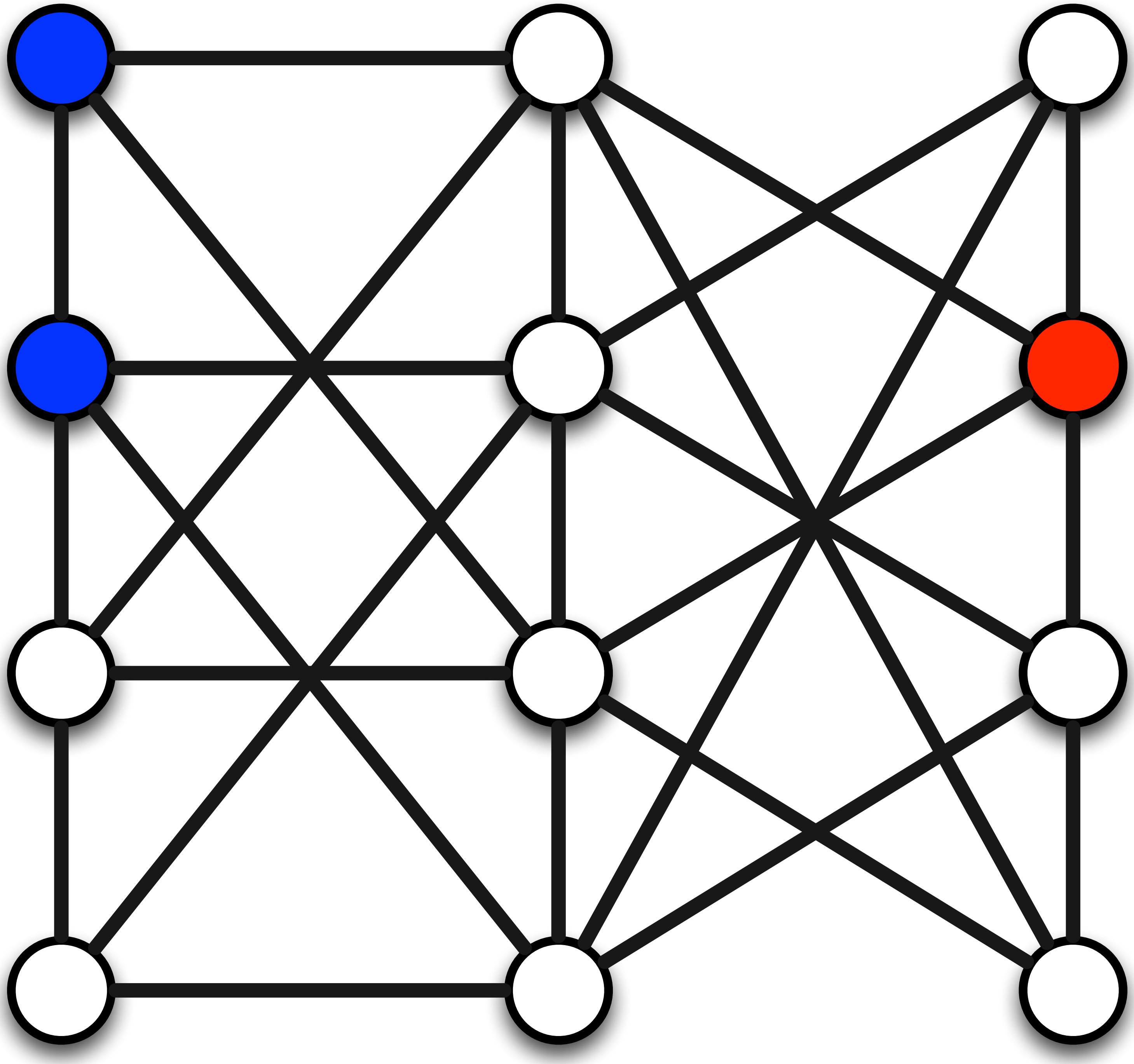
Jeu 25 - Les gendarmes et le voleur



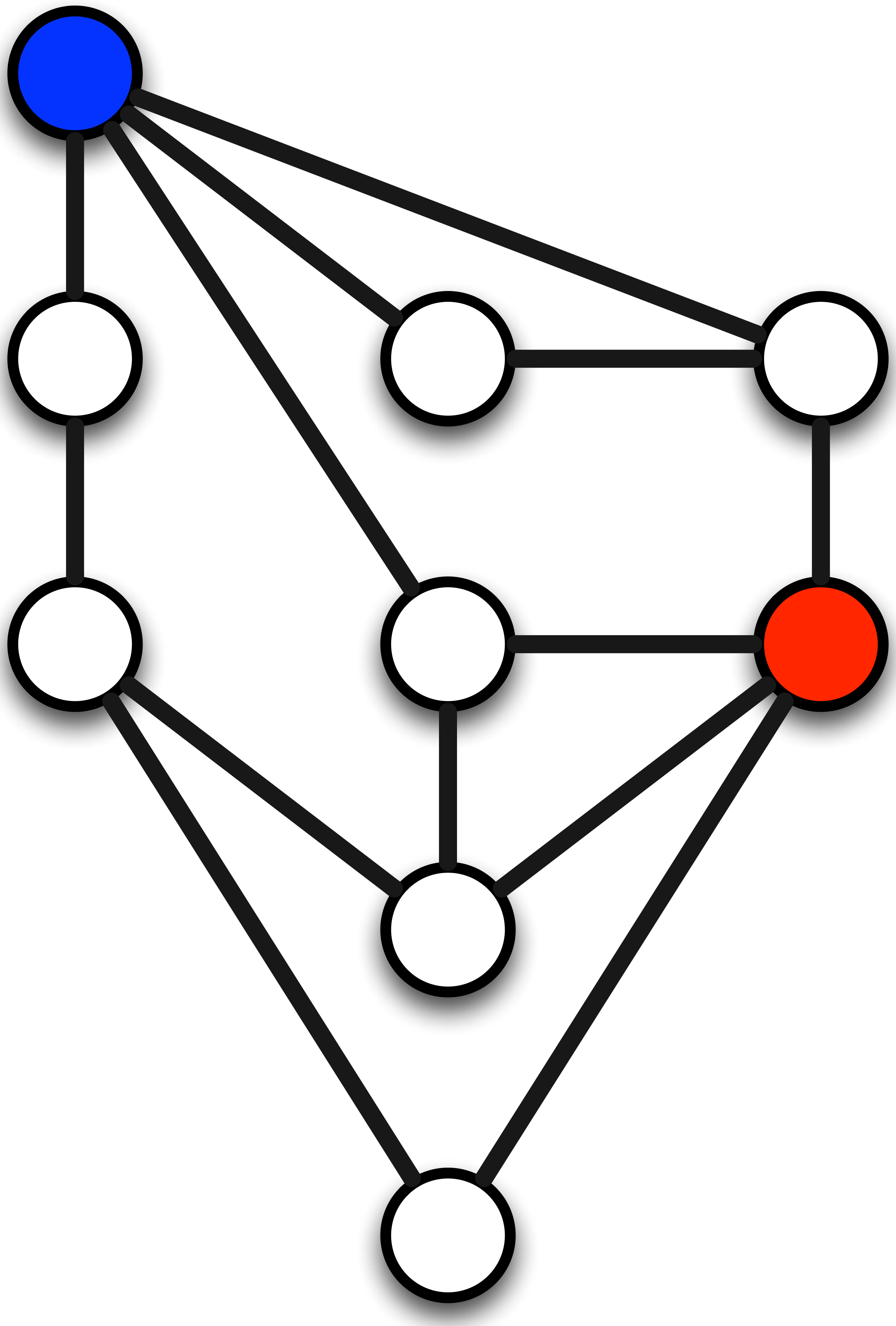
Jeu 26 - Les gendarmes et le voleur



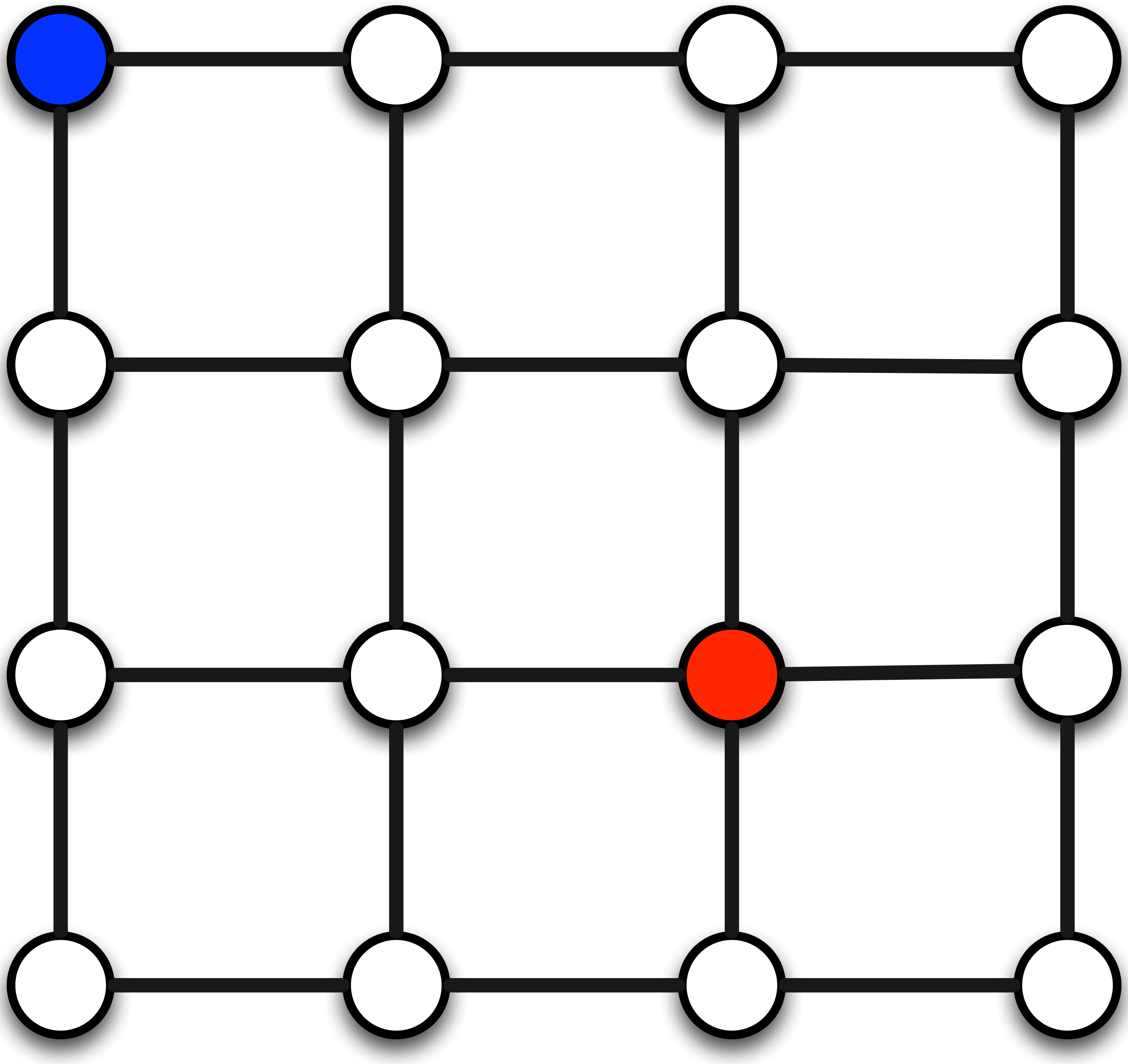
Jeu 27 - Les gendarmes et le voleur



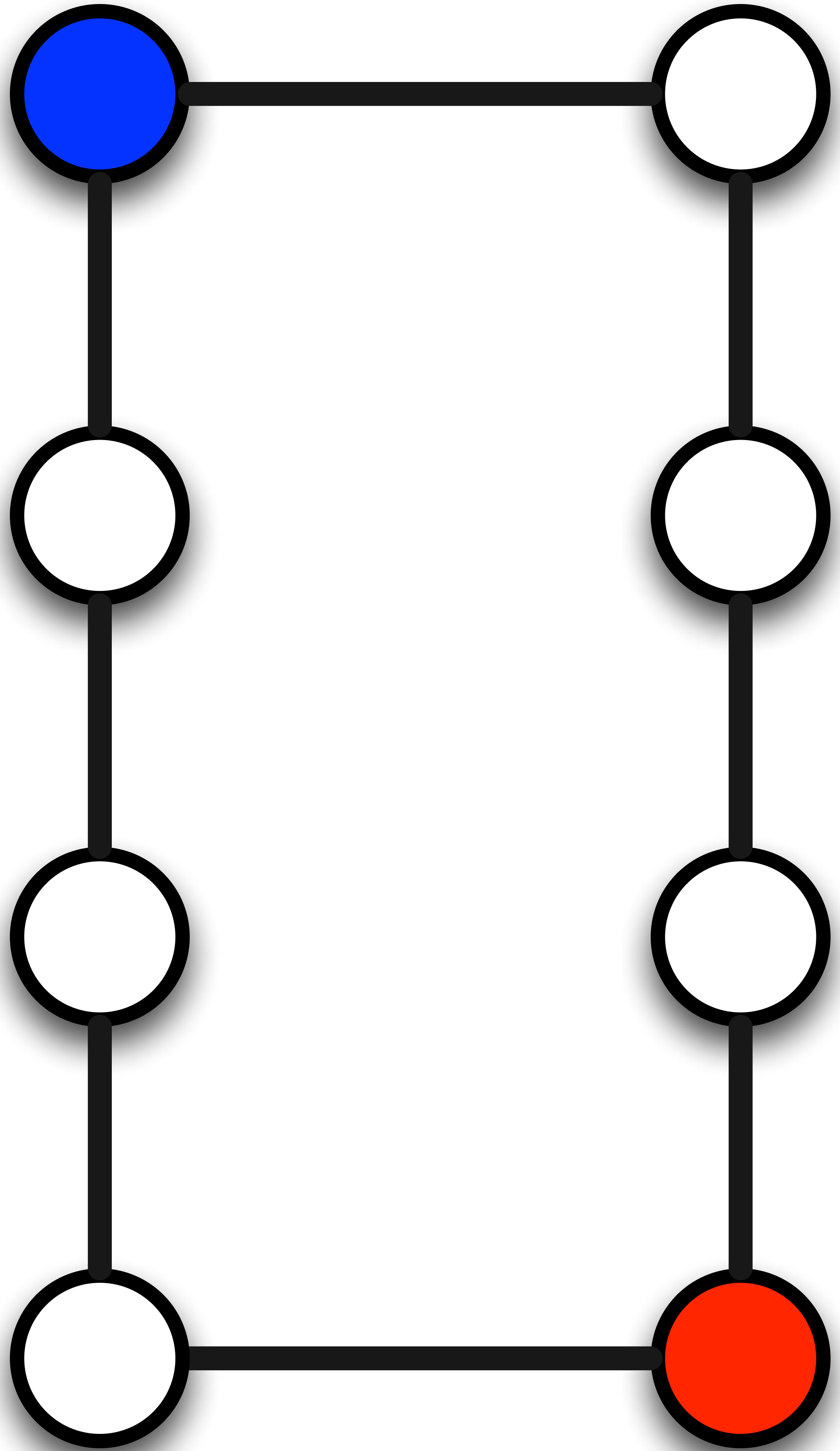
Jeu 28 - Les gendarmes et le voleur



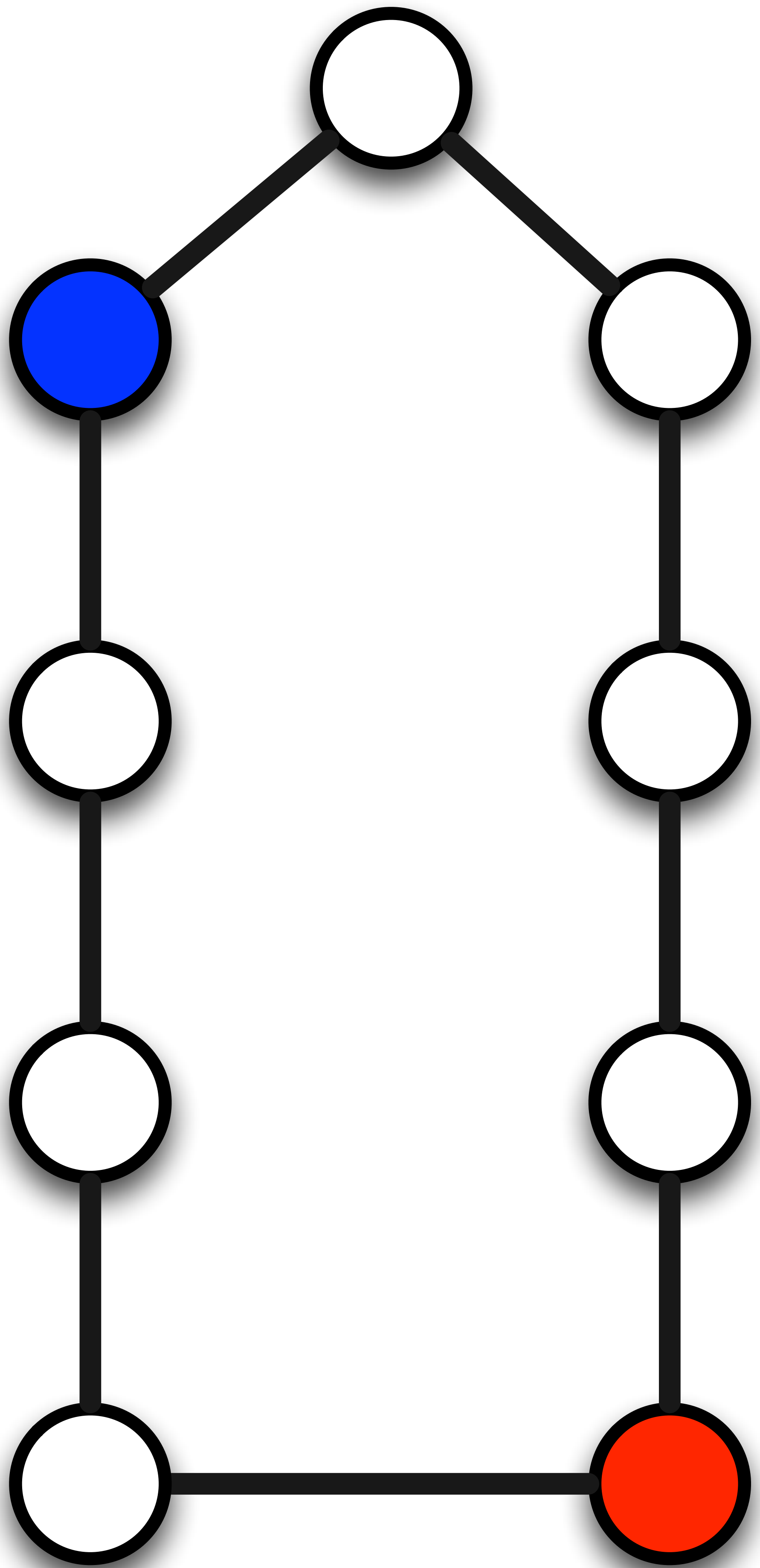
Jeu 29 - Les gendarmes et le voleur



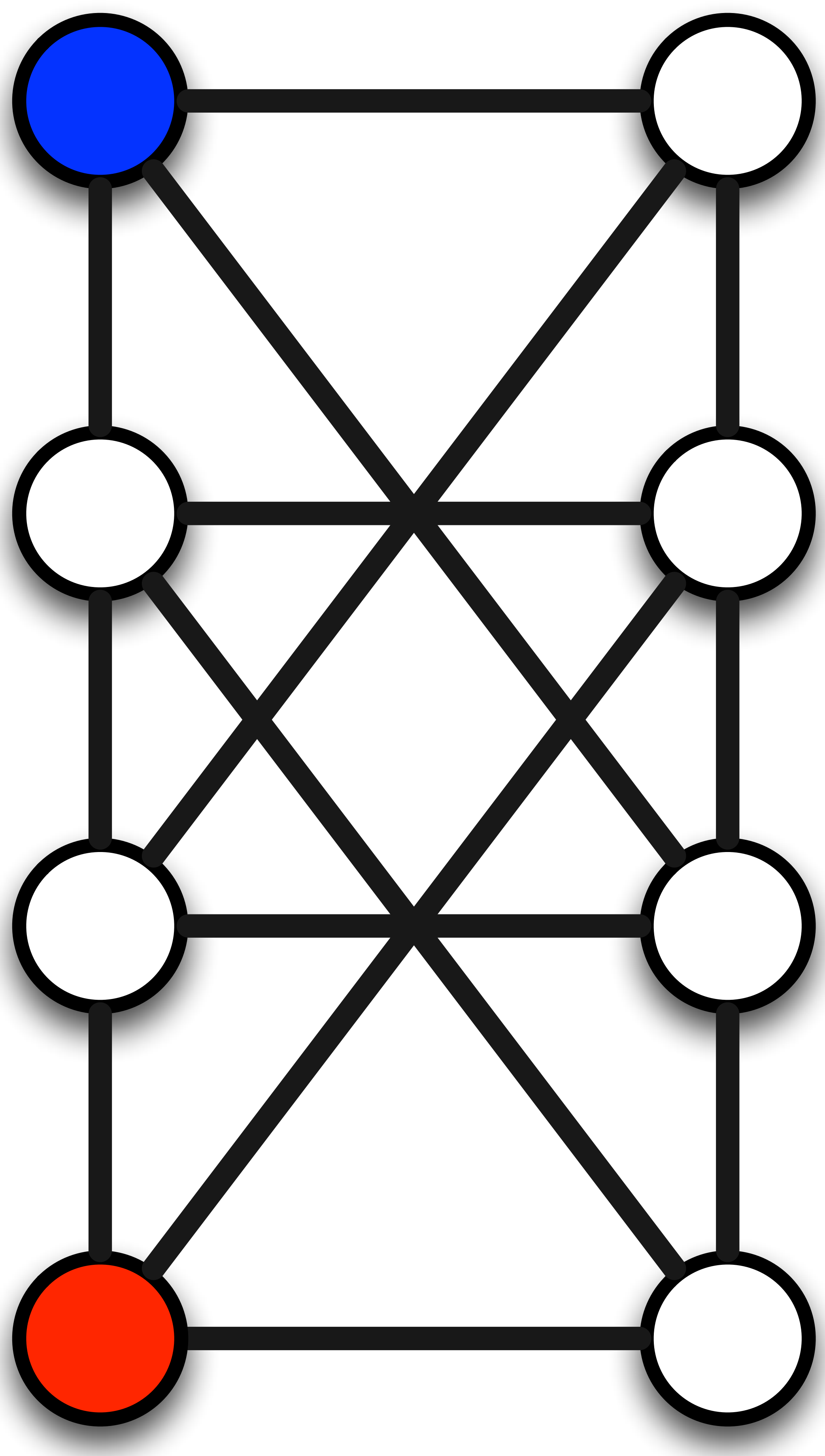
Jeu 30 - Les gendarmes et le voleur



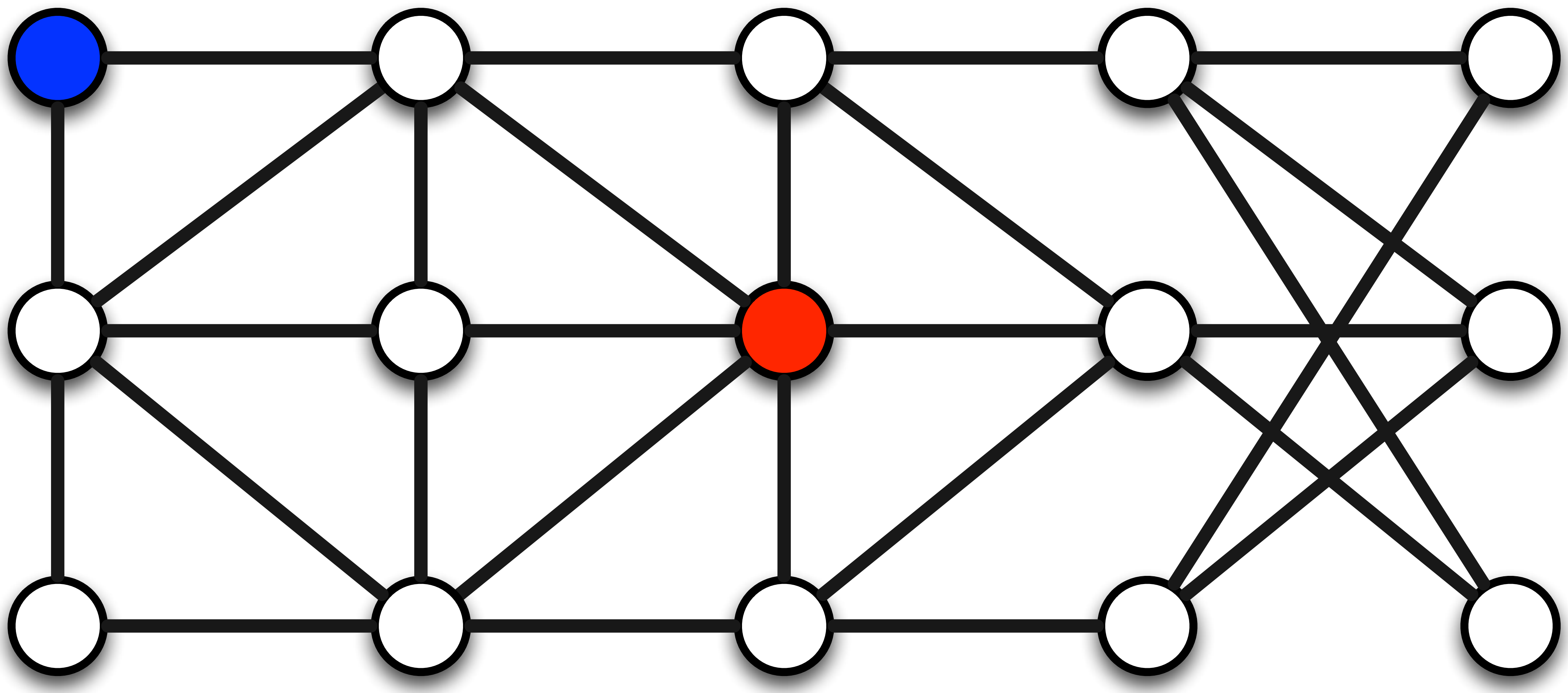
Jeu 31 - Les gendarmes et le voleur



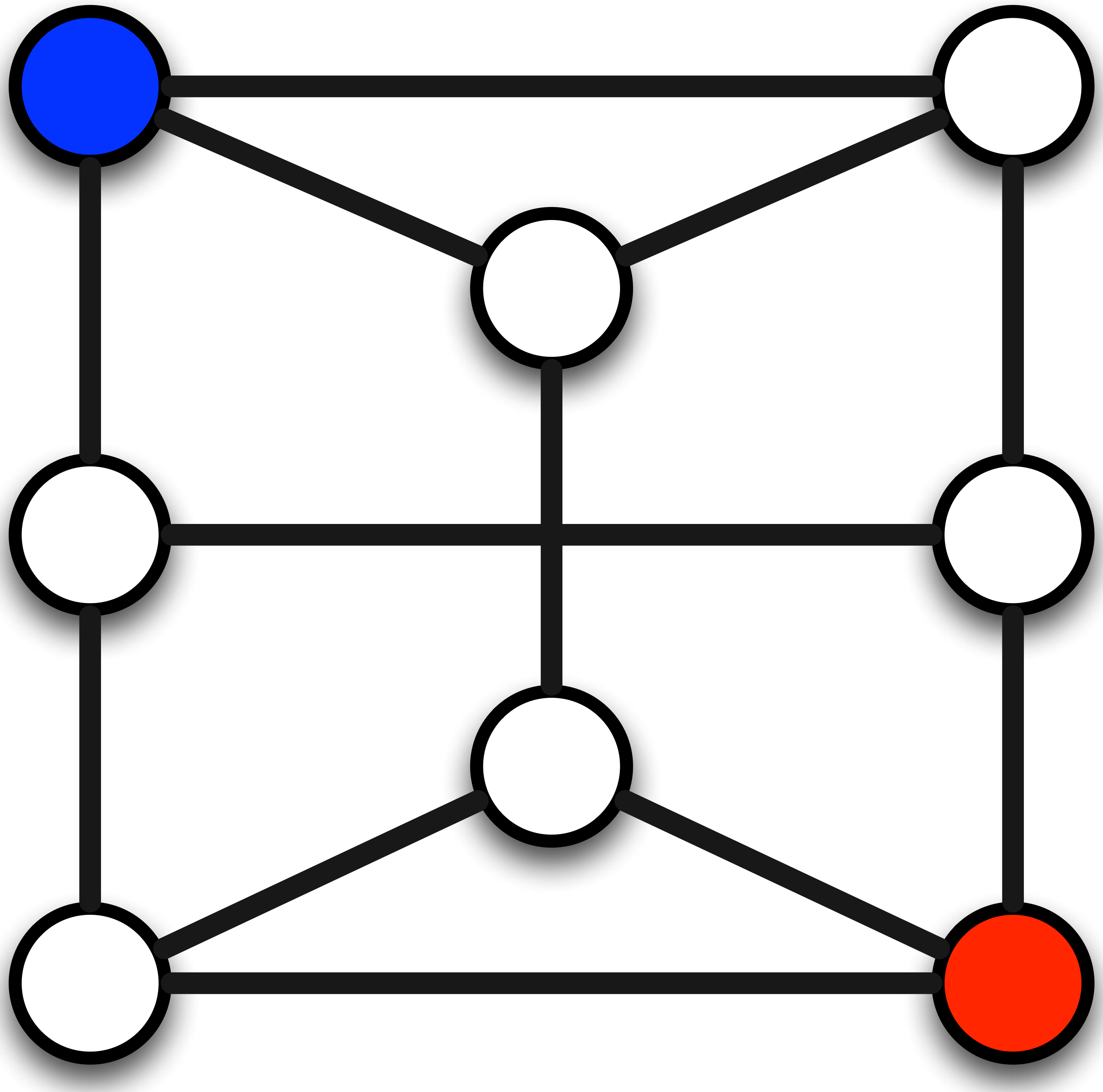
Jeu 32 - Les gendarmes et le voleur



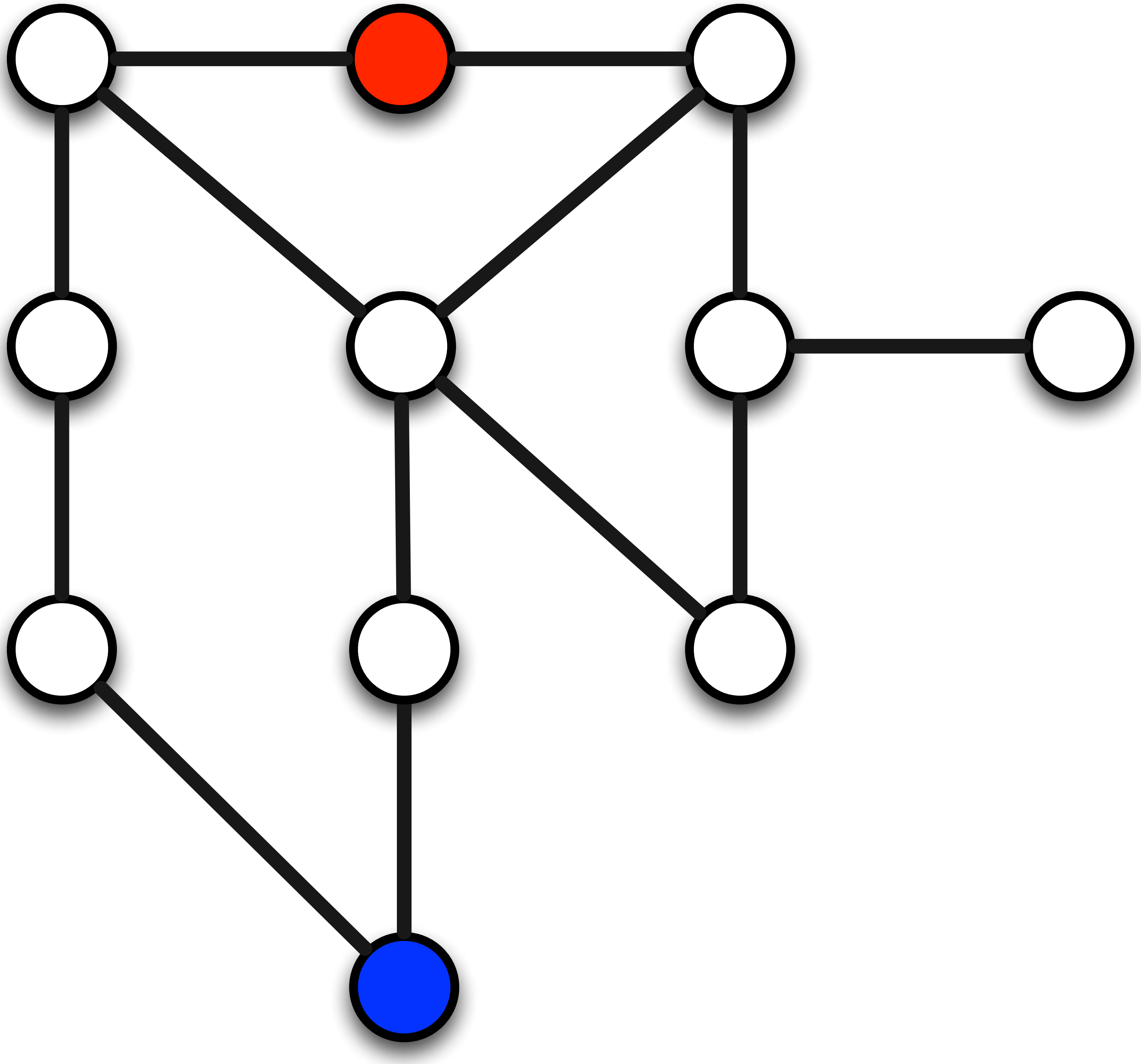
Jeu 33 - Les gendarmes et le voleur



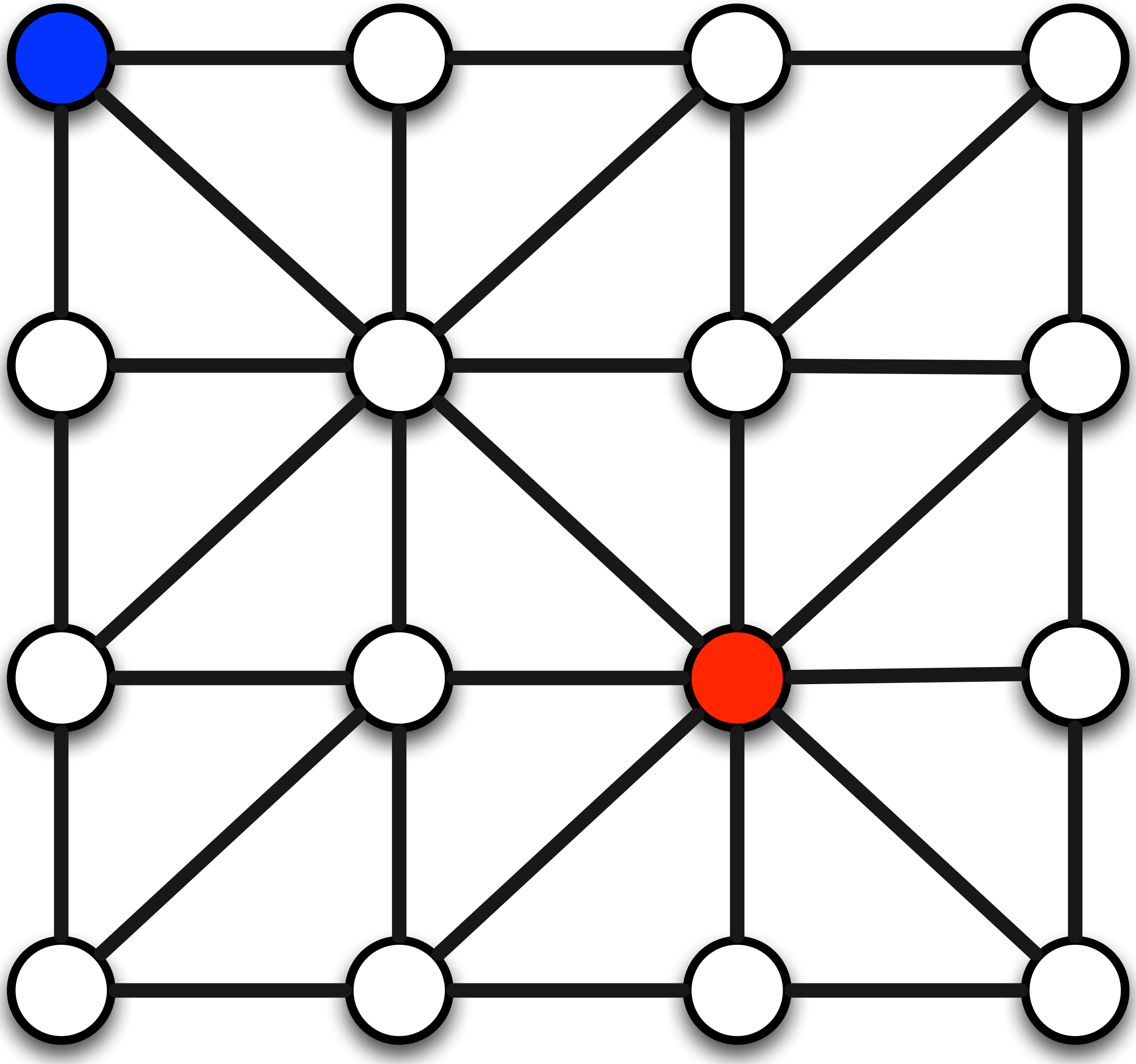
Jeu 34 - Les gendarmes et le voleur



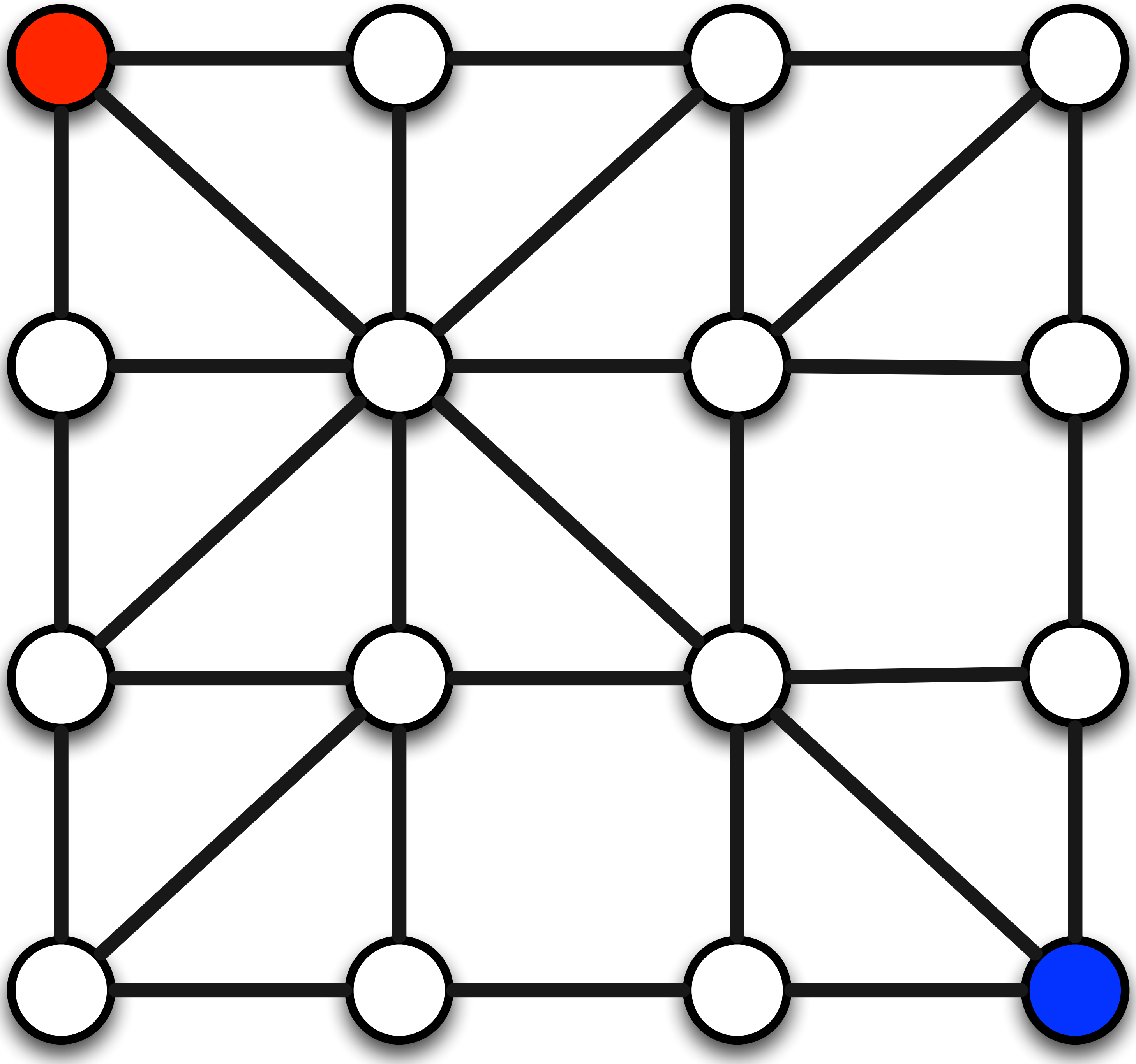
Jeu 35 - Les gendarmes et le voleur



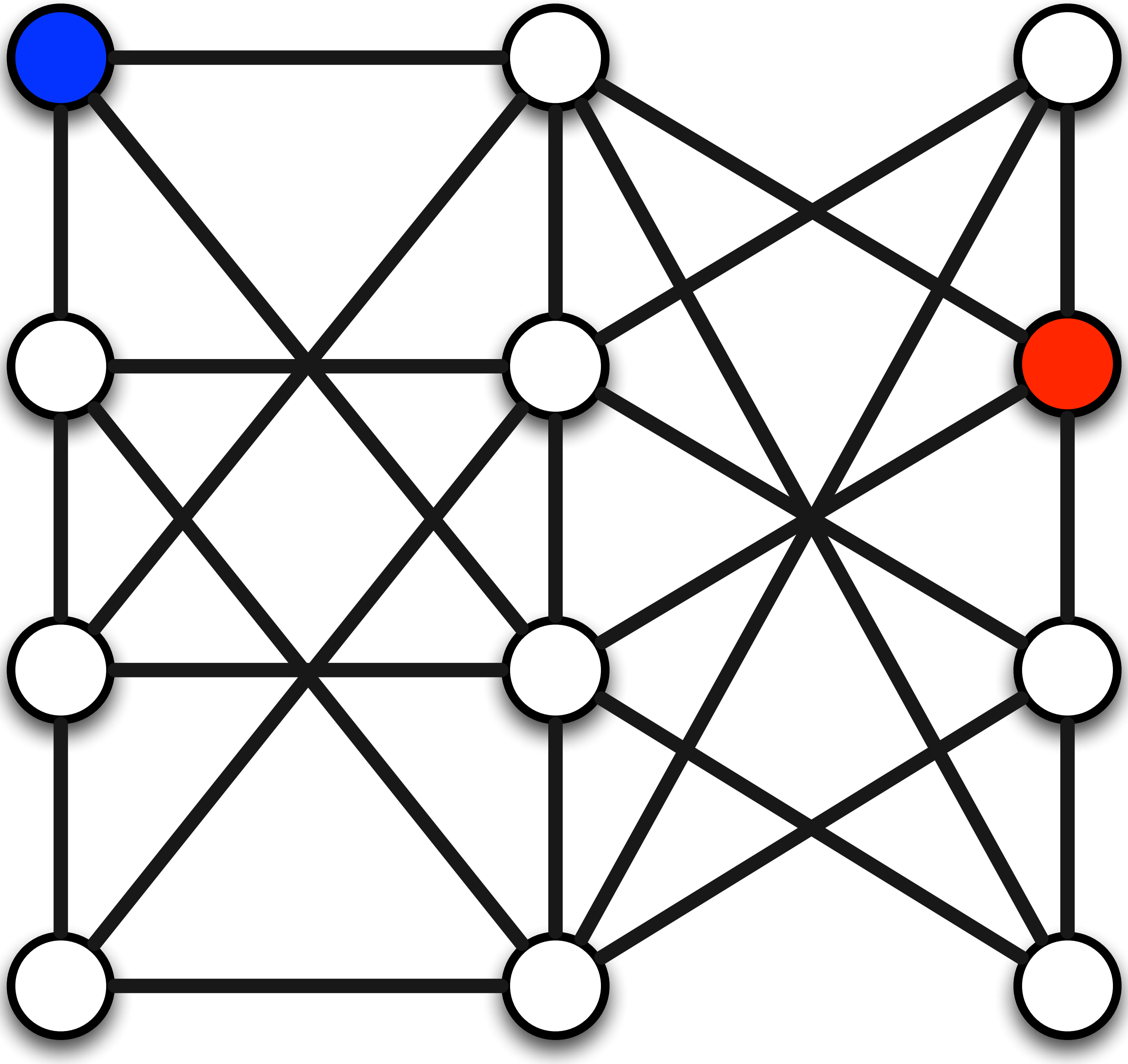
Jeu 36 - Les gendarmes et le voleur



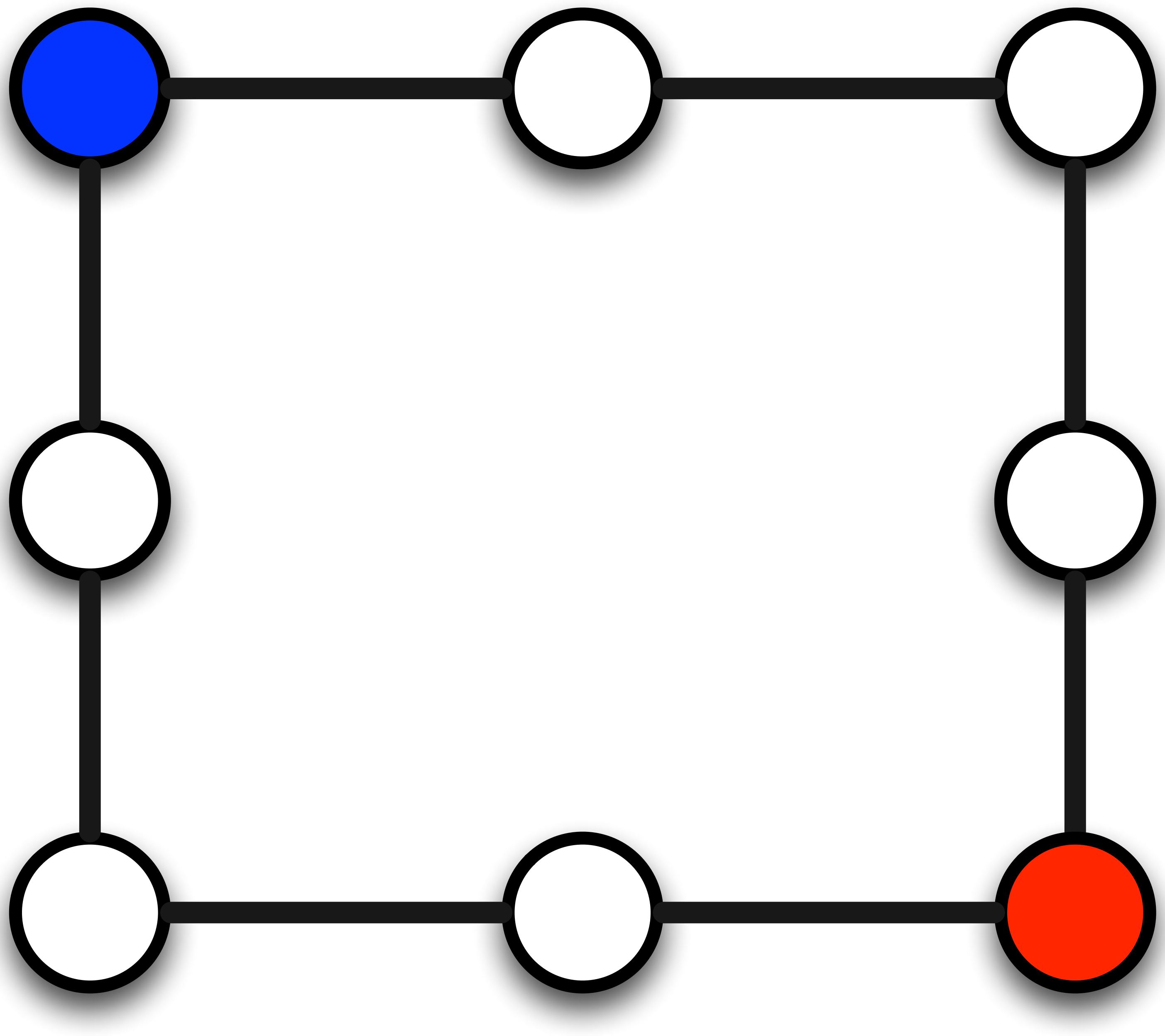
Jeu 37 - Les gendarmes et le voleur



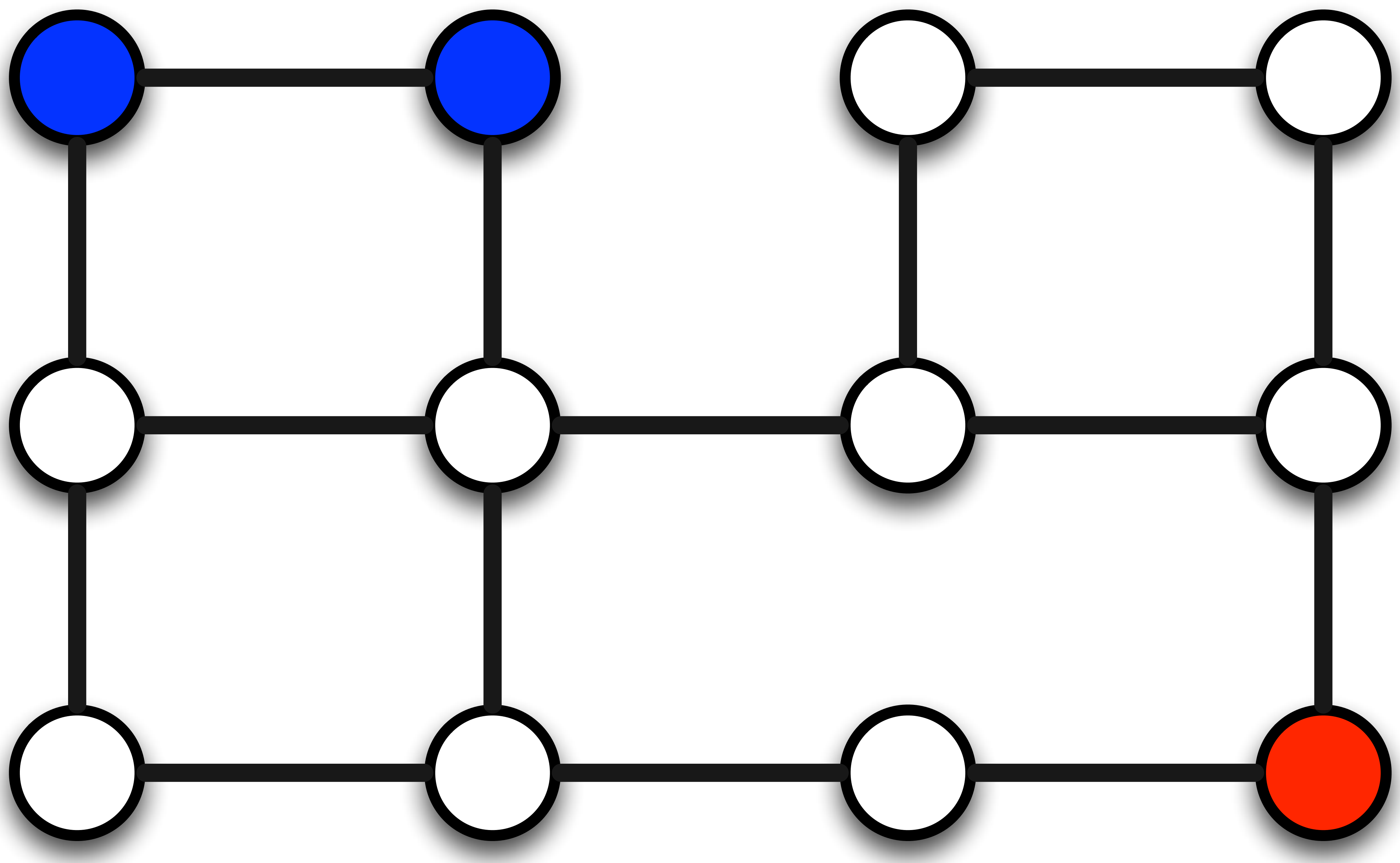
Jeu 38 - Les gendarmes et le voleur



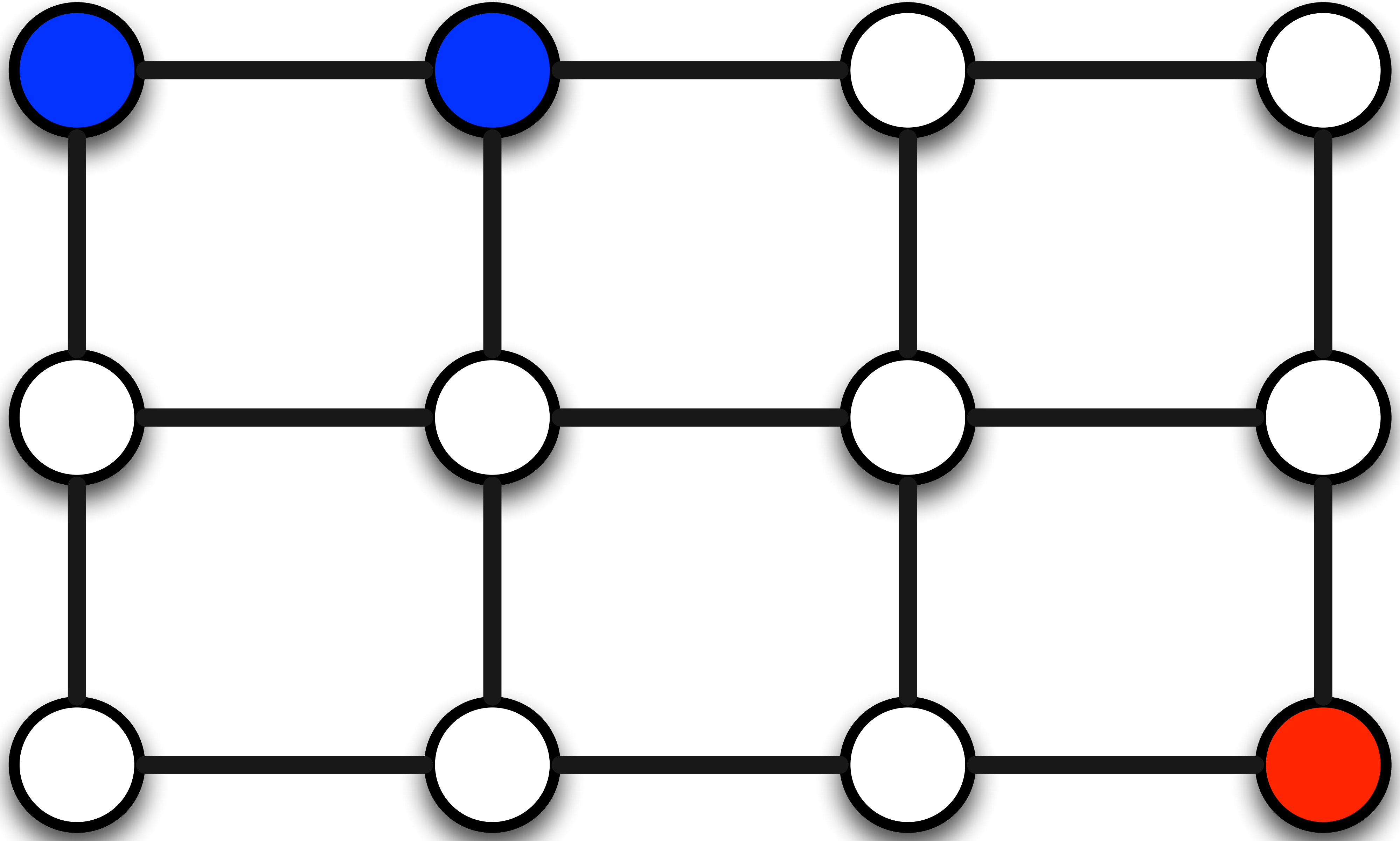
Jeu 39 - Les gendarmes et le voleur



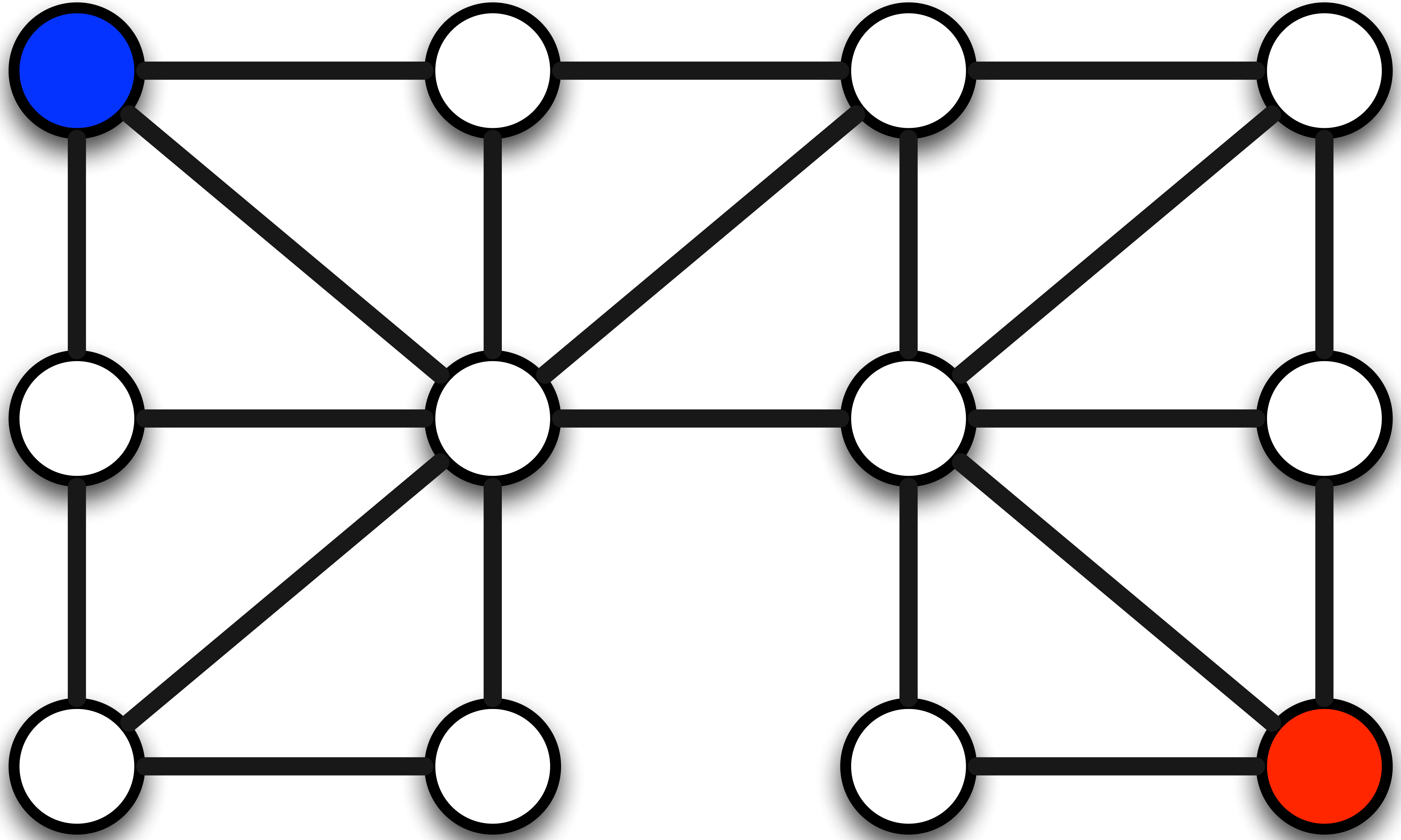
Jeu 40 - Les gendarmes et le voleur



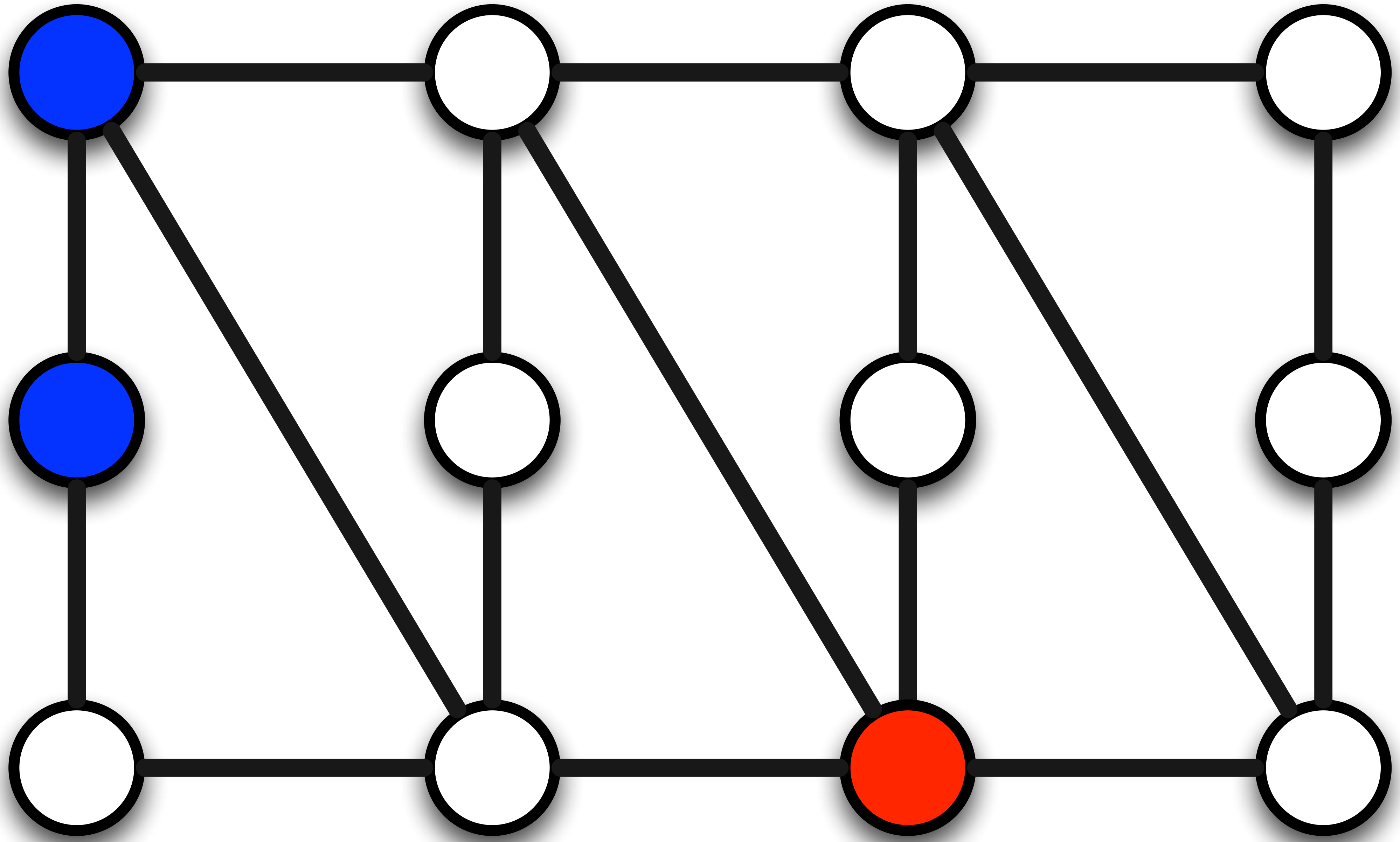
Jeu 41 - Les gendarmes et le voleur



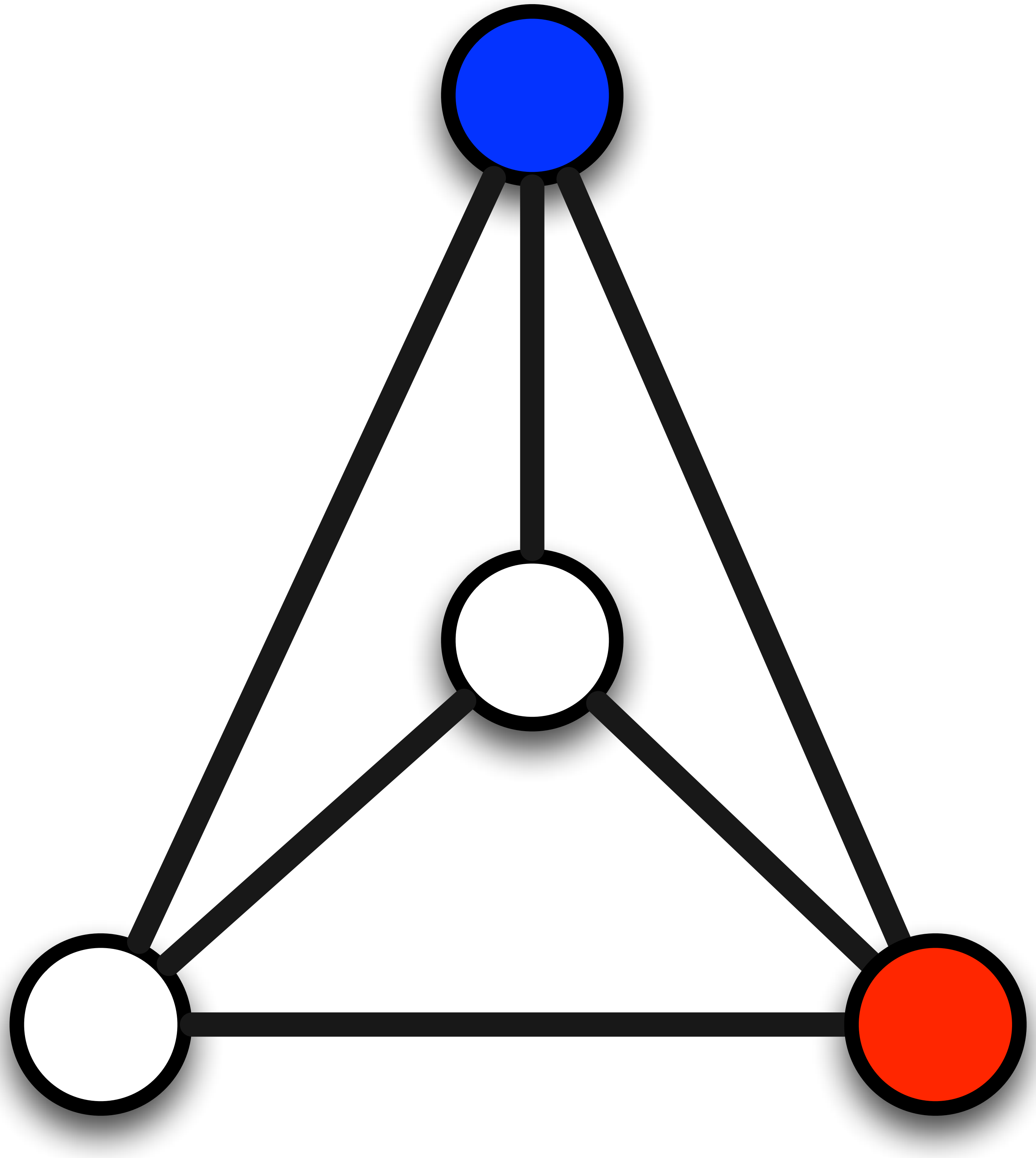
Jeu 42 - Les gendarmes et le voleur



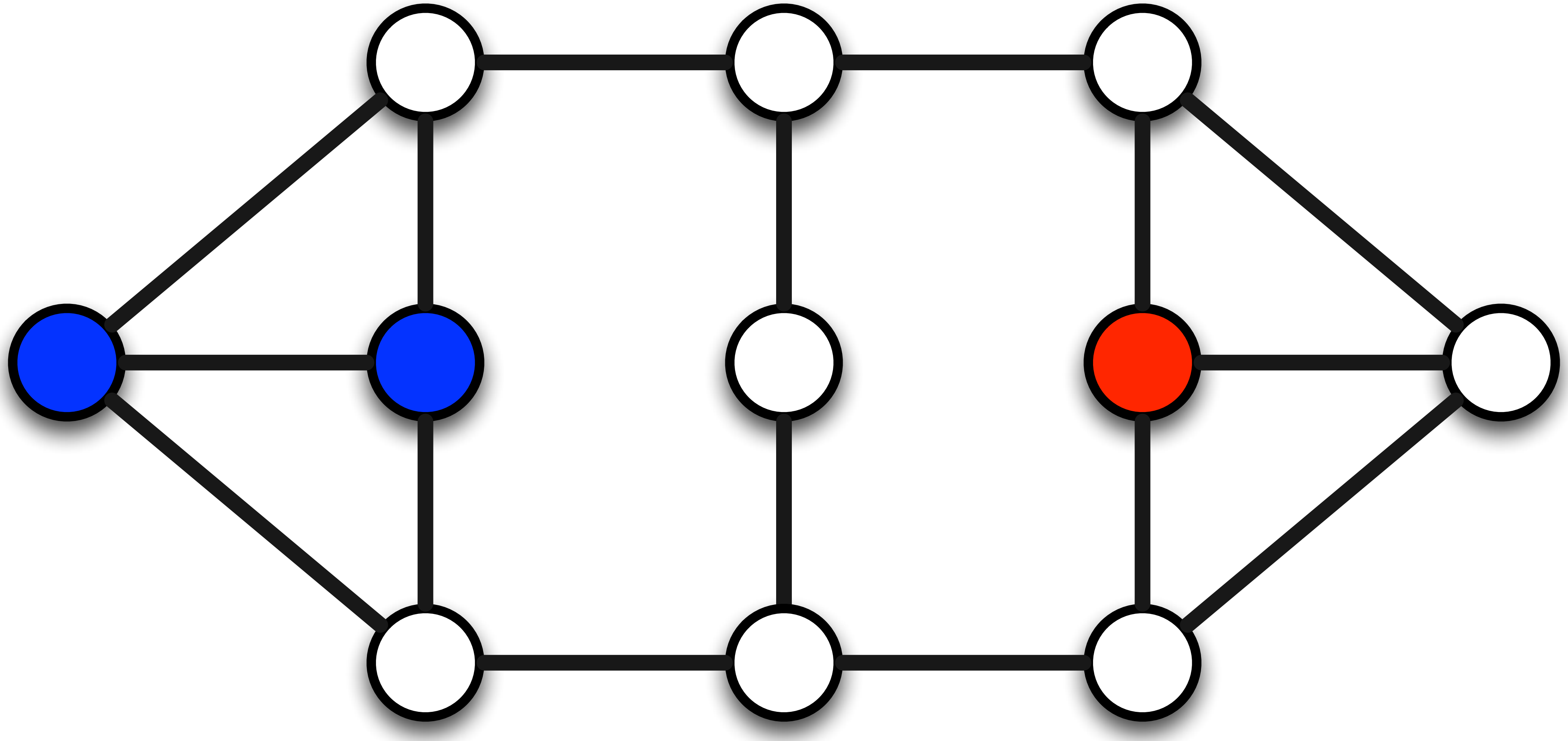
Jeu 43 - Les gendarmes et le voleur



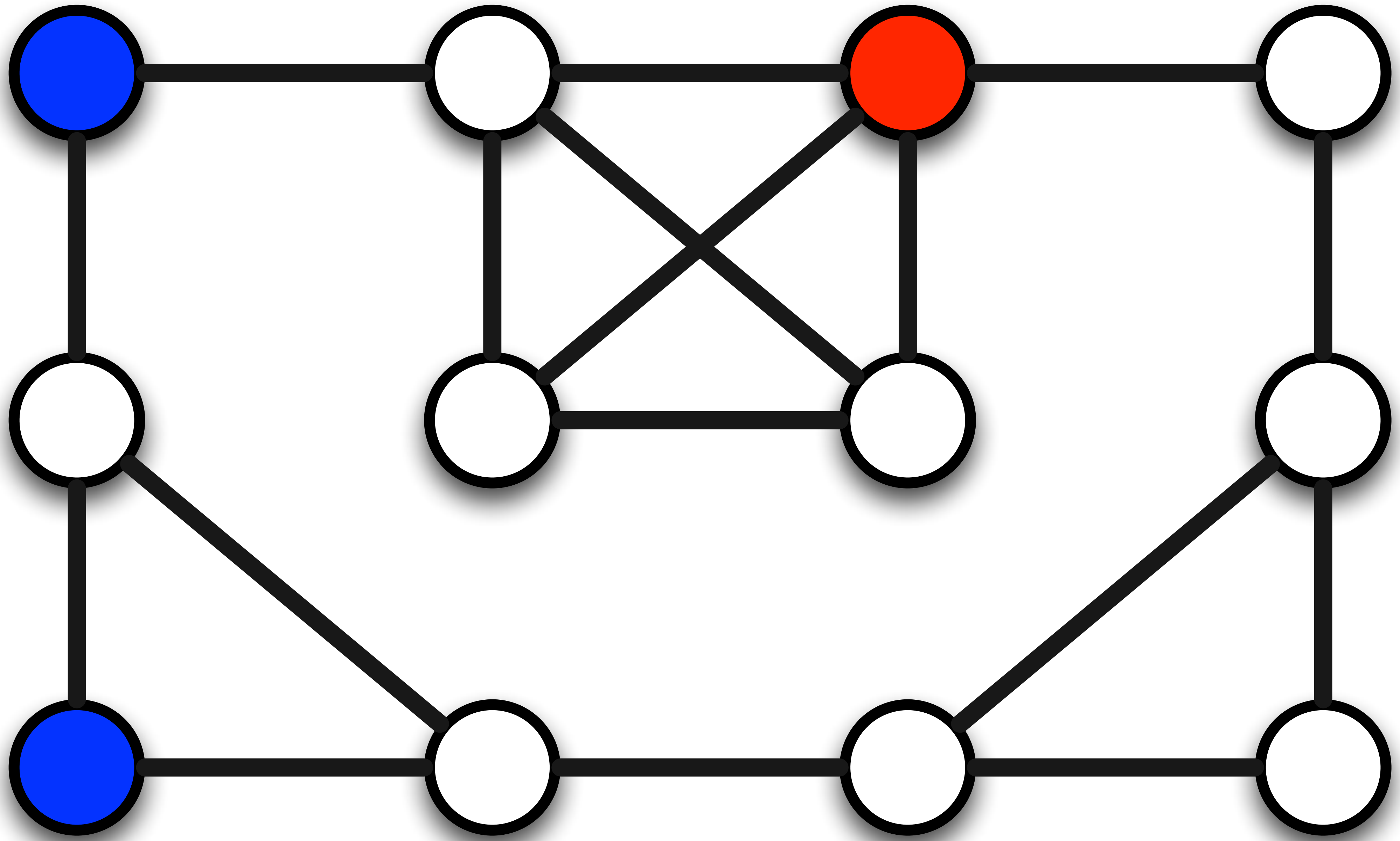
Jeu 44 - Les gendarmes et le voleur



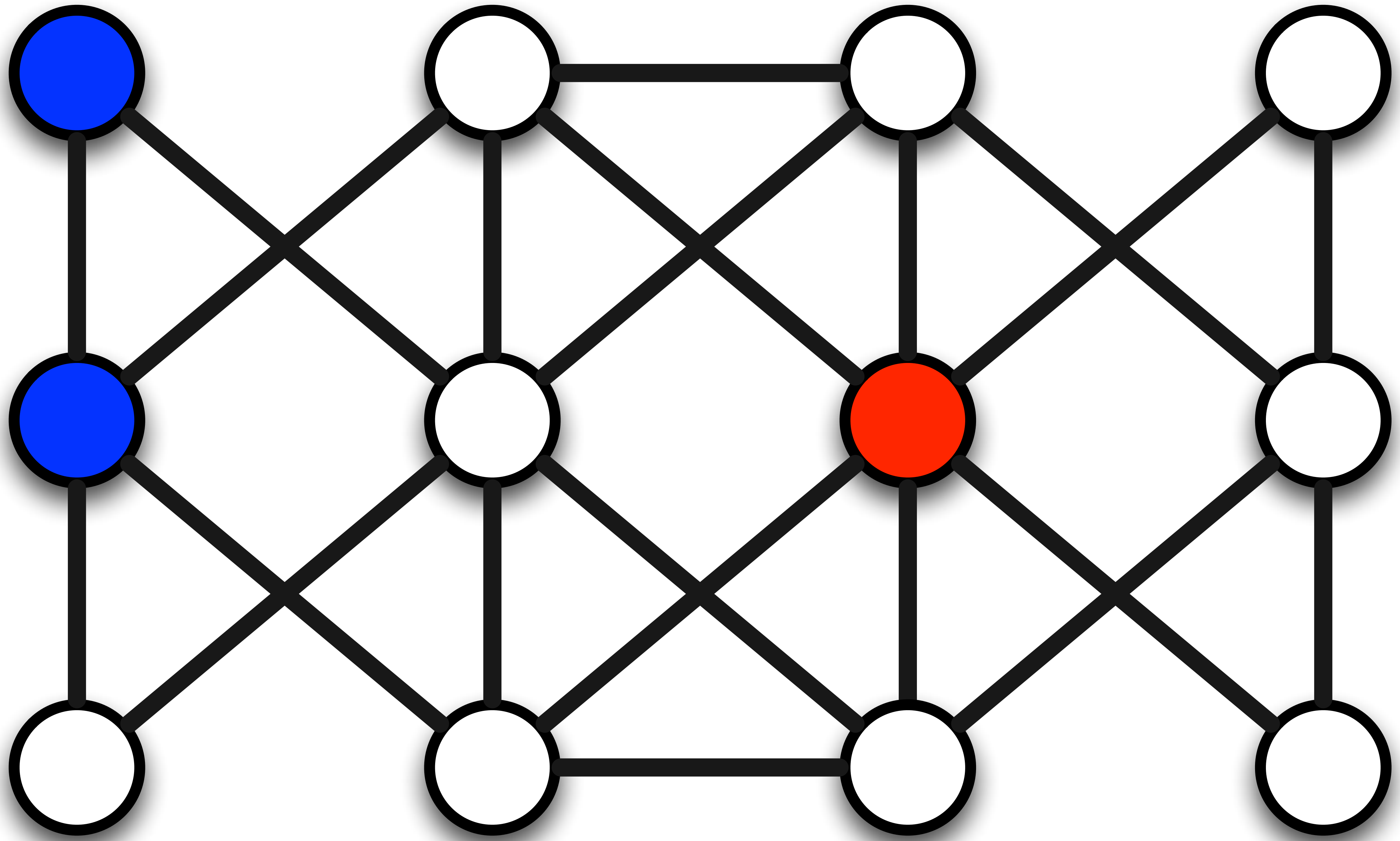
Jeu 45 - Les gendarmes et le voleur



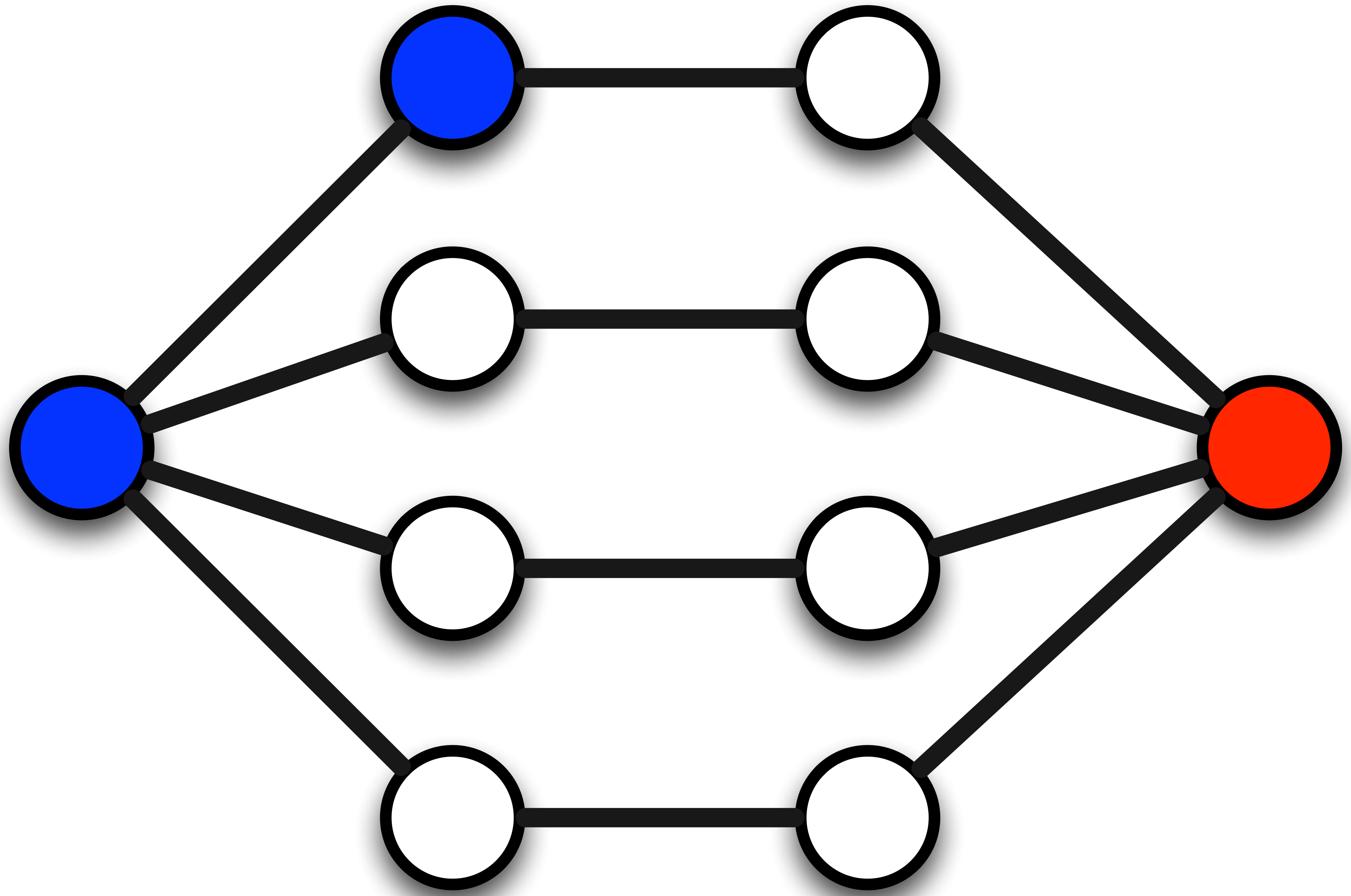
Jeu 46 - Les gendarmes et le voleur



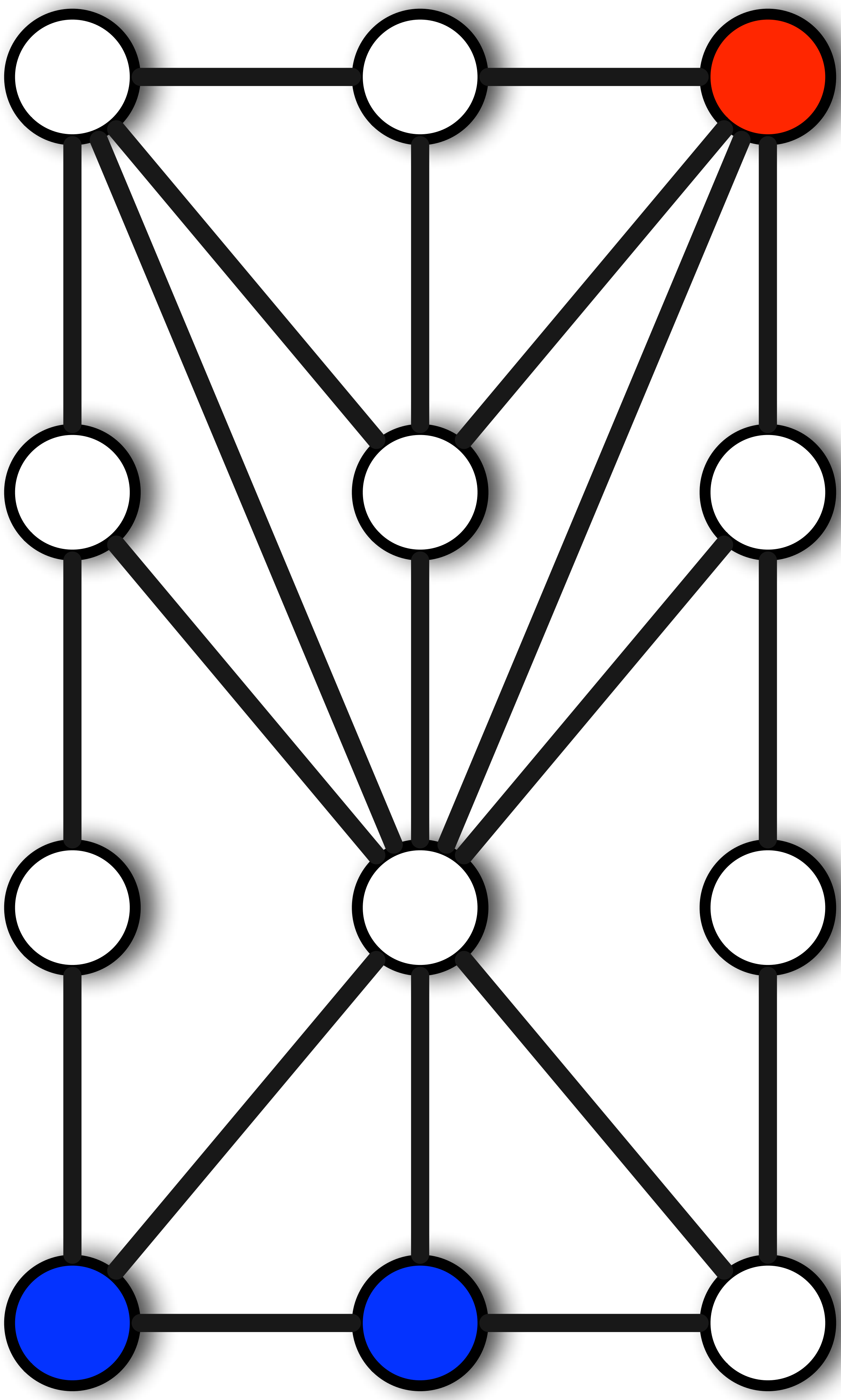
Jeu 47 - Les gendarmes et le voleur



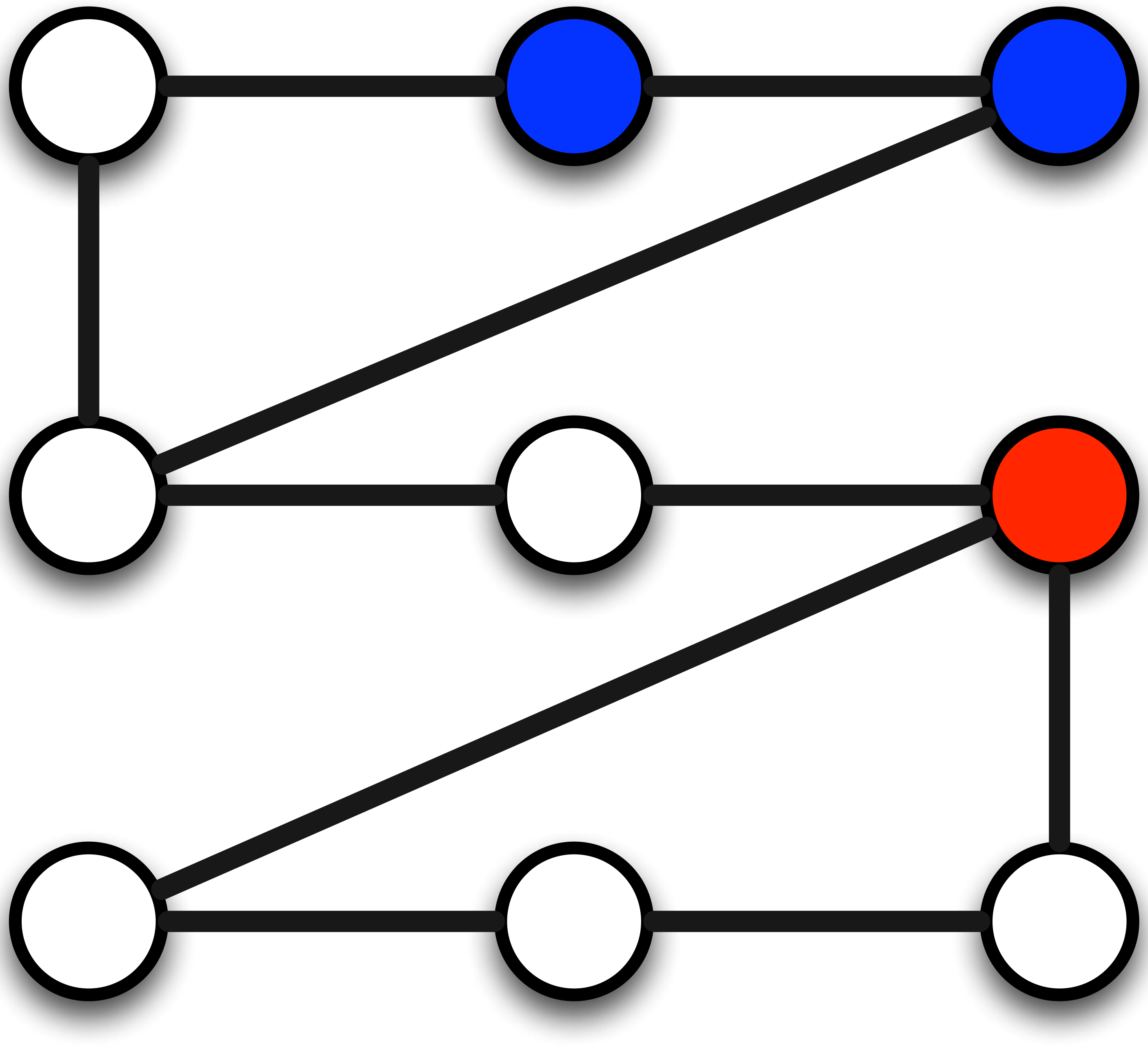
Jeu 48 - Les gendarmes et le voleur



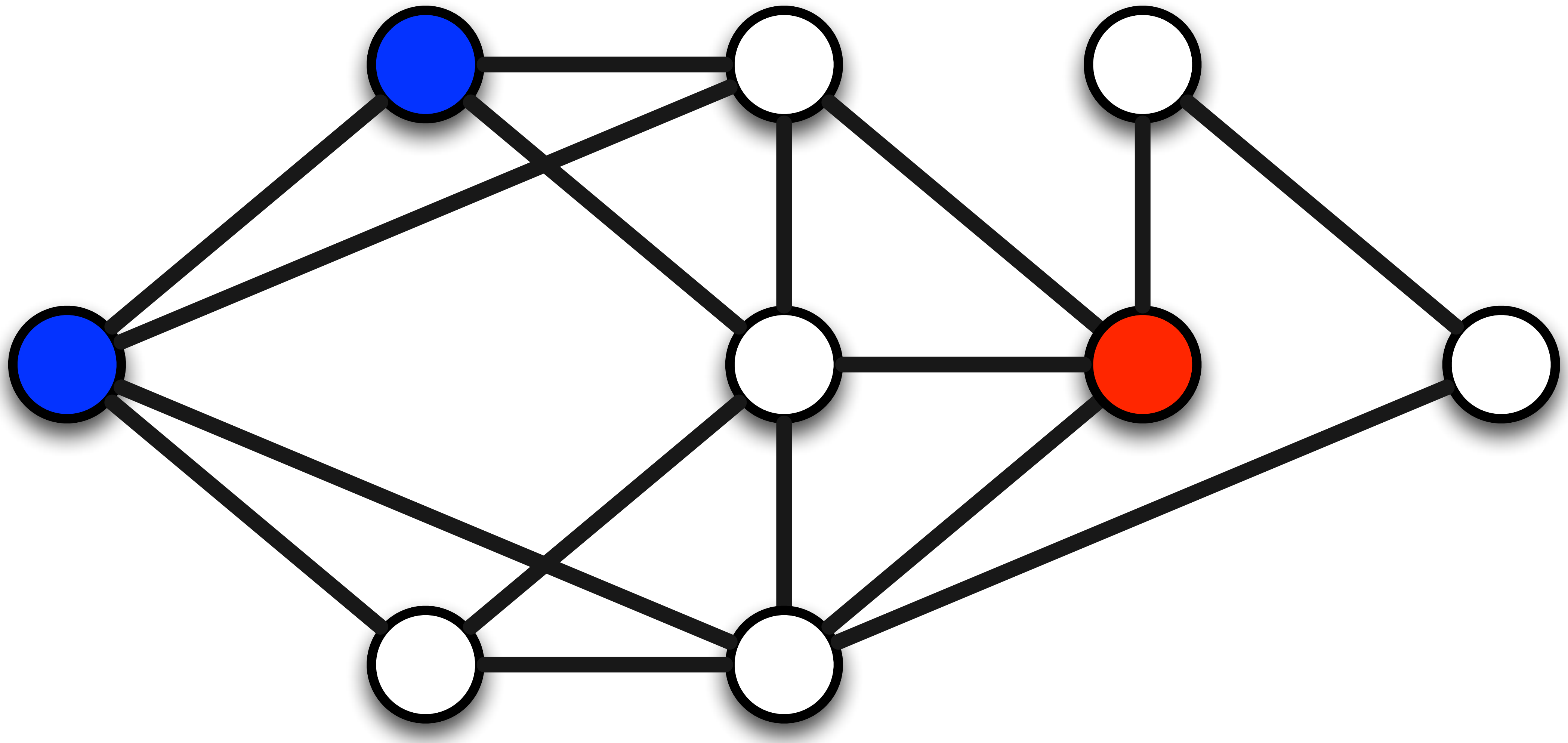
Jeu 49 - Les gendarmes et le voleur



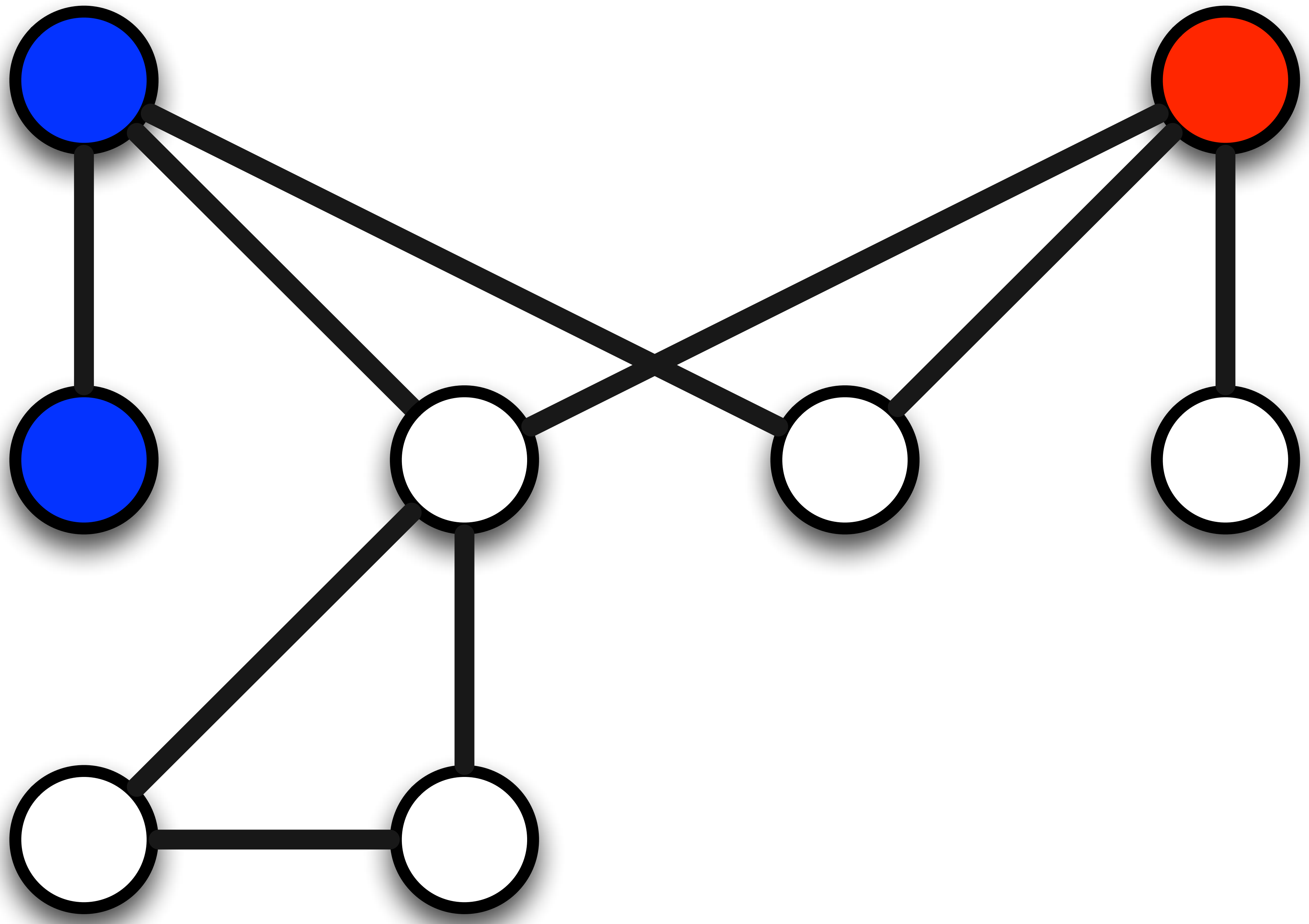
Jeu 50 - Les gendarmes et le voleur



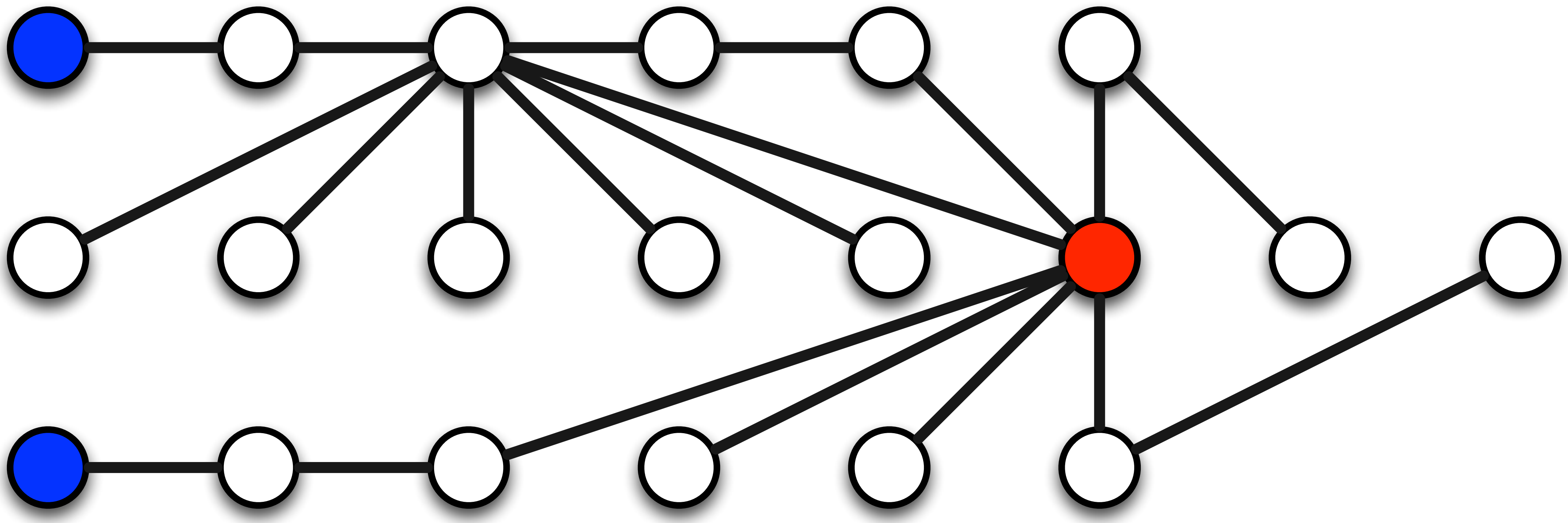
Jeu 51 - Les gendarmes et le voleur



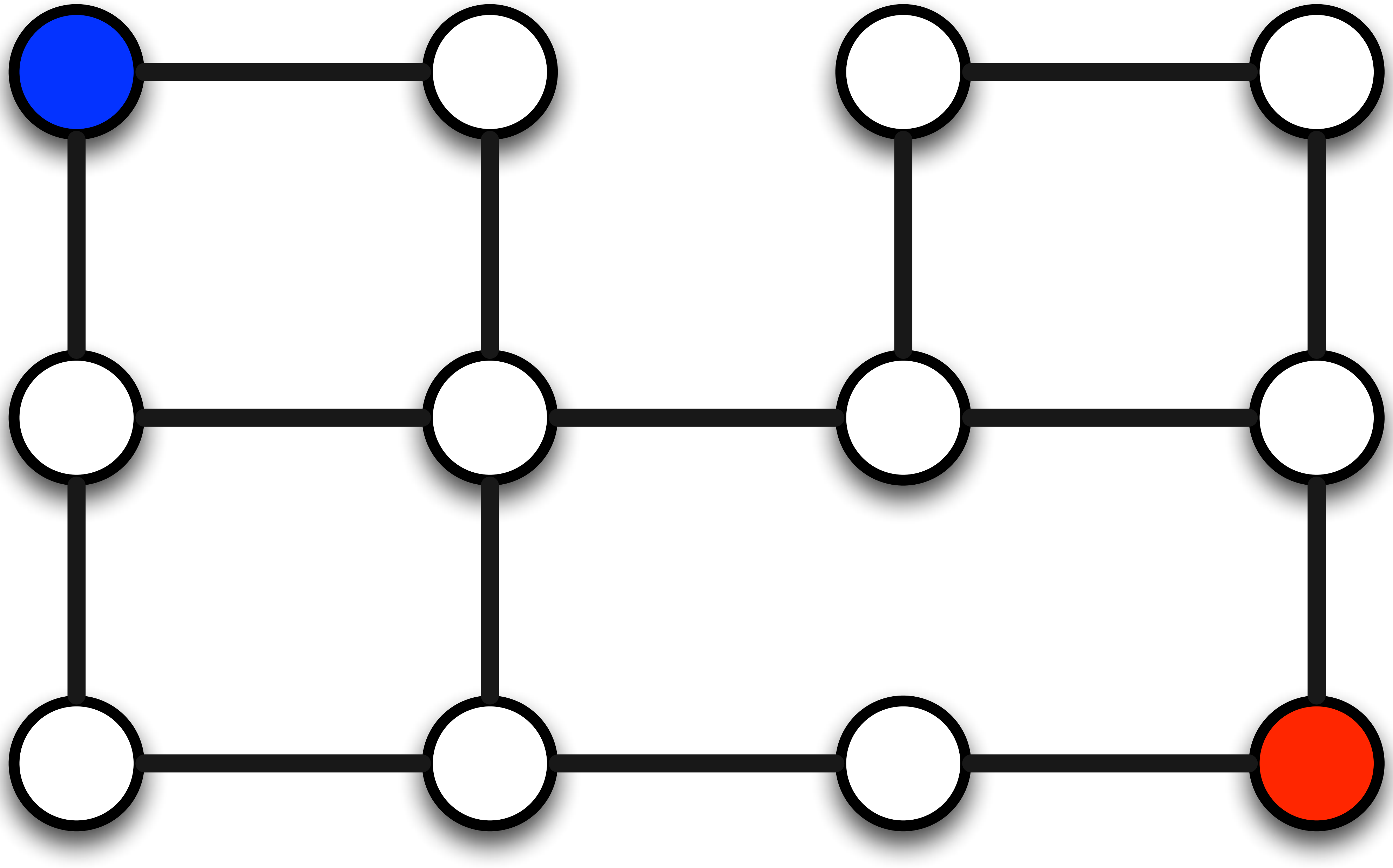
Jeu 52 - Les gendarmes et le voleur



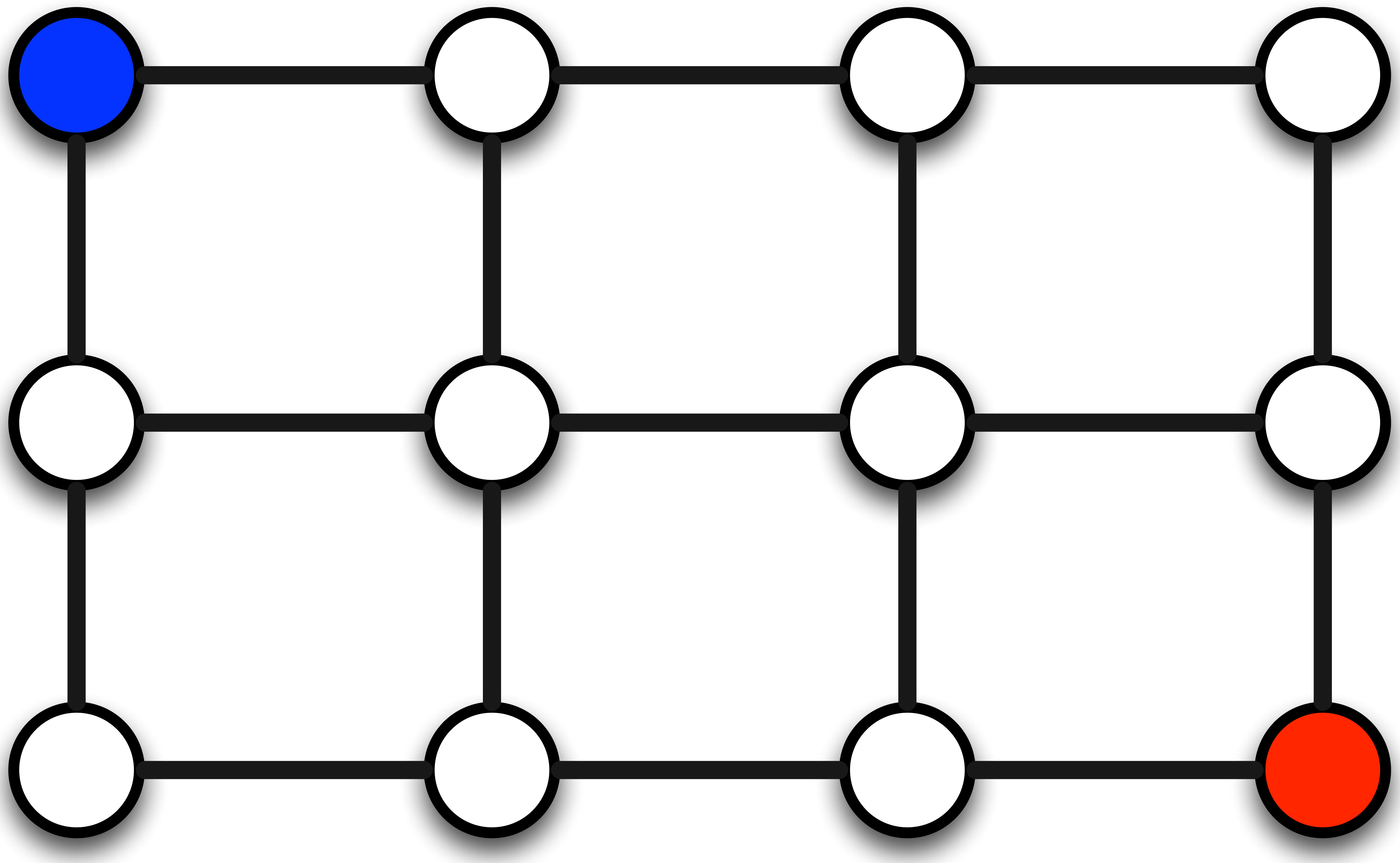
Jeu 53 - Les gendarmes et le voleur



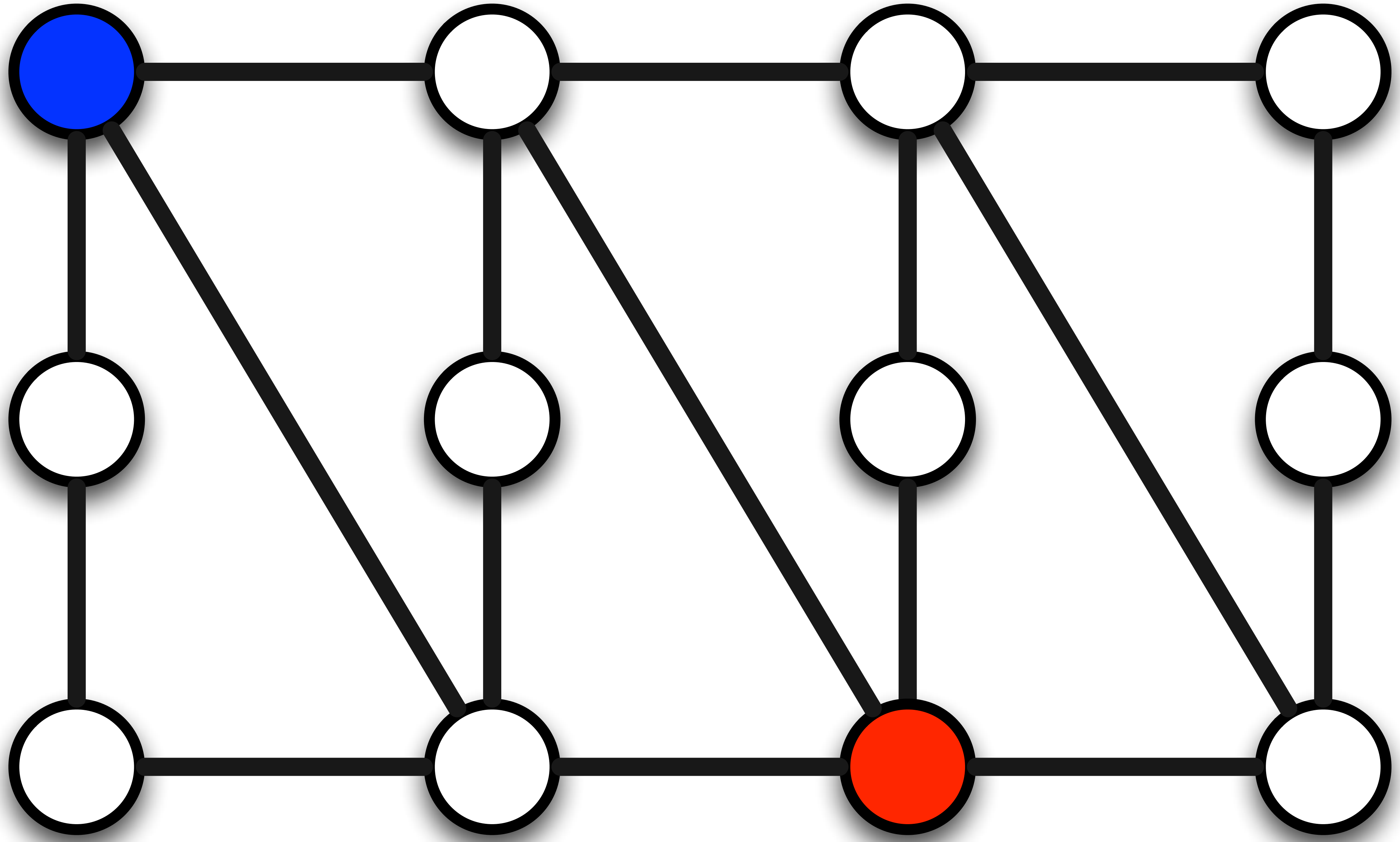
Jeu 54 - Les gendarmes et le voleur



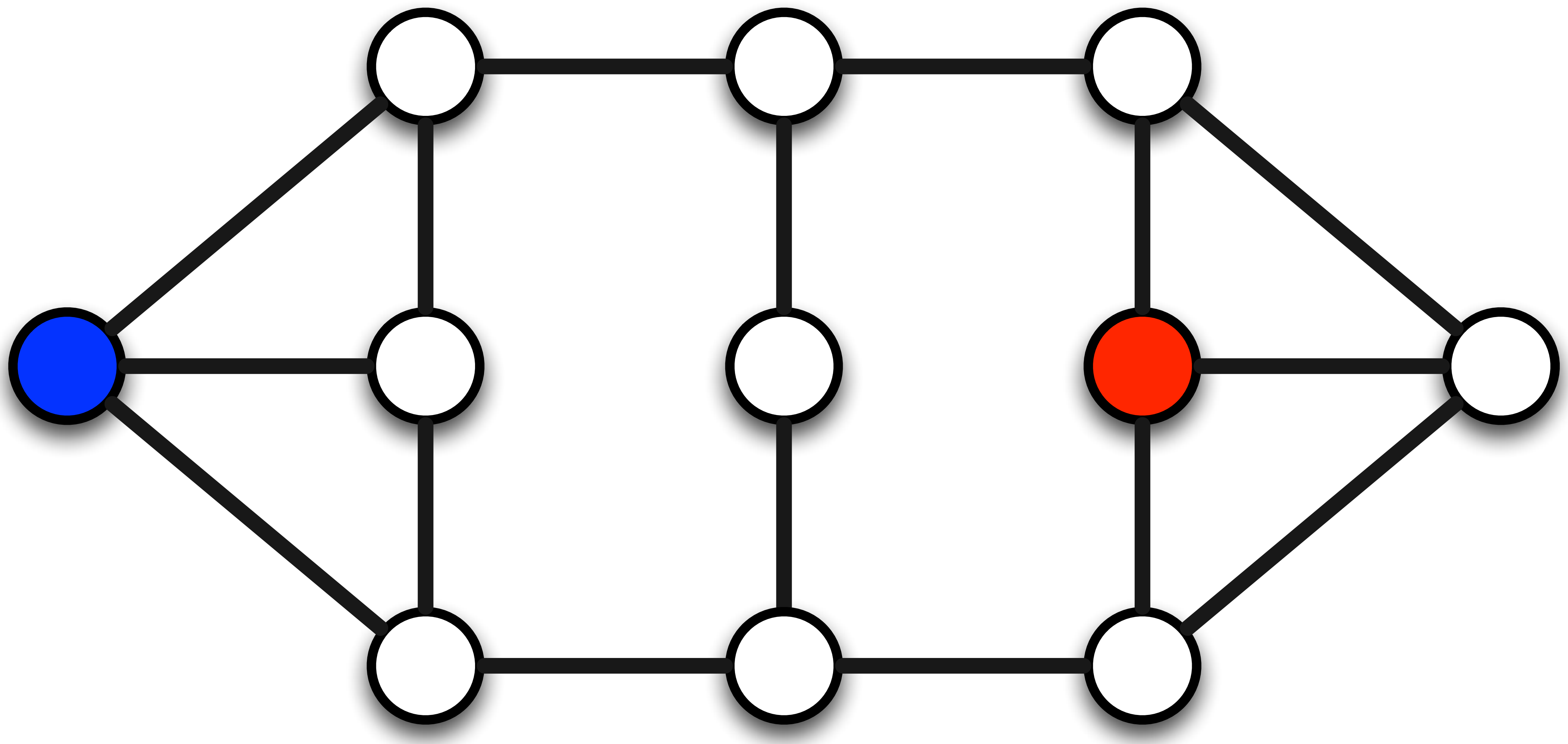
Jeu 55 - Les gendarmes et le voleur



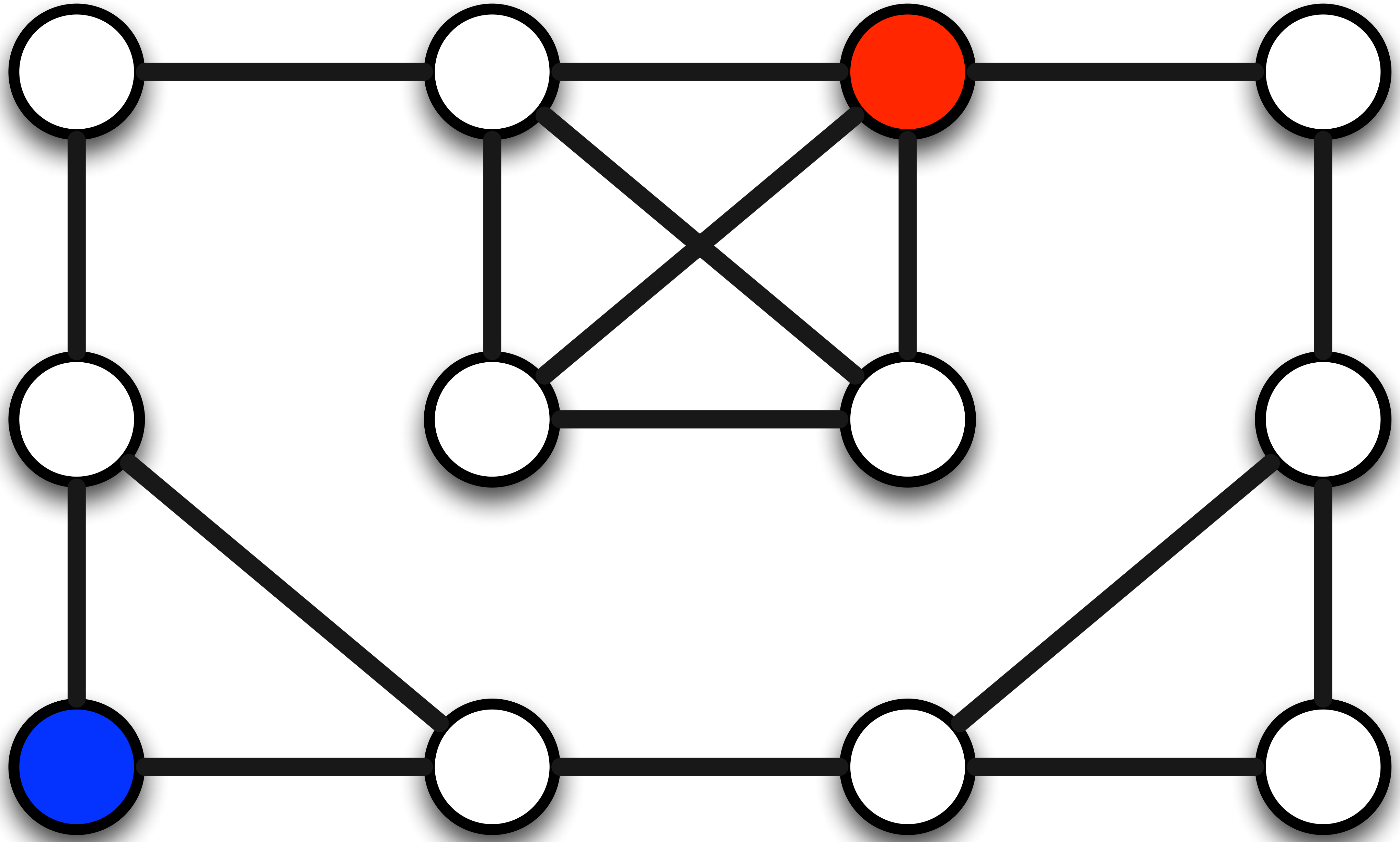
Jeu 56 - Les gendarmes et le voleur



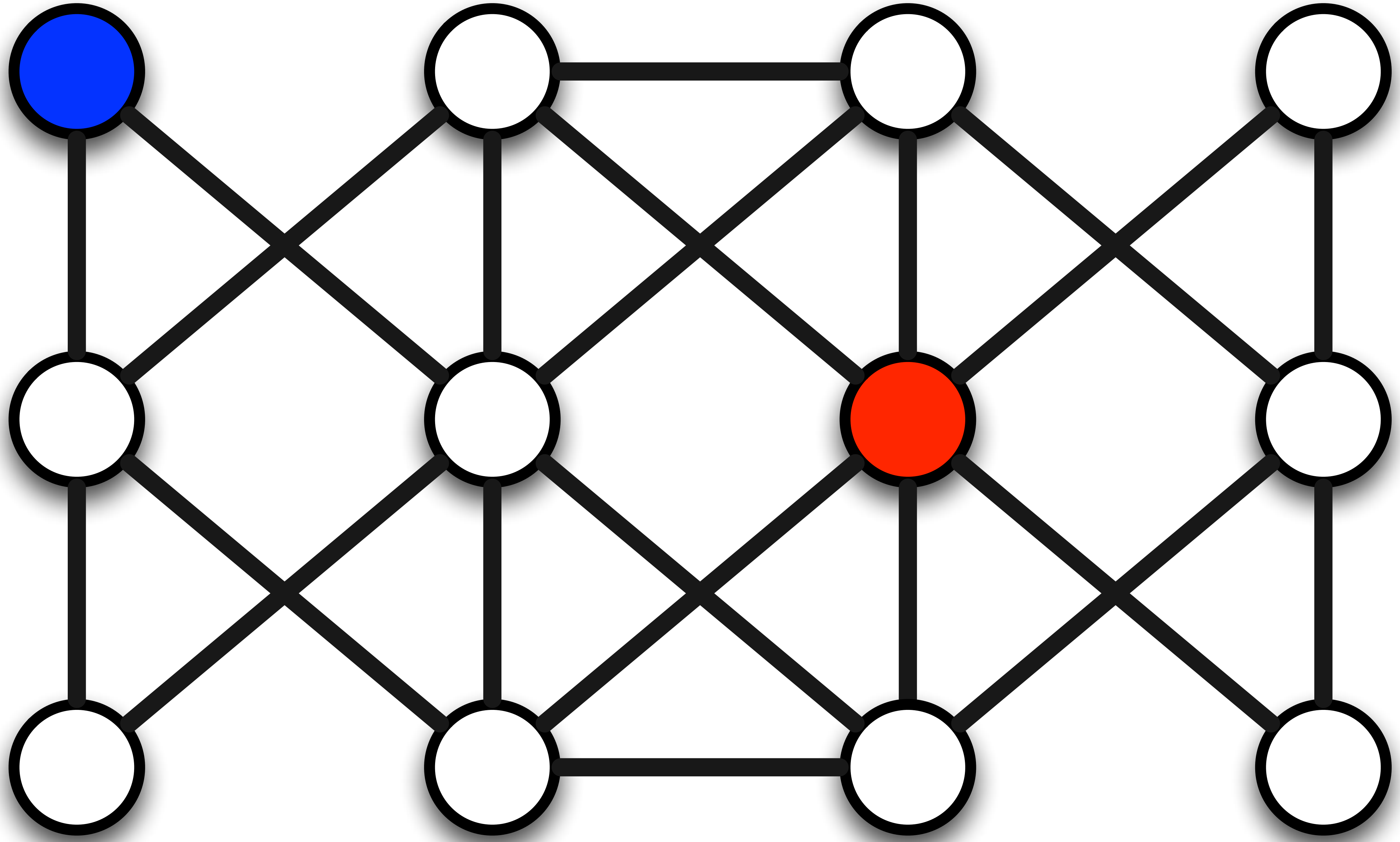
Jeu 57 - Les gendarmes et le voleur



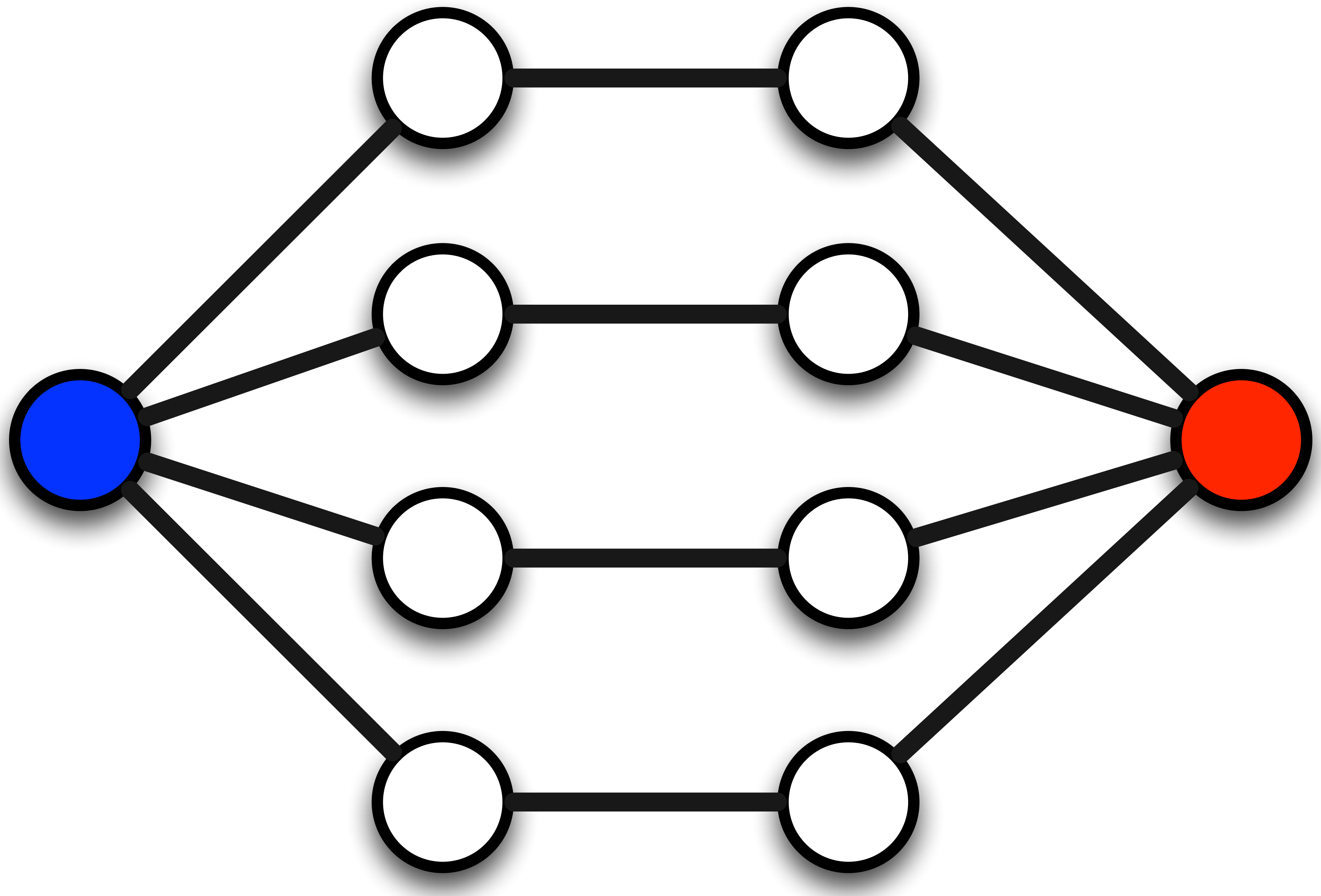
Jeu 58 - Les gendarmes et le voleur



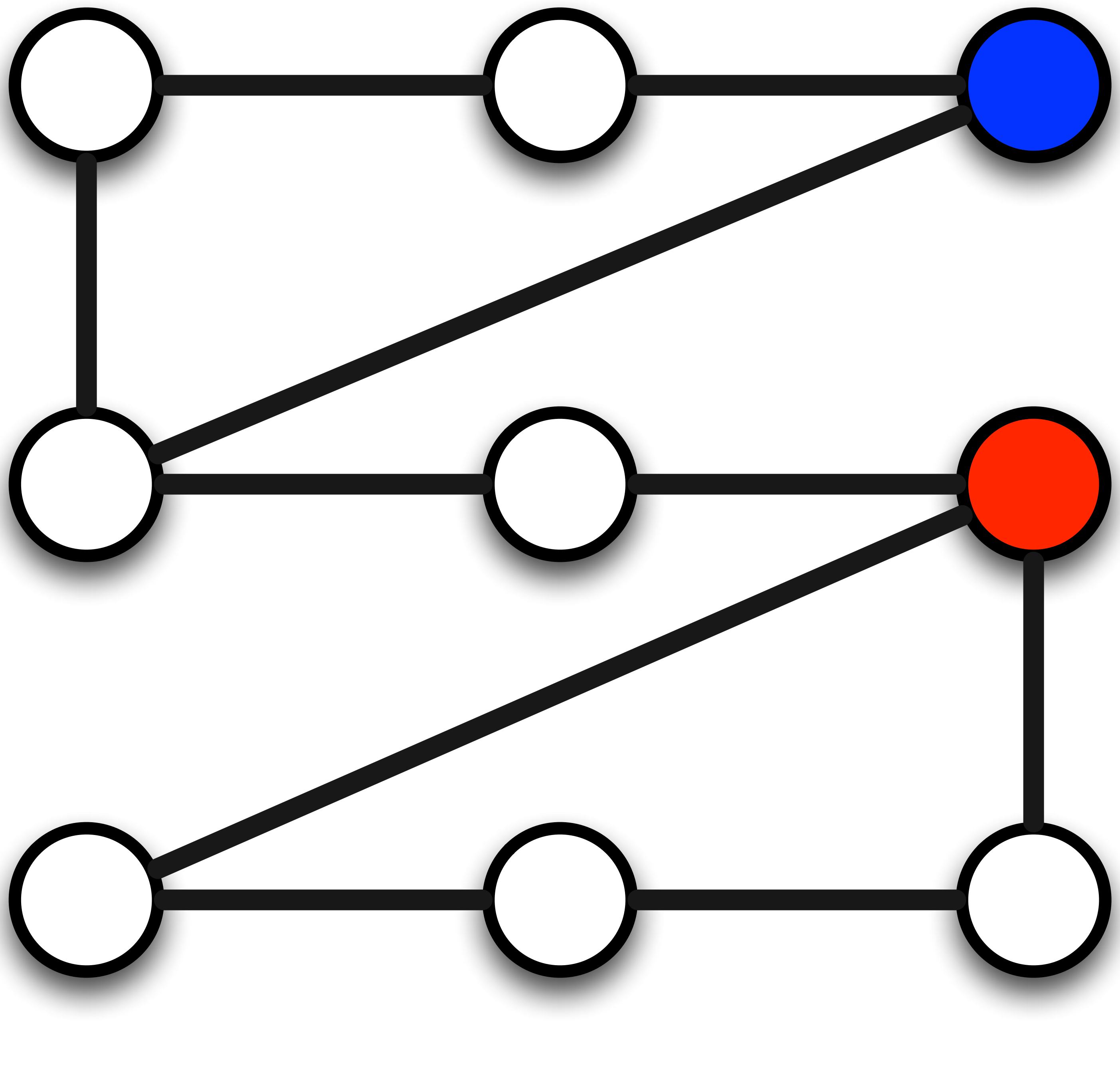
Jeu 59 - Les gendarmes et le voleur



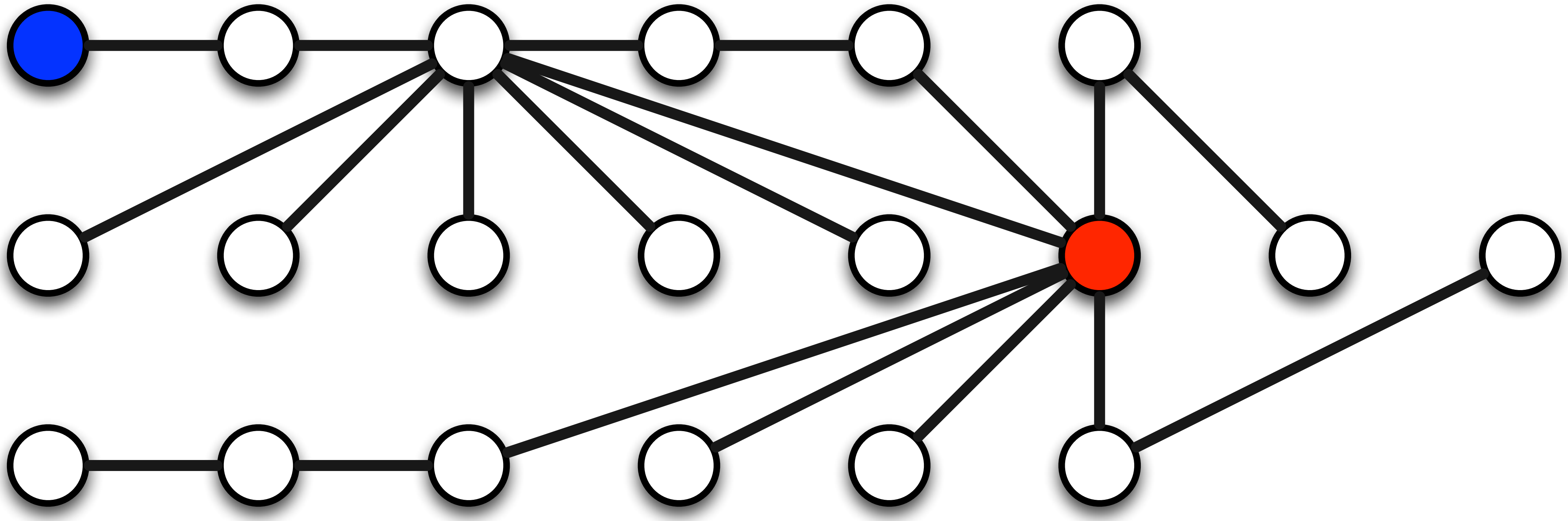
Jeu 60 - Les gendarmes et le voleur



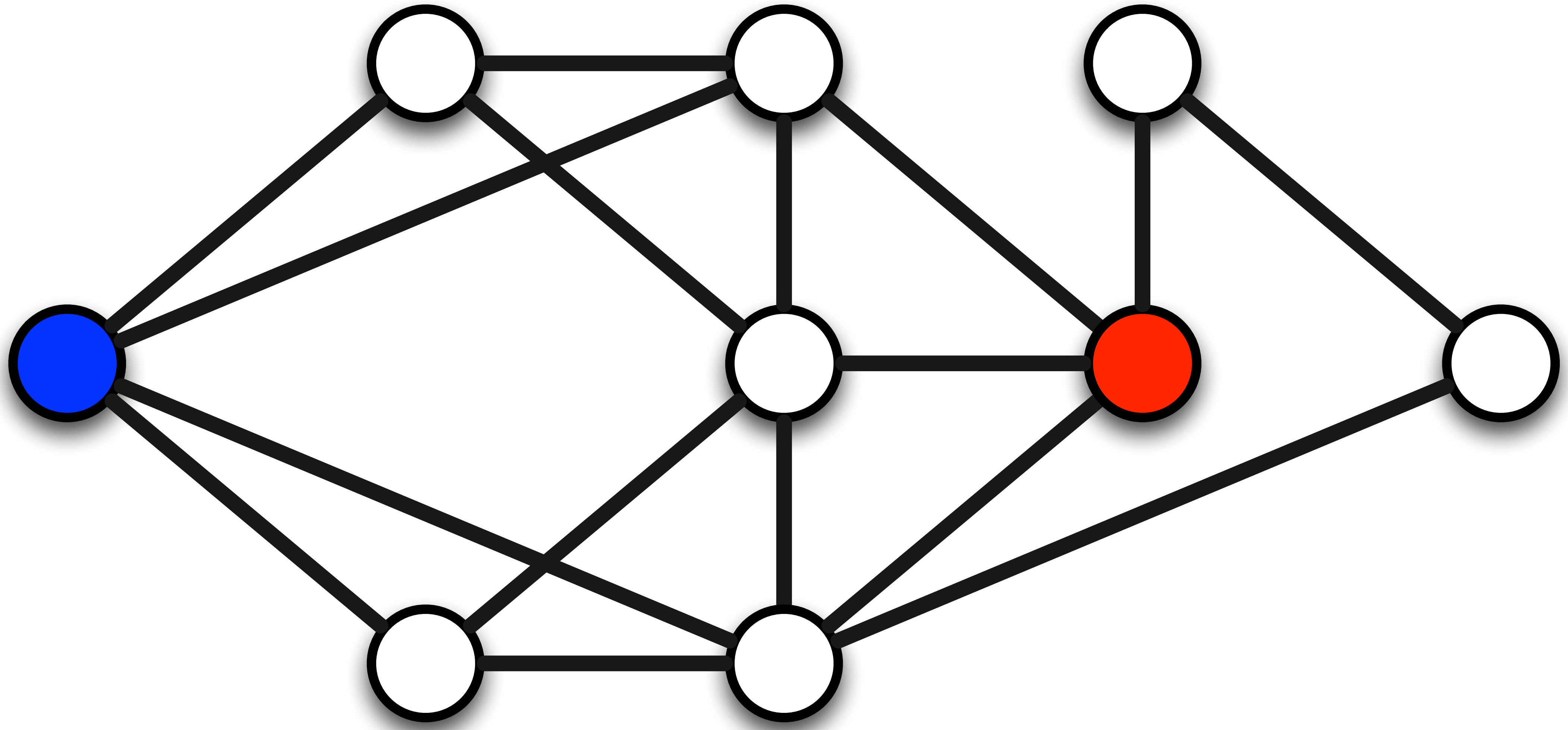
Jeu 61 - Les gendarmes et le voleur



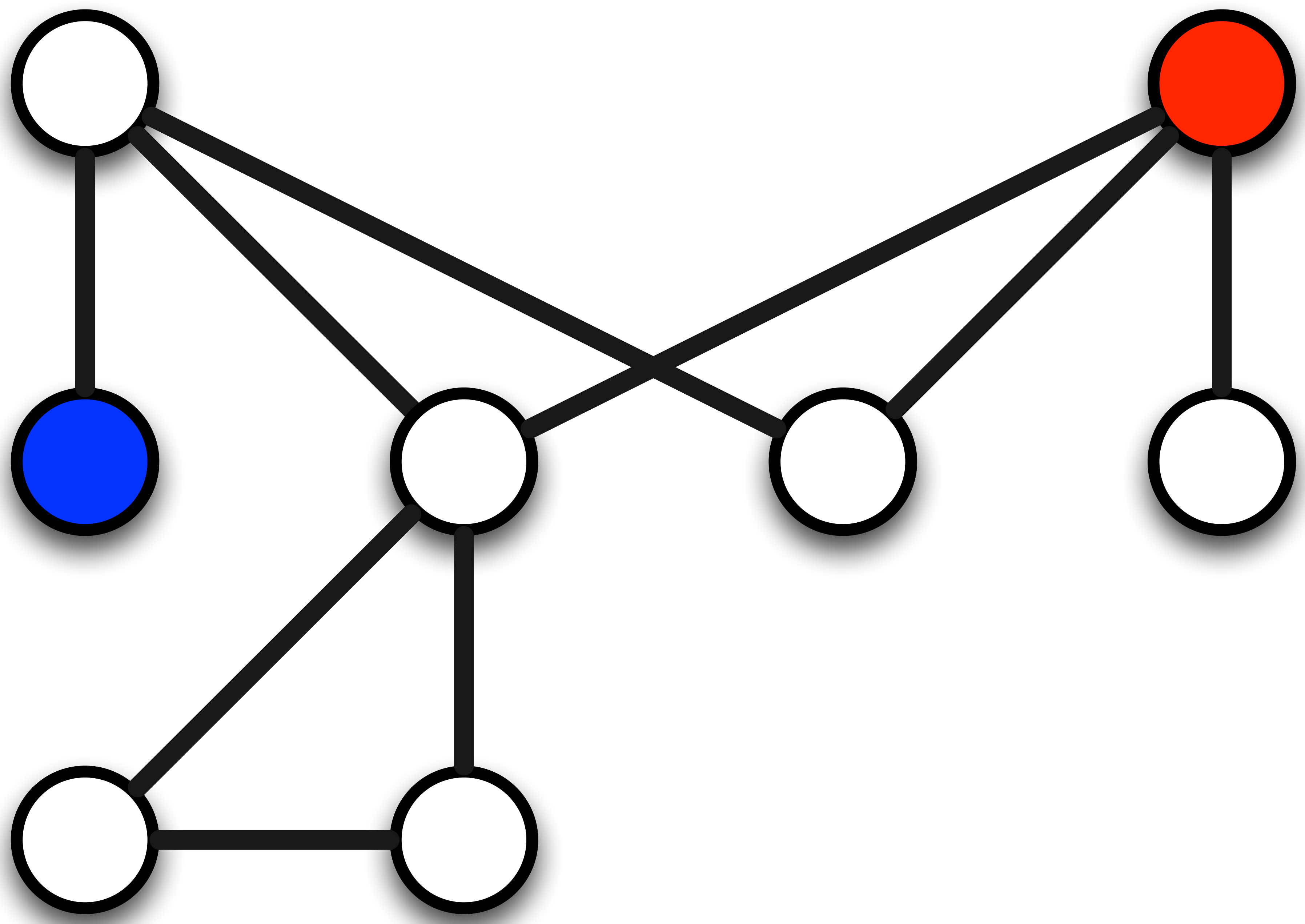
Jeu 62 - Les gendarmes et le voleur



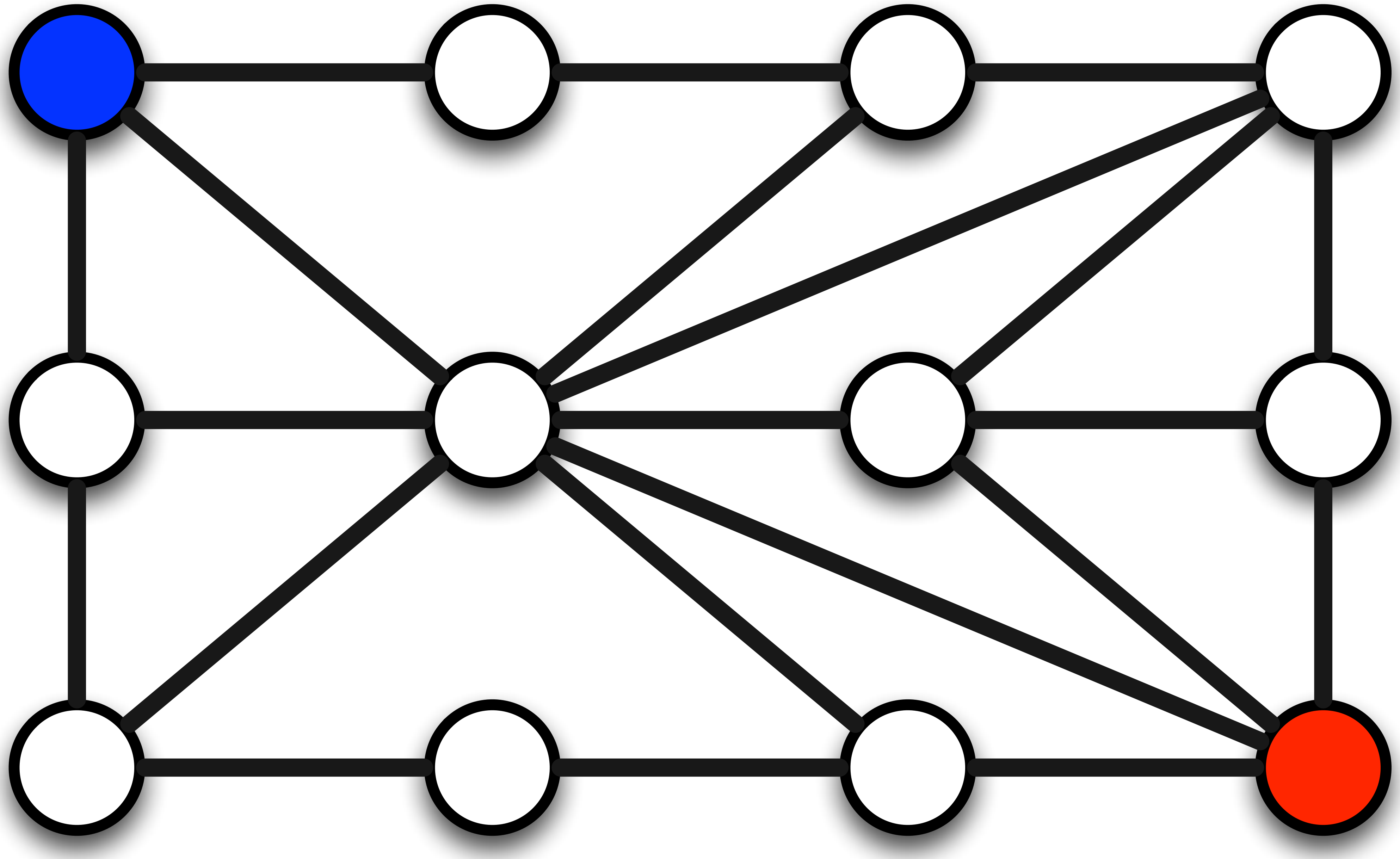
Jeu 63 - Les gendarmes et le voleur



Jeu 64 - Les gendarmes et le voleur

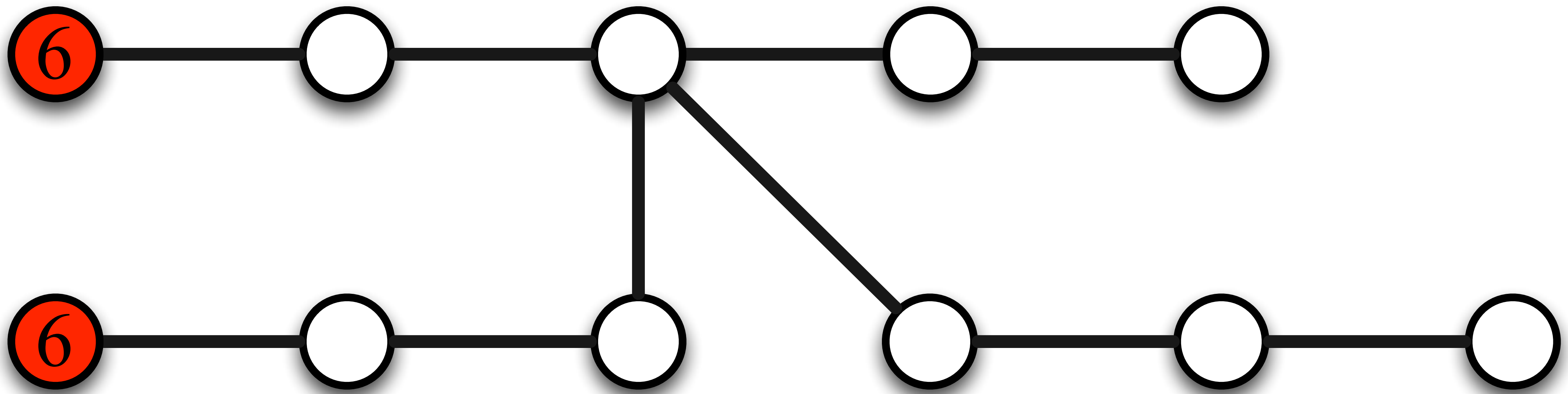


Jeu 65 - Les gendarmes et le voleur

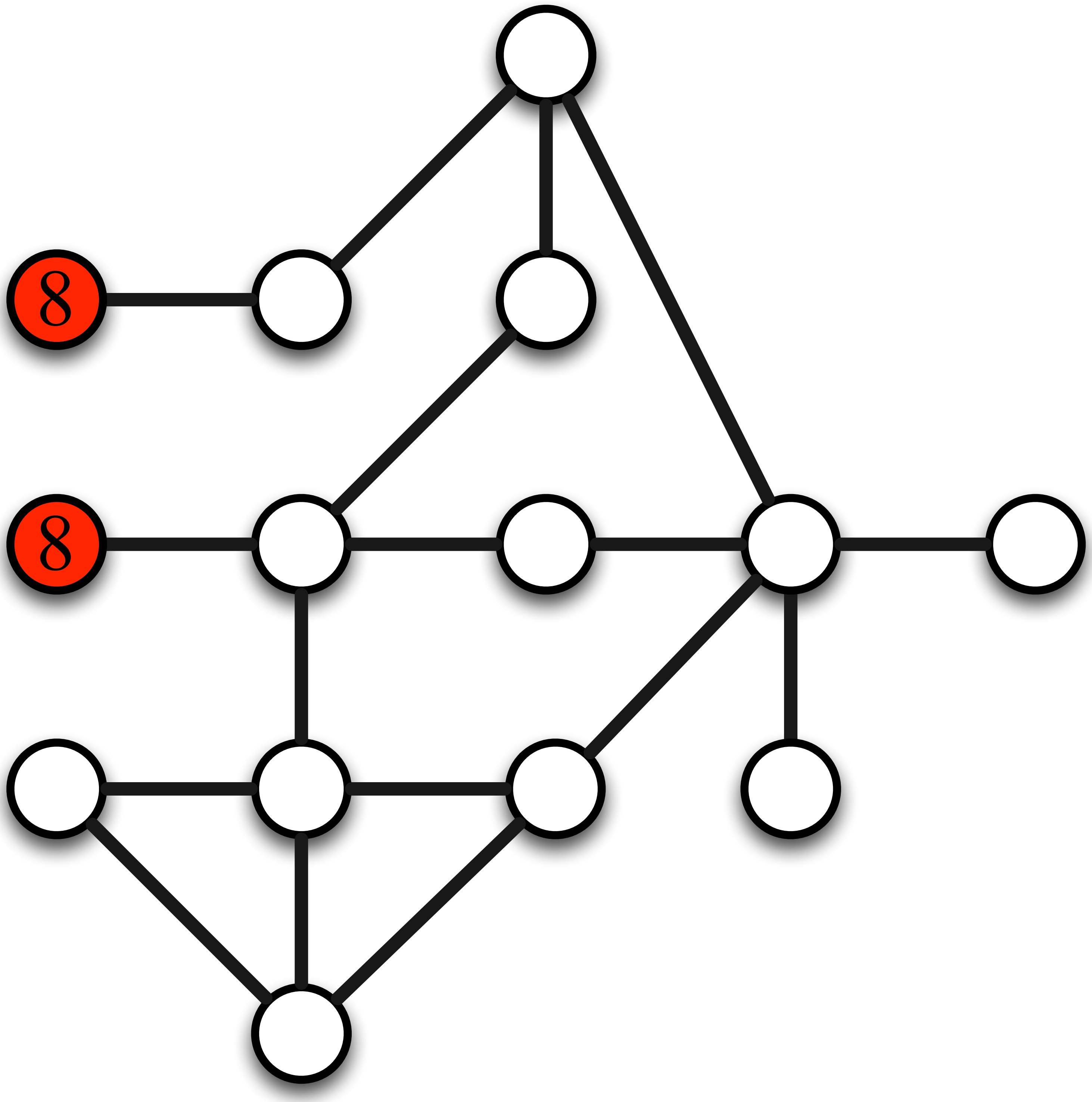


6.7 Parcours dans les graphes

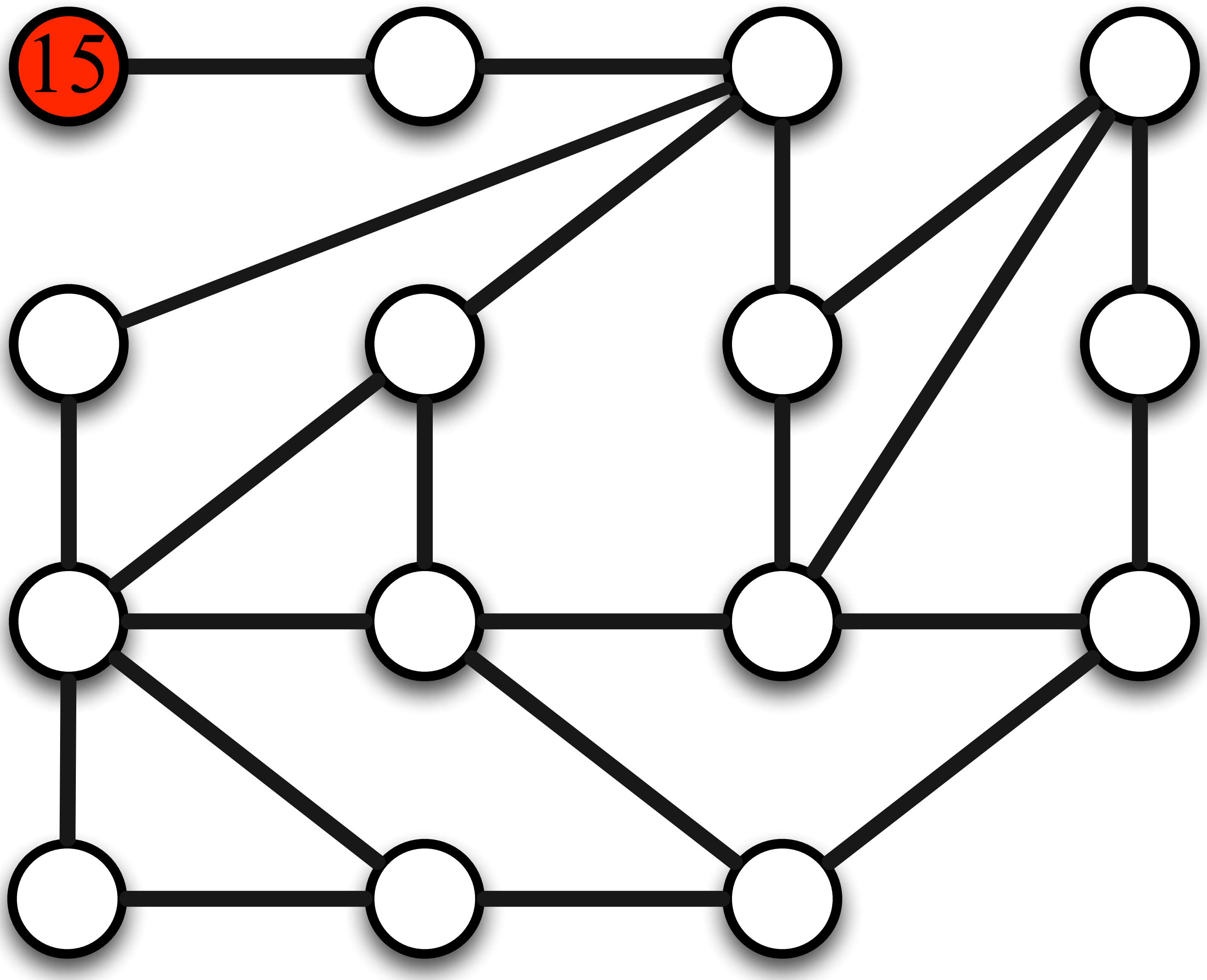
Jeu 1 - Parcours dans les graphes



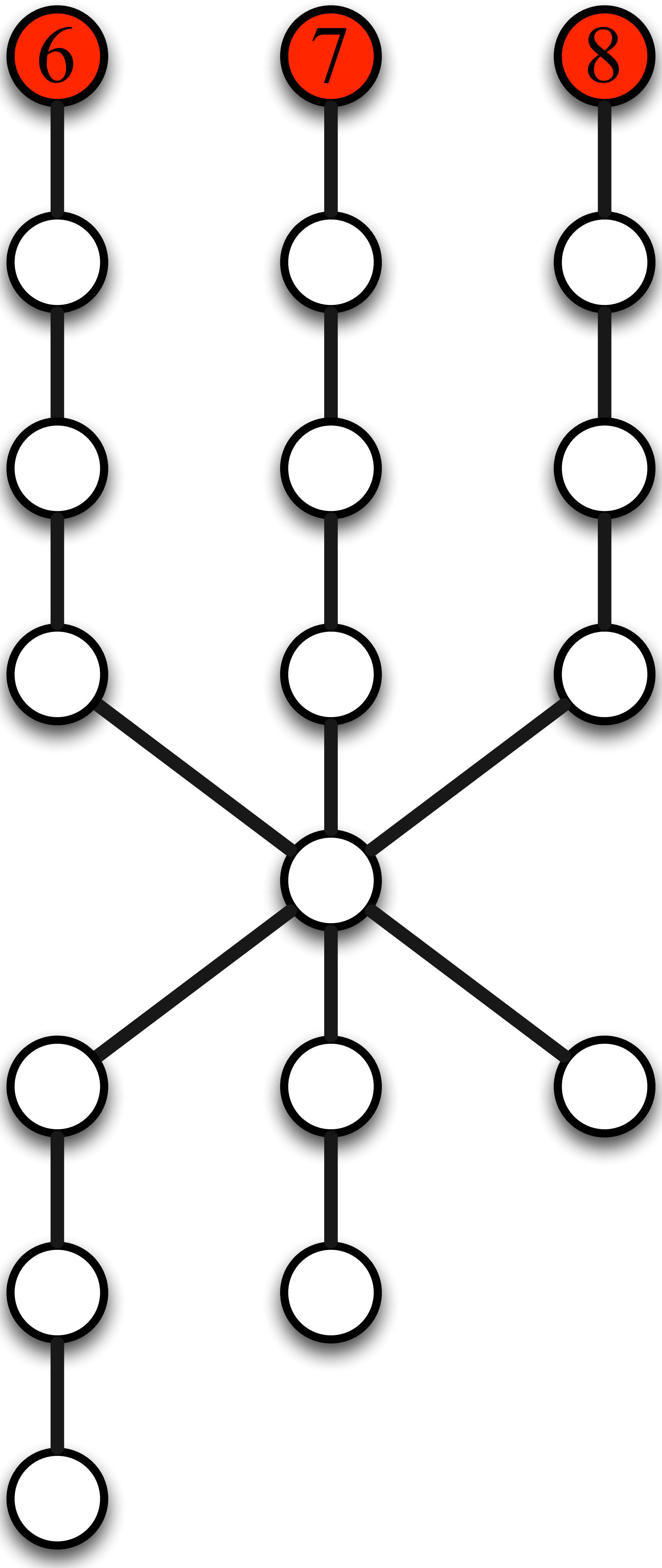
Jeu 2 - Parcours dans les graphes



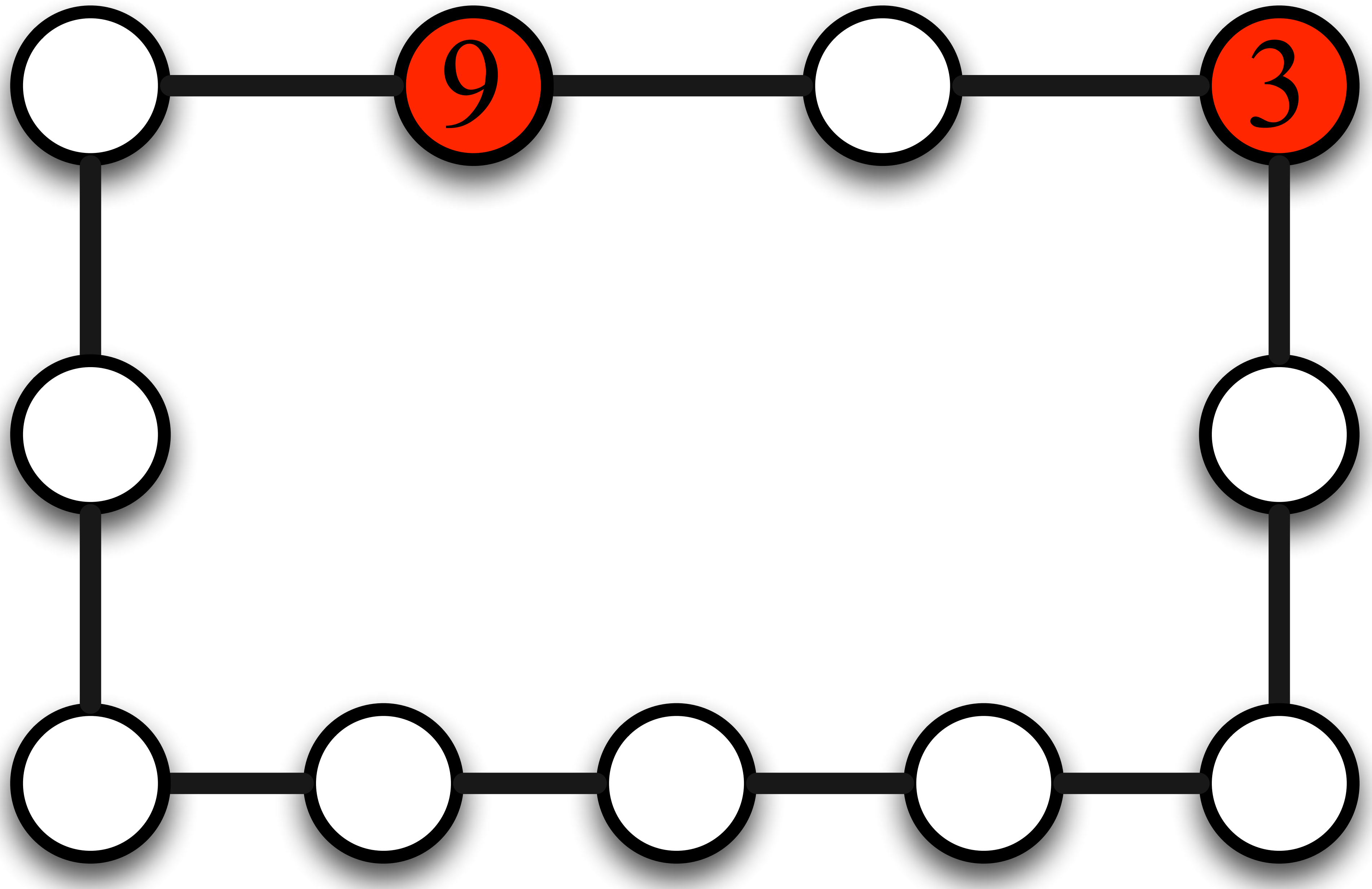
Jeu 3 - Parcours dans les graphes



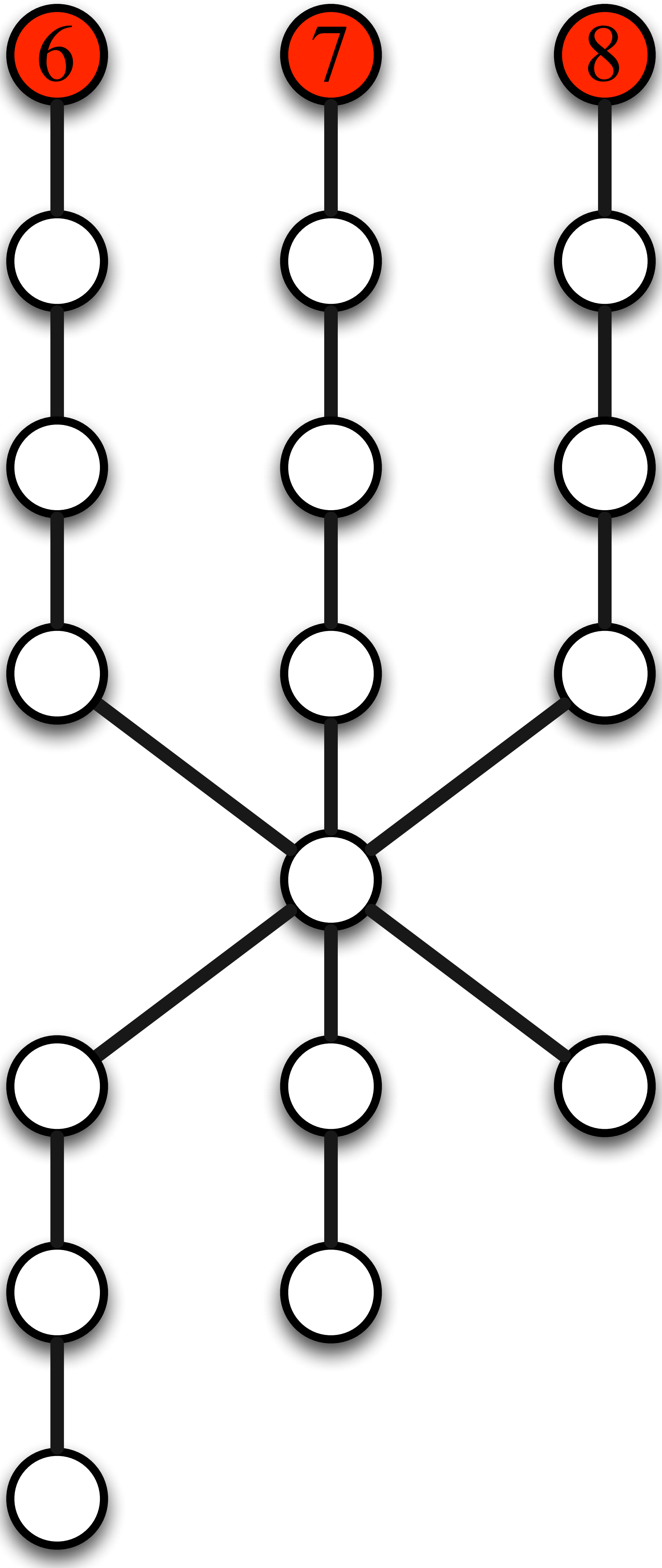
Jeu 4 - Parcours dans les graphes



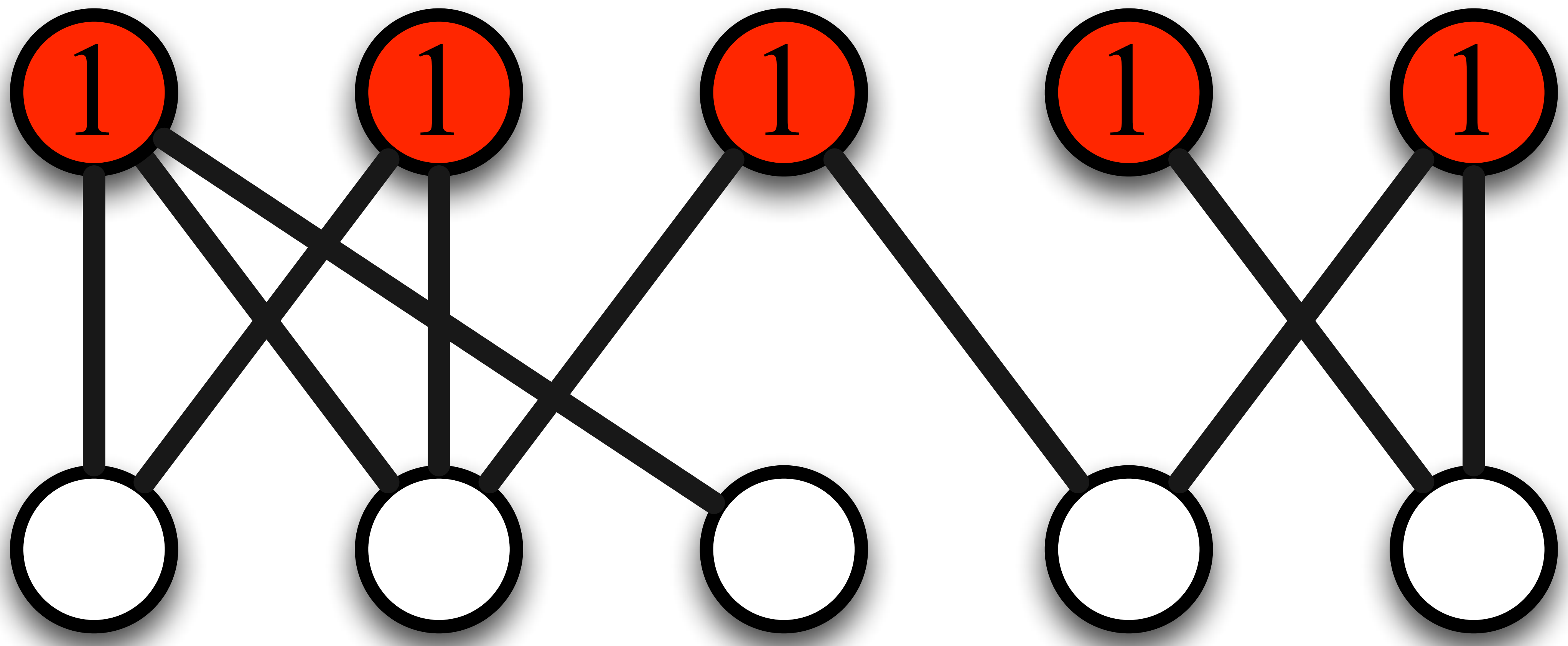
Jeu 5 - Parcours dans les graphes



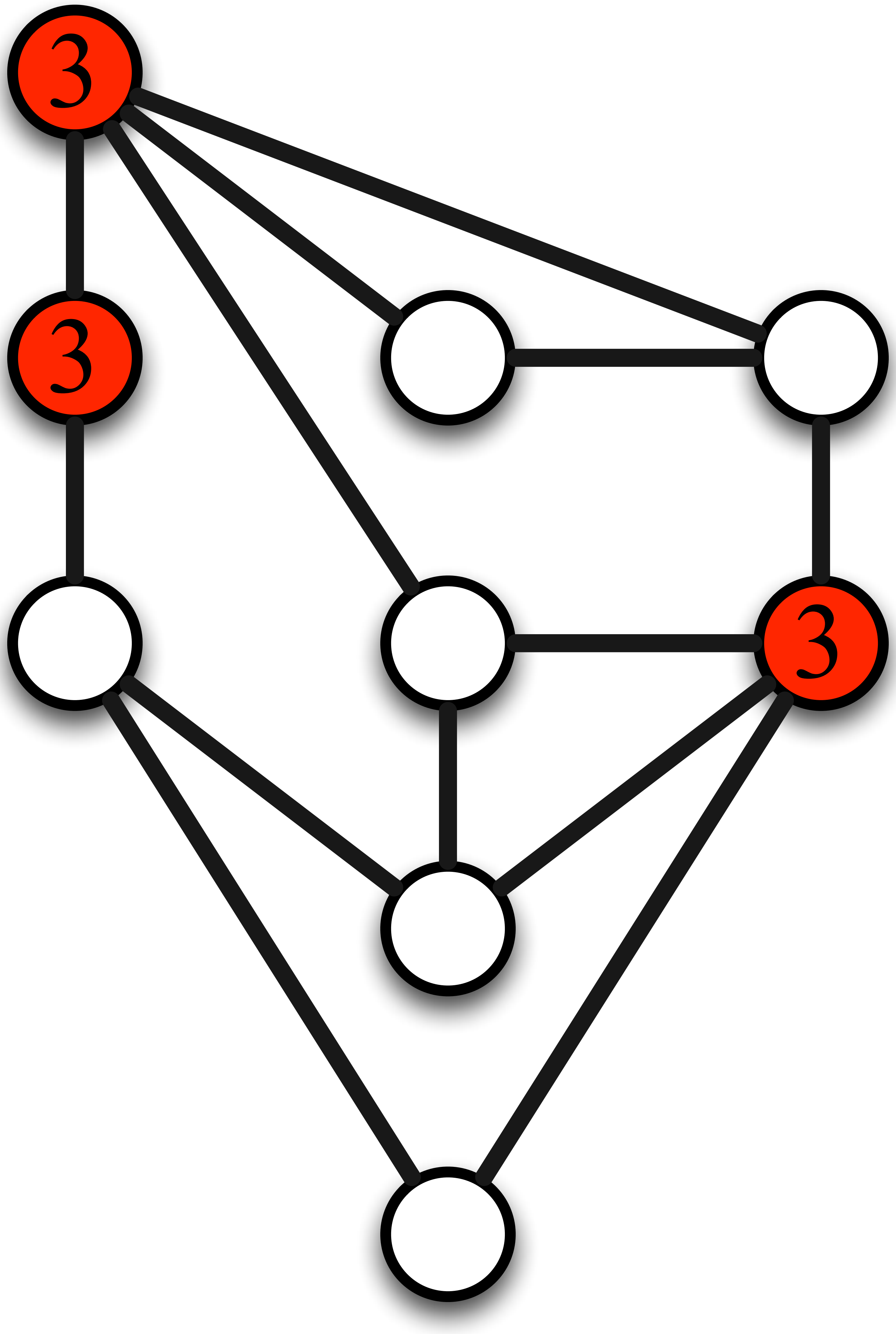
Jeu 6 - Parcours dans les graphes



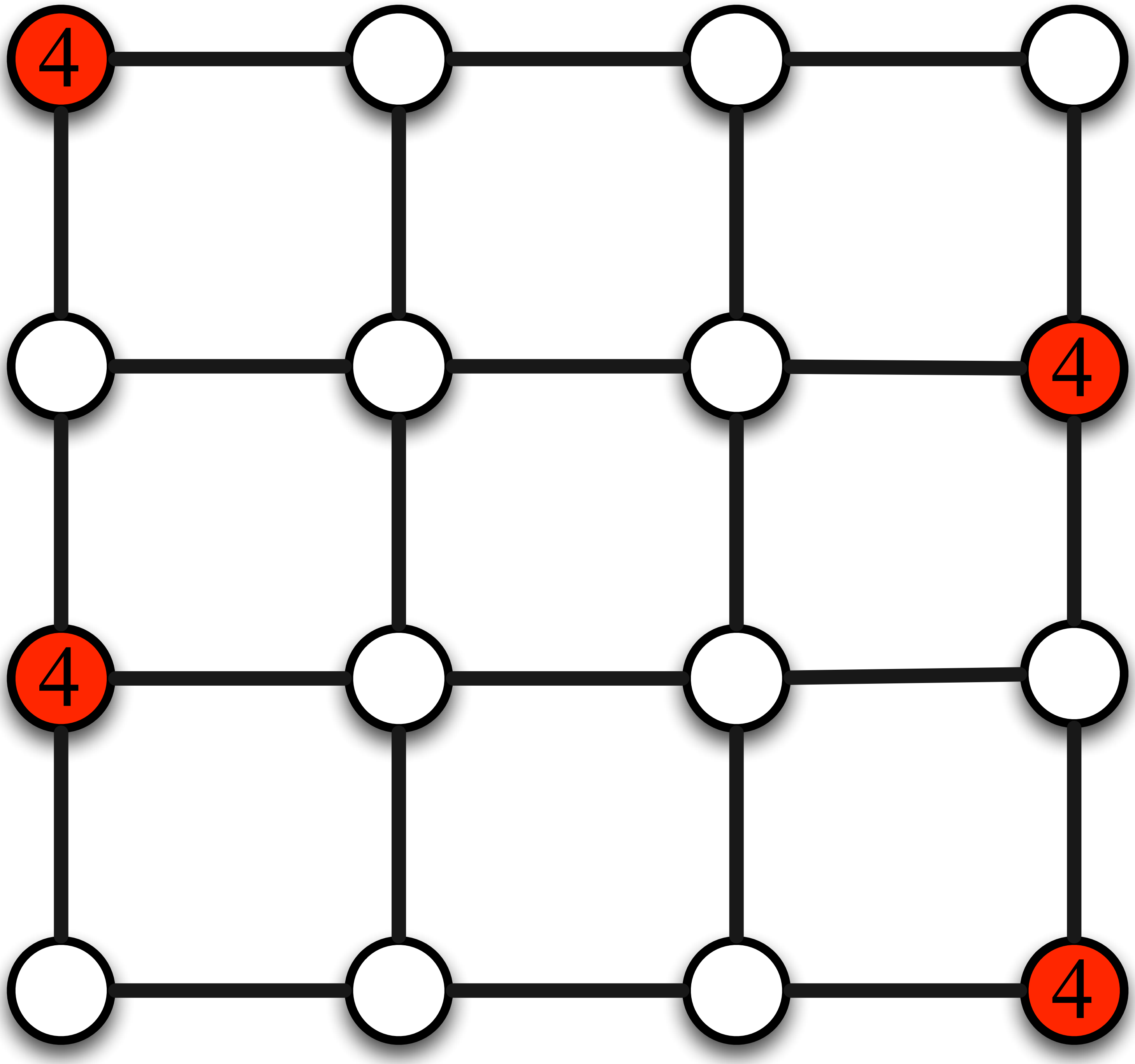
Jeu 7 - Parcours dans les graphes



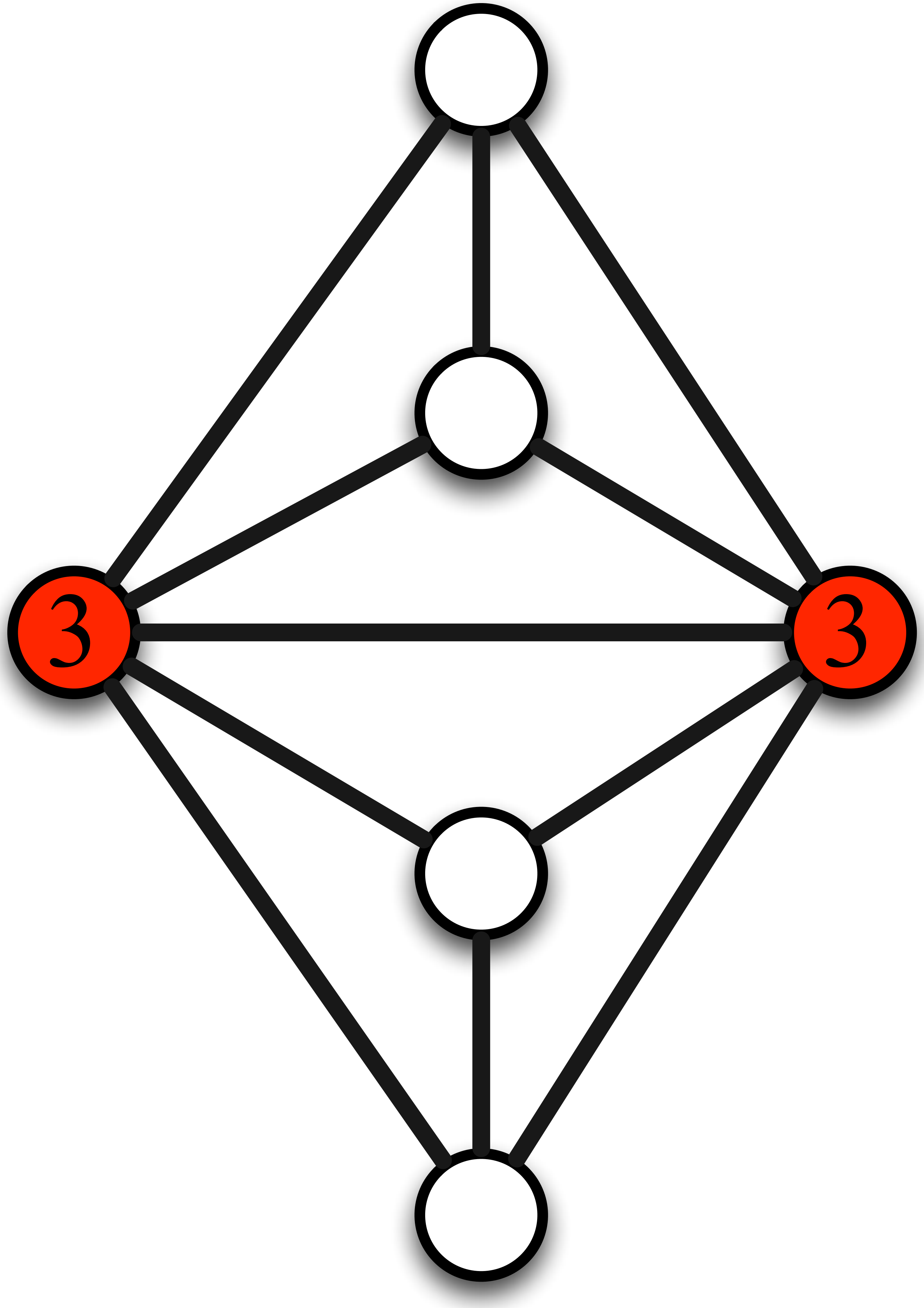
Jeu 8 - Parcours dans les graphes



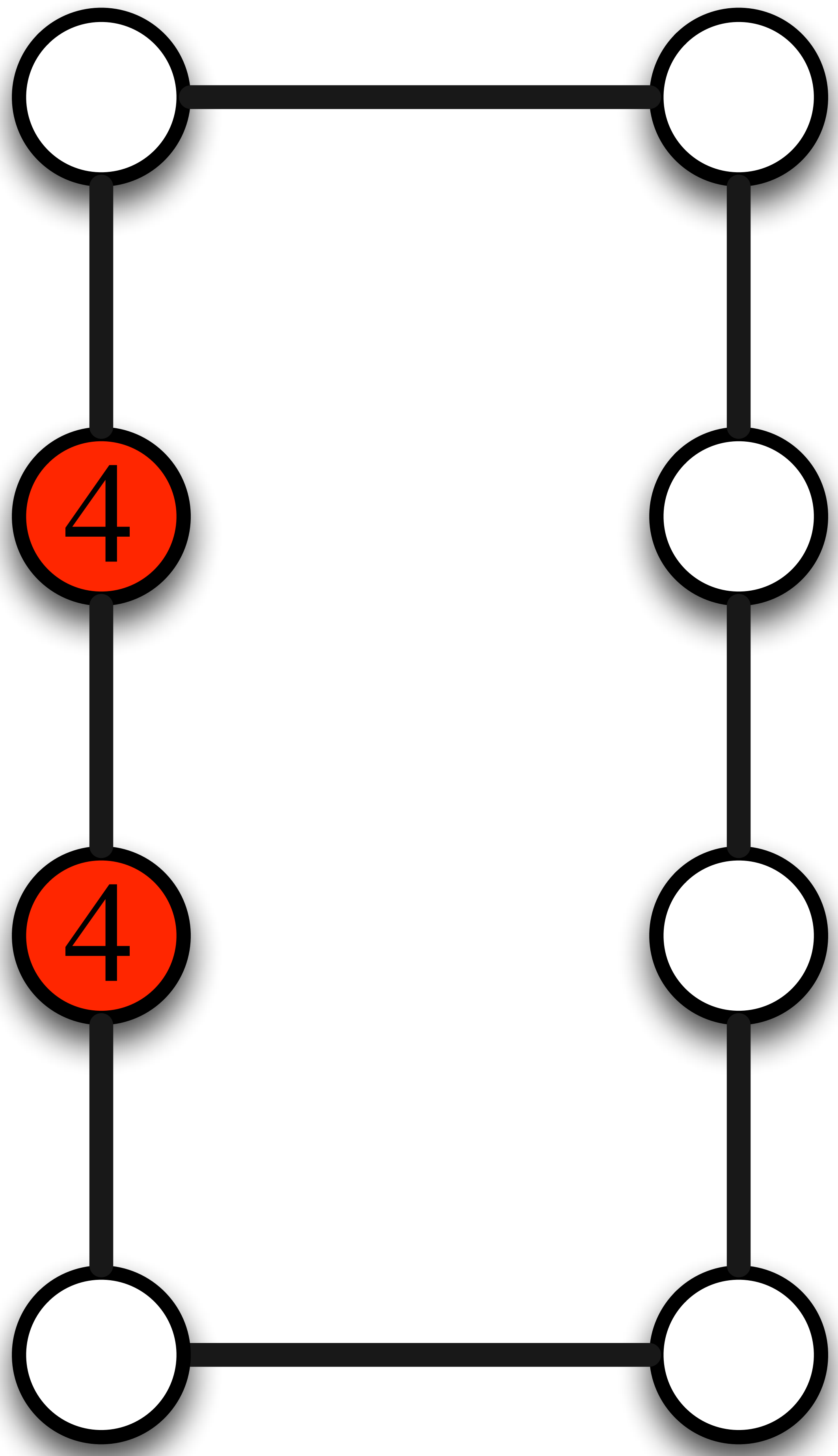
Jeu 9 - Parcours dans les graphes



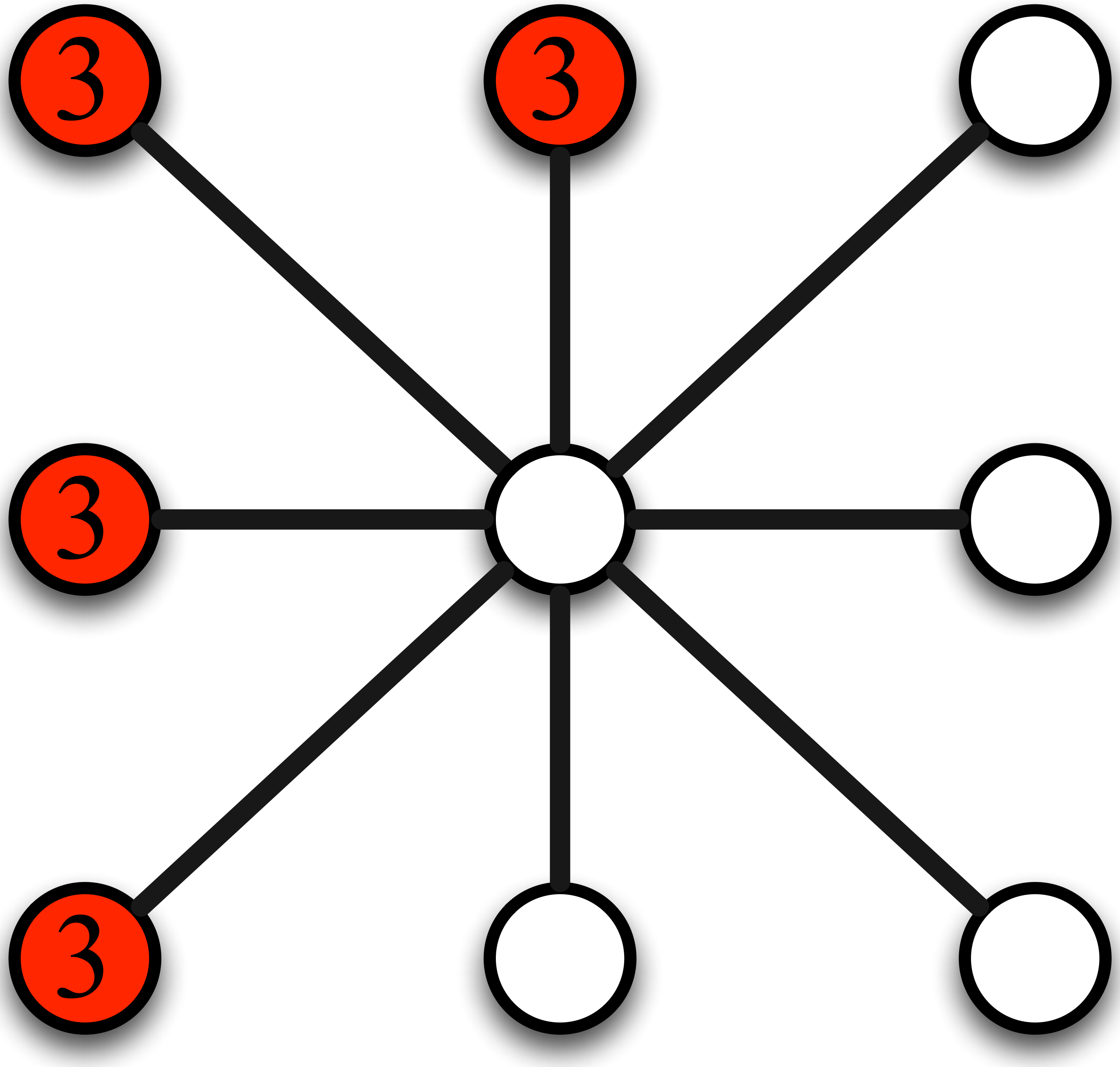
Jeu 10 - Parcours dans les graphes



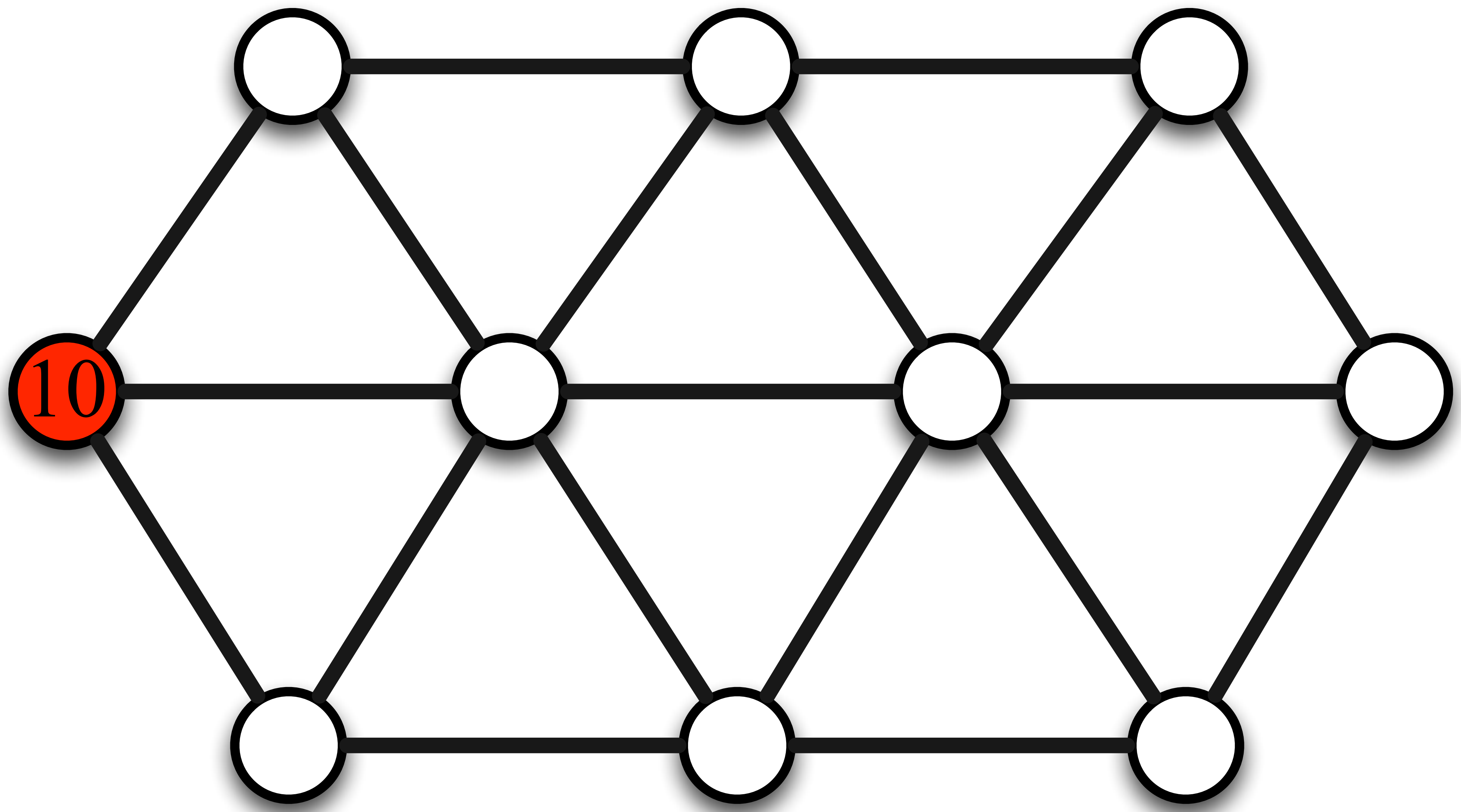
Jeu 11 - Parcours dans les graphes



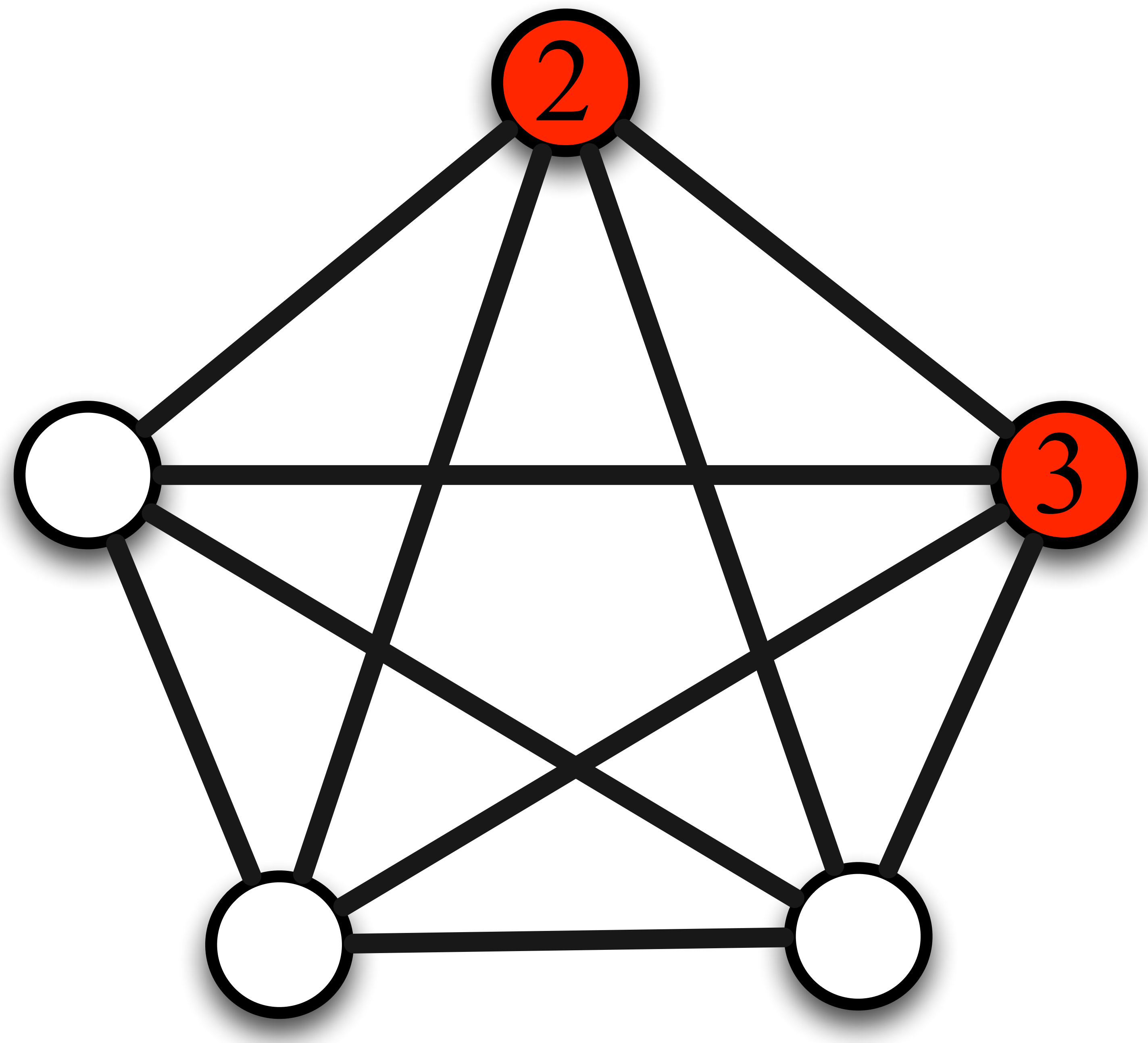
Jeu 12 - Parcours dans les graphes



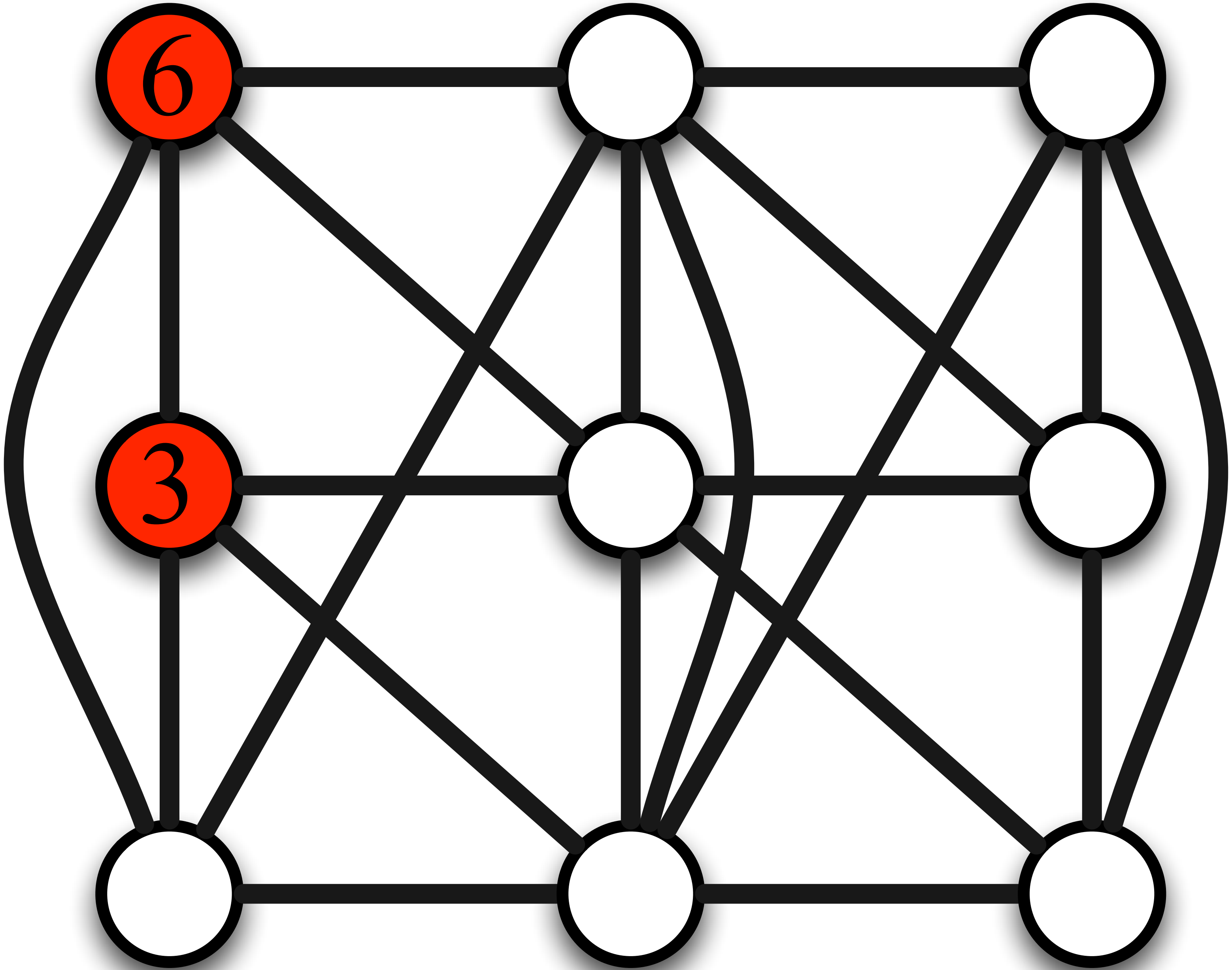
Jeu 13 - Parcours dans les graphes



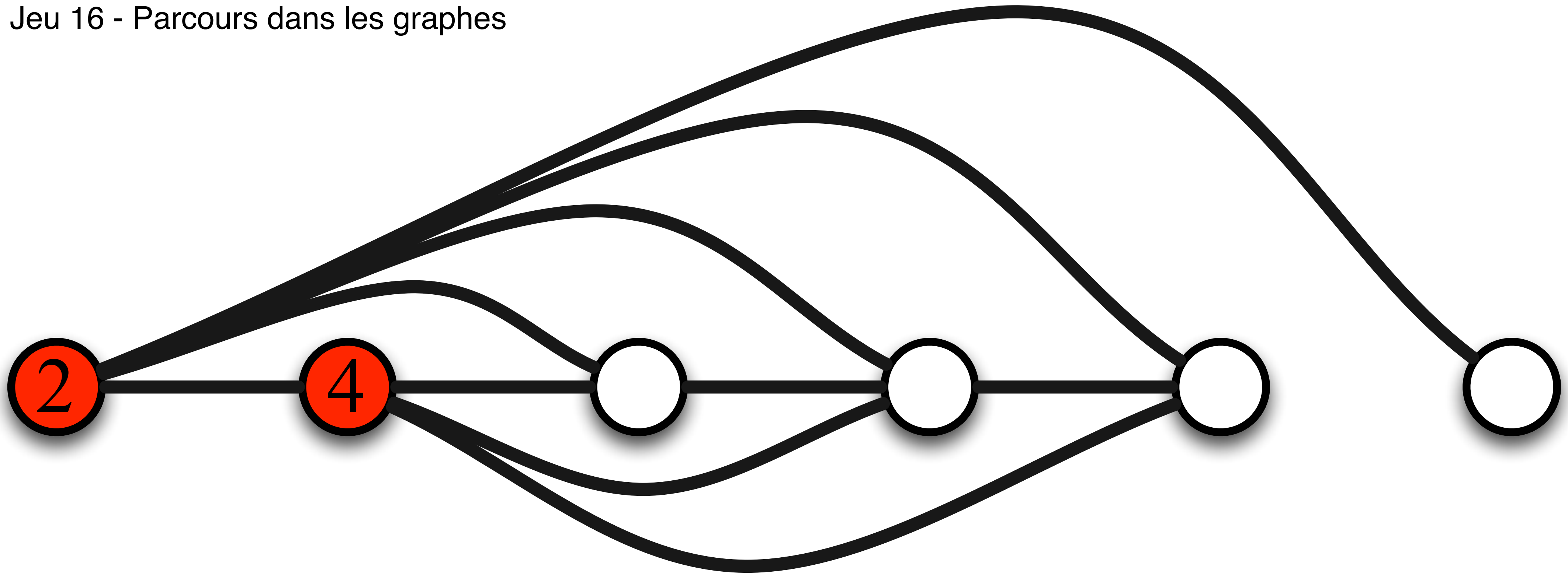
Jeu 14 - Parcours dans les graphes



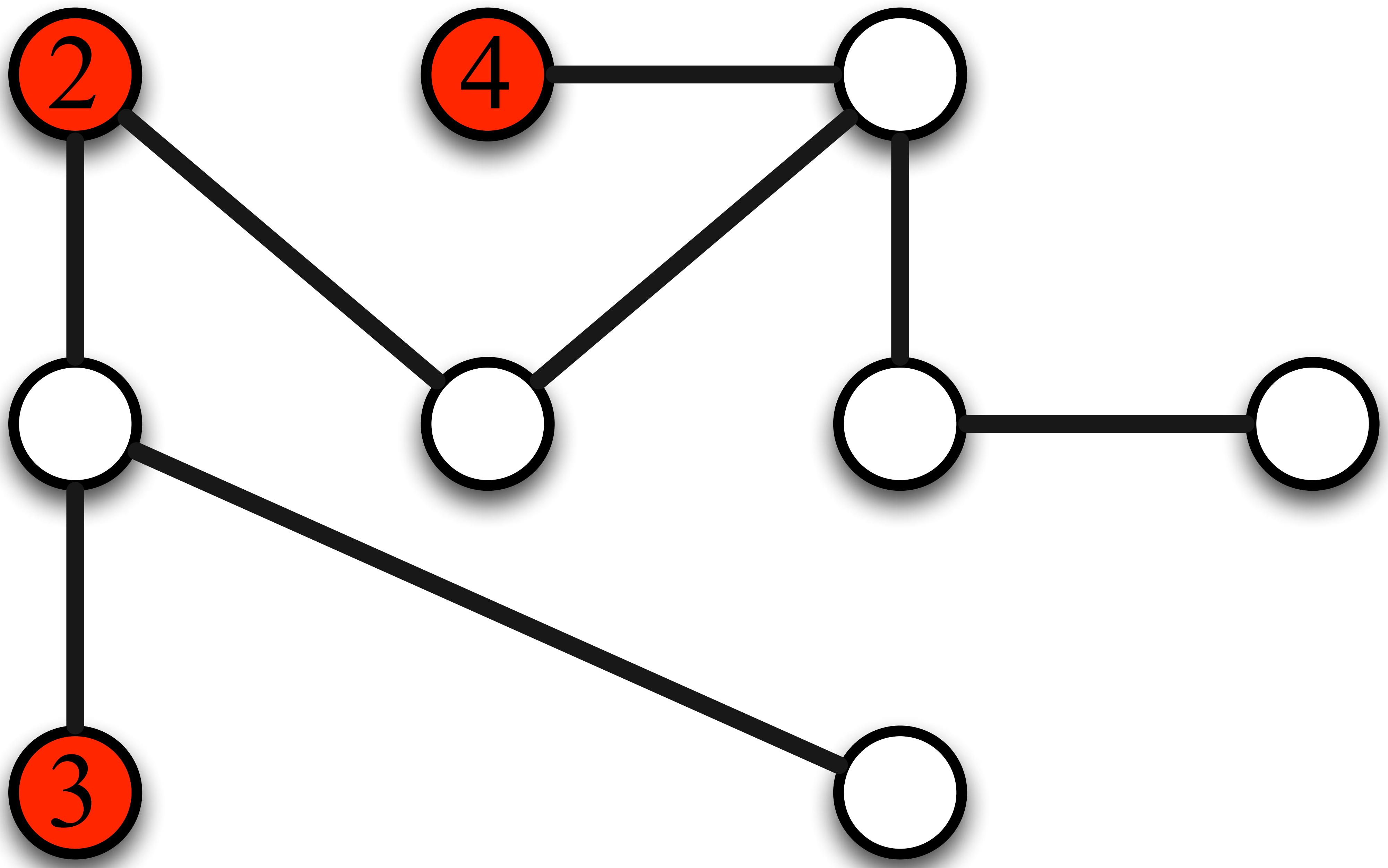
Jeu 15 - Parcours dans les graphes



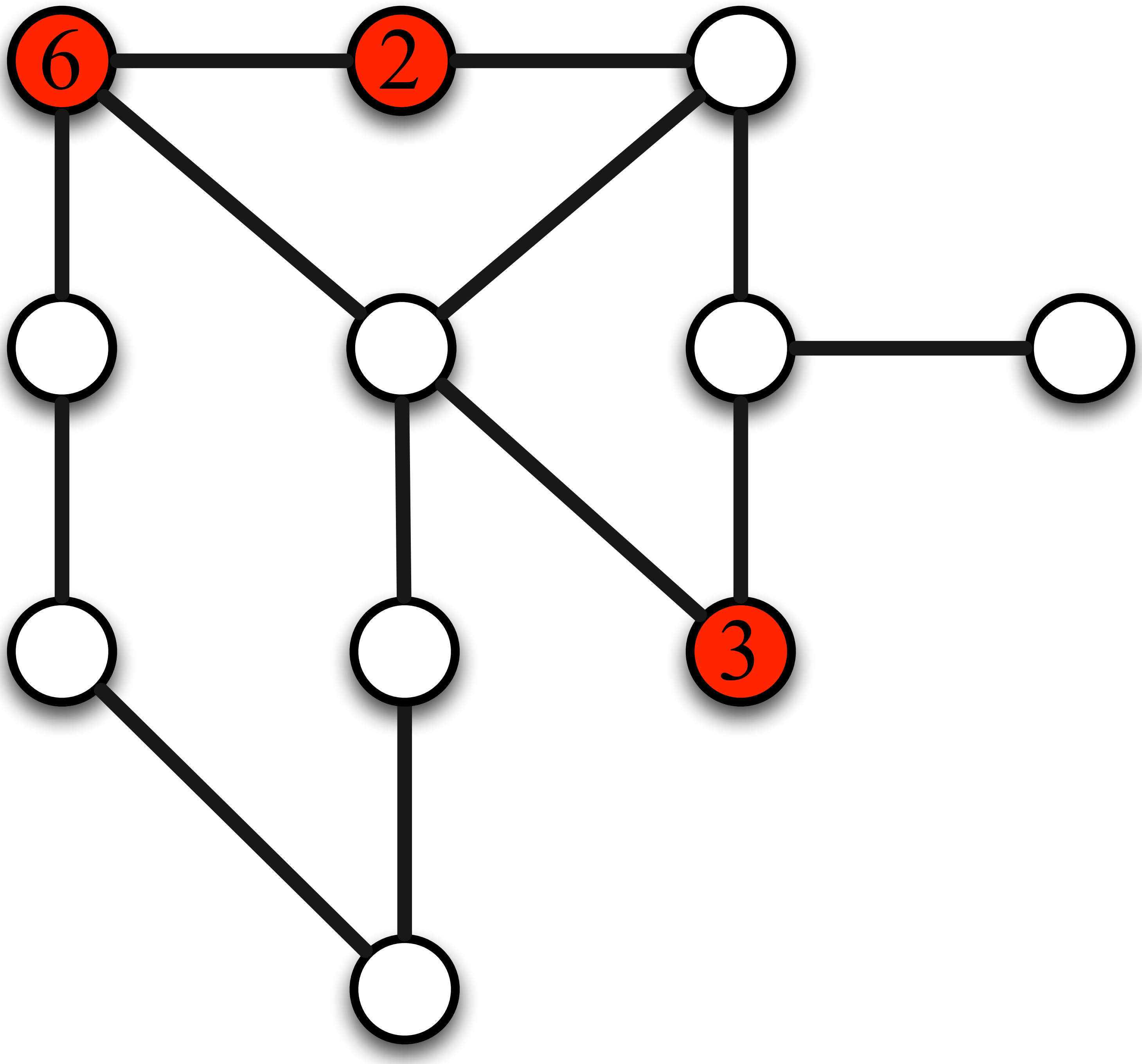
Jeu 16 - Parcours dans les graphes



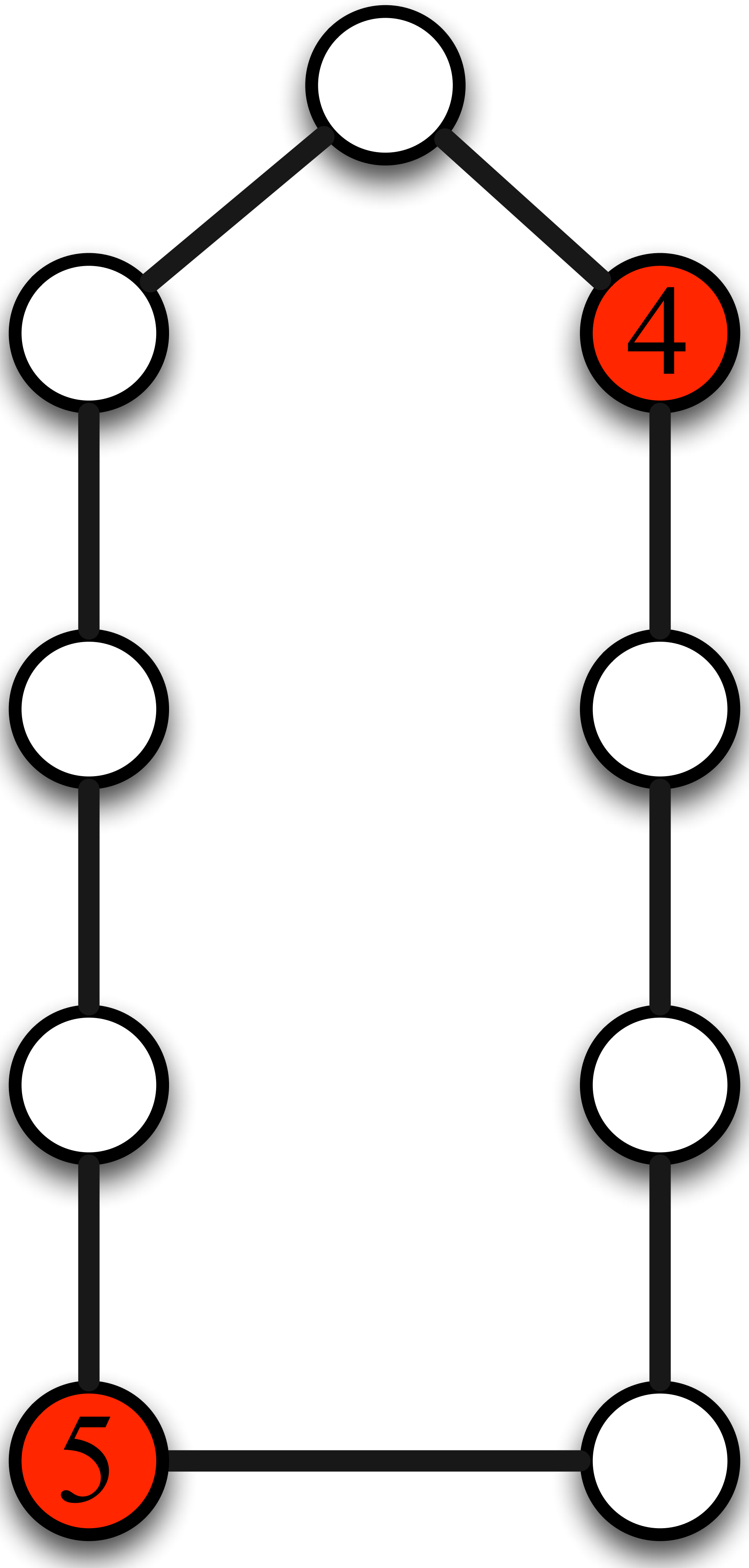
Jeu 17 - Parcours dans les graphes



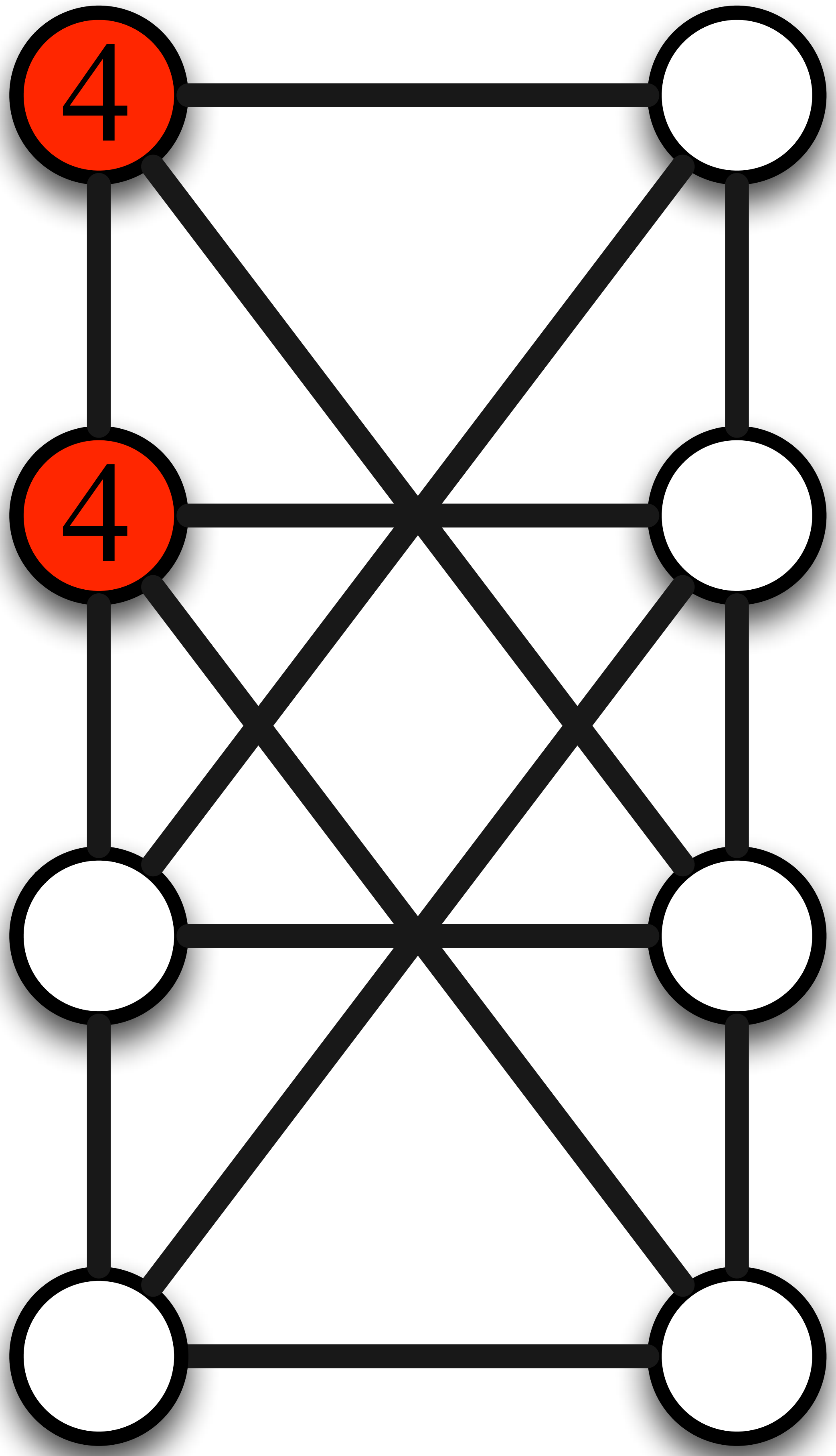
Jeu 18 - Parcours dans les graphes



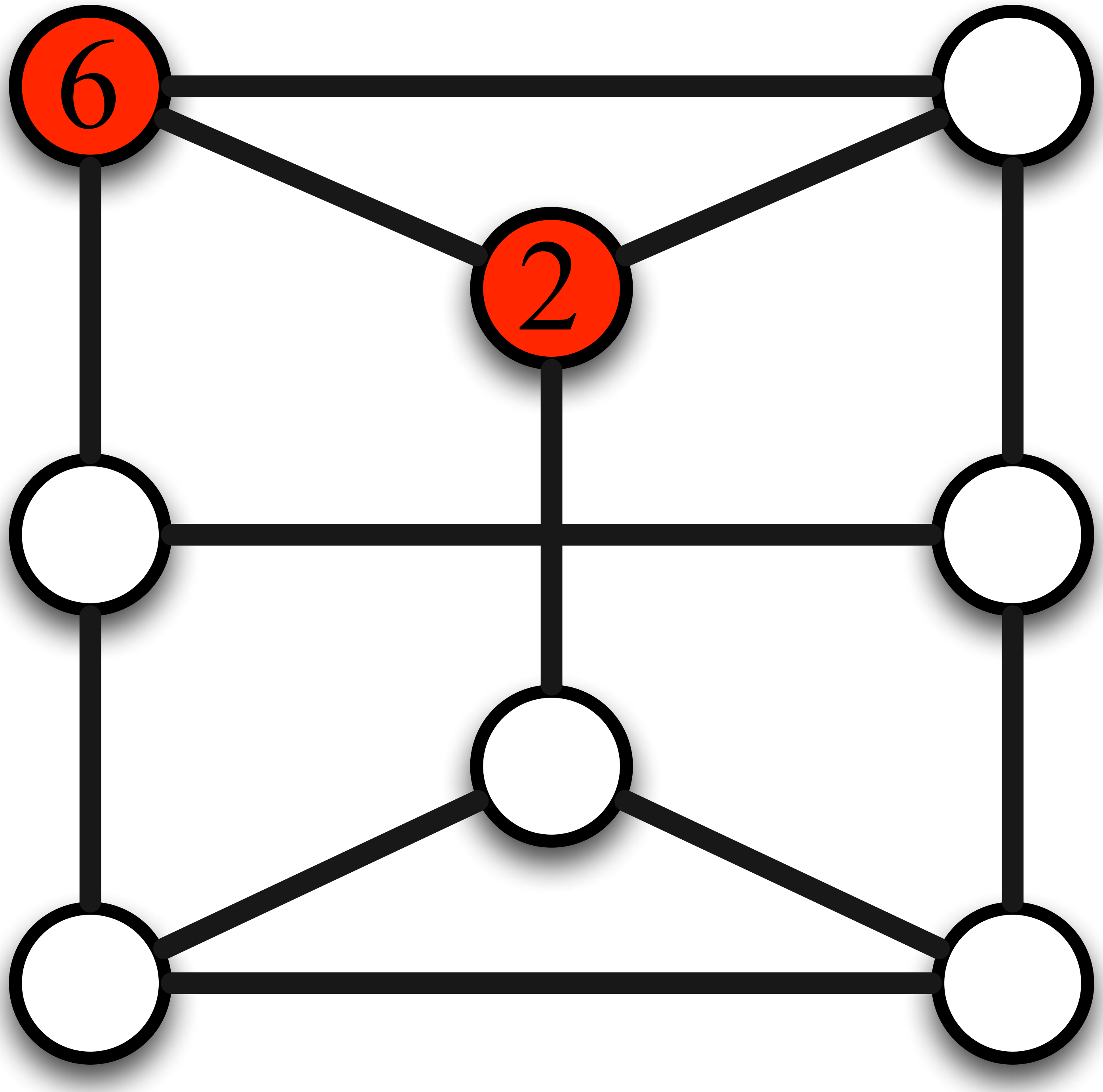
Jeu 19 - Parcours dans les graphes



Jeu 20 - Parcours dans les graphes

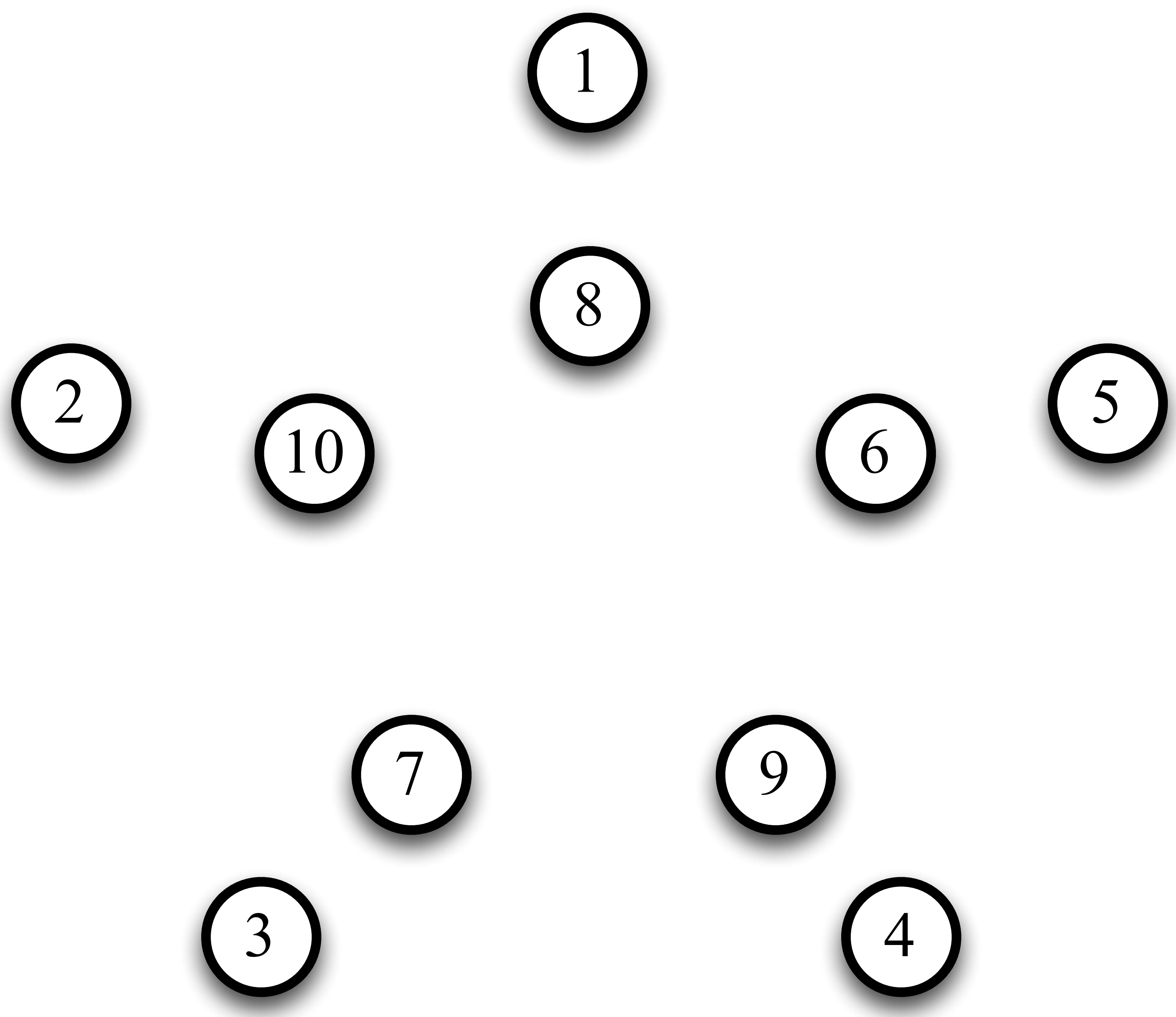


Jeu 21 - Parcours dans les graphes



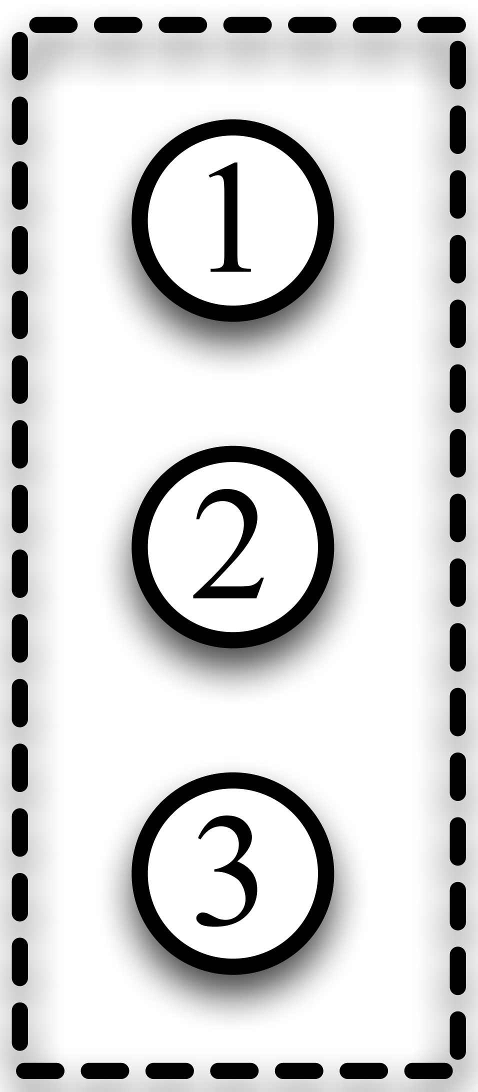
6.8 Construction d'un réseau routier

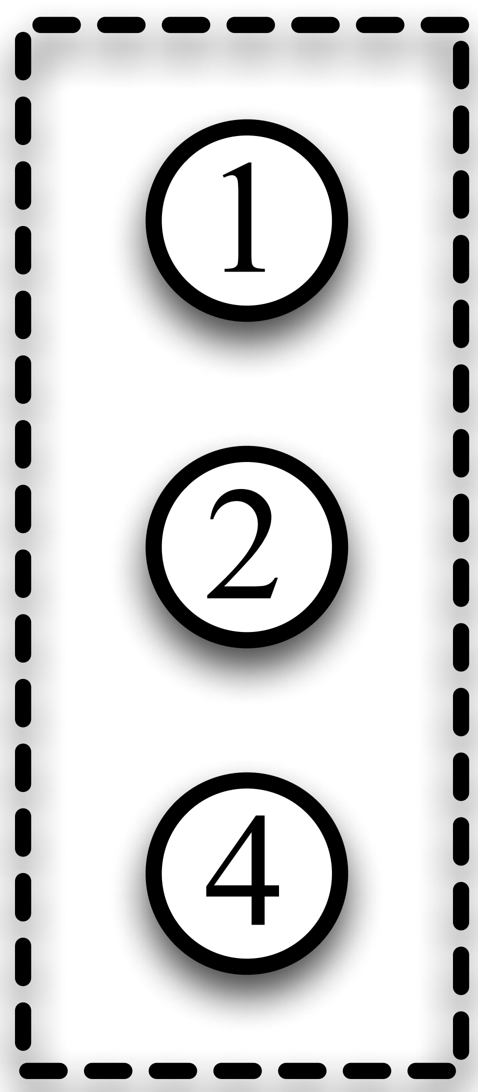
Jeu 1 - Construction d'un réseau routier

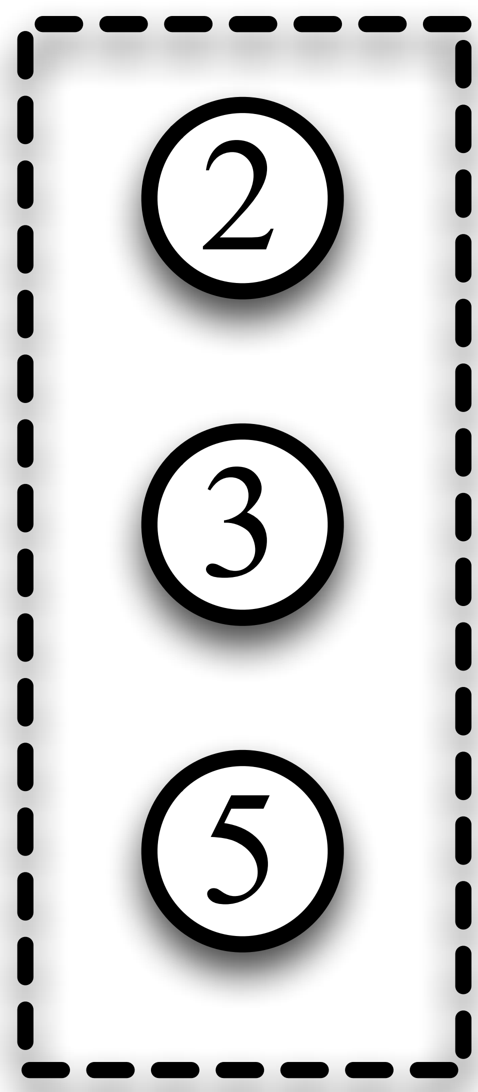


6.9 Quelles sont les arêtes du graphe ?

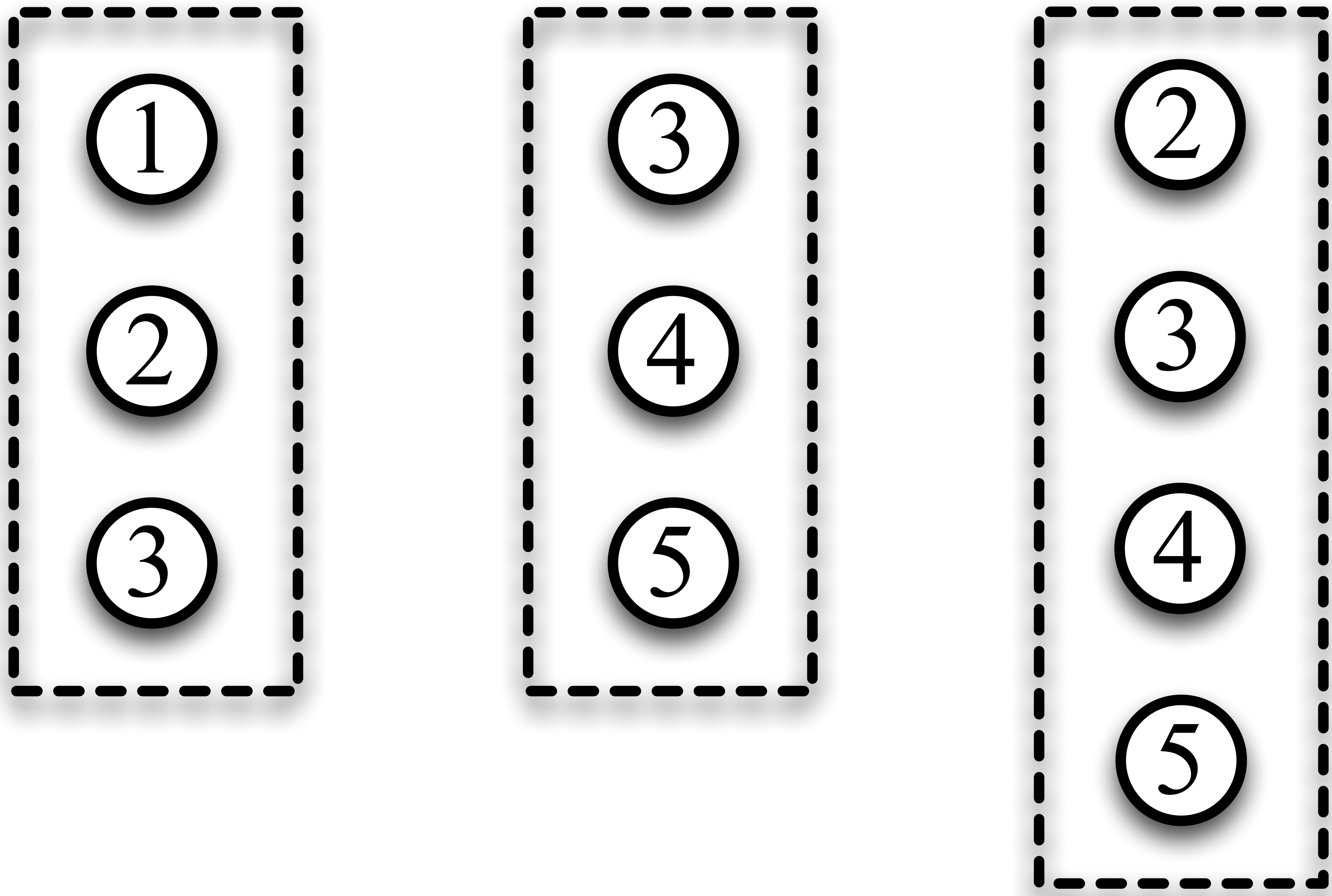
Jeu 1 - Quelles sont les arêtes du graphes ?



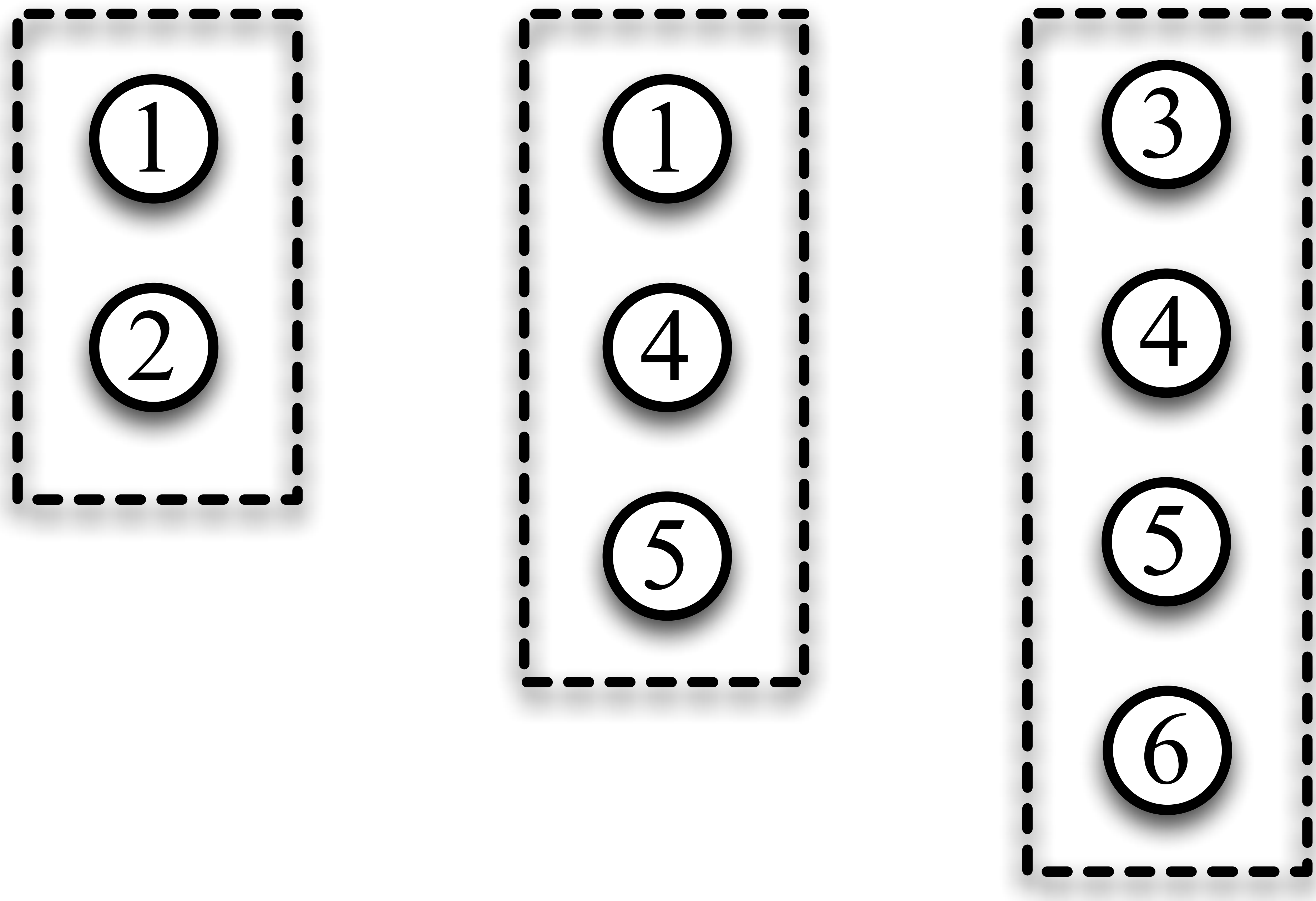




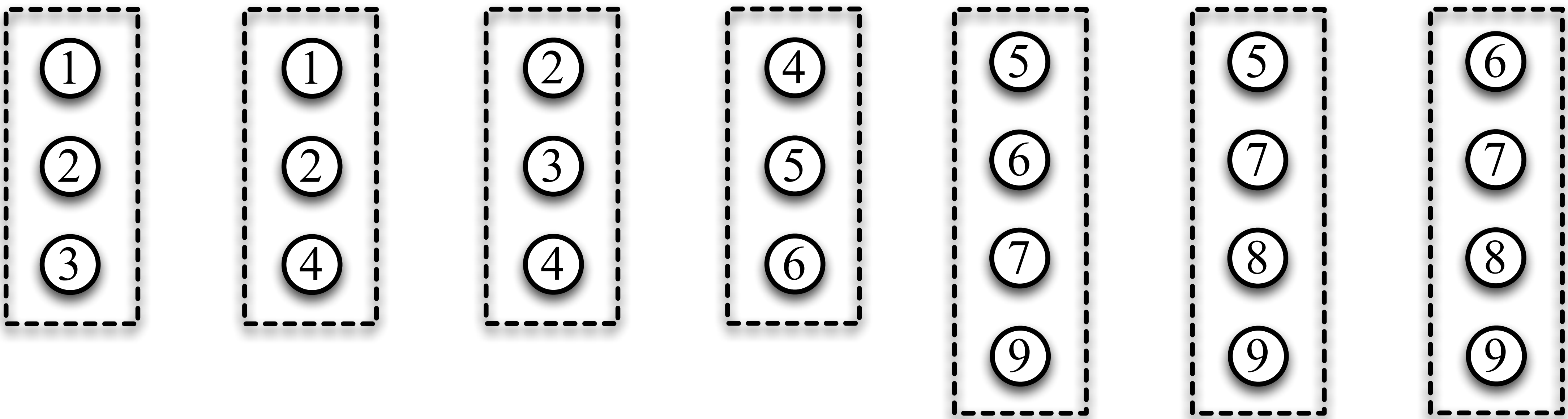
Jeu 2 - Quelles sont les arêtes du graphes ?



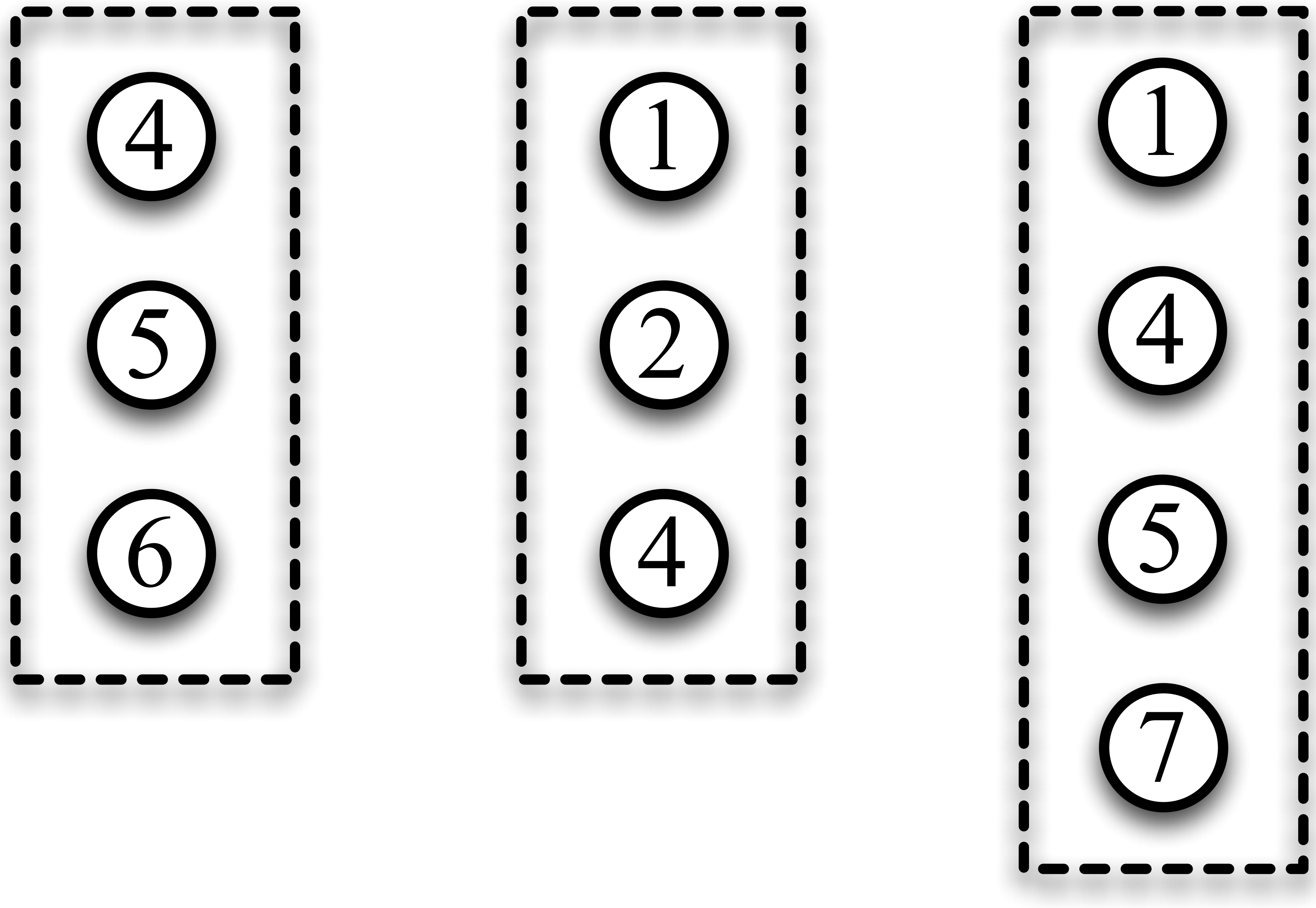
Jeu 3 - Quelles sont les arêtes du graphes ?



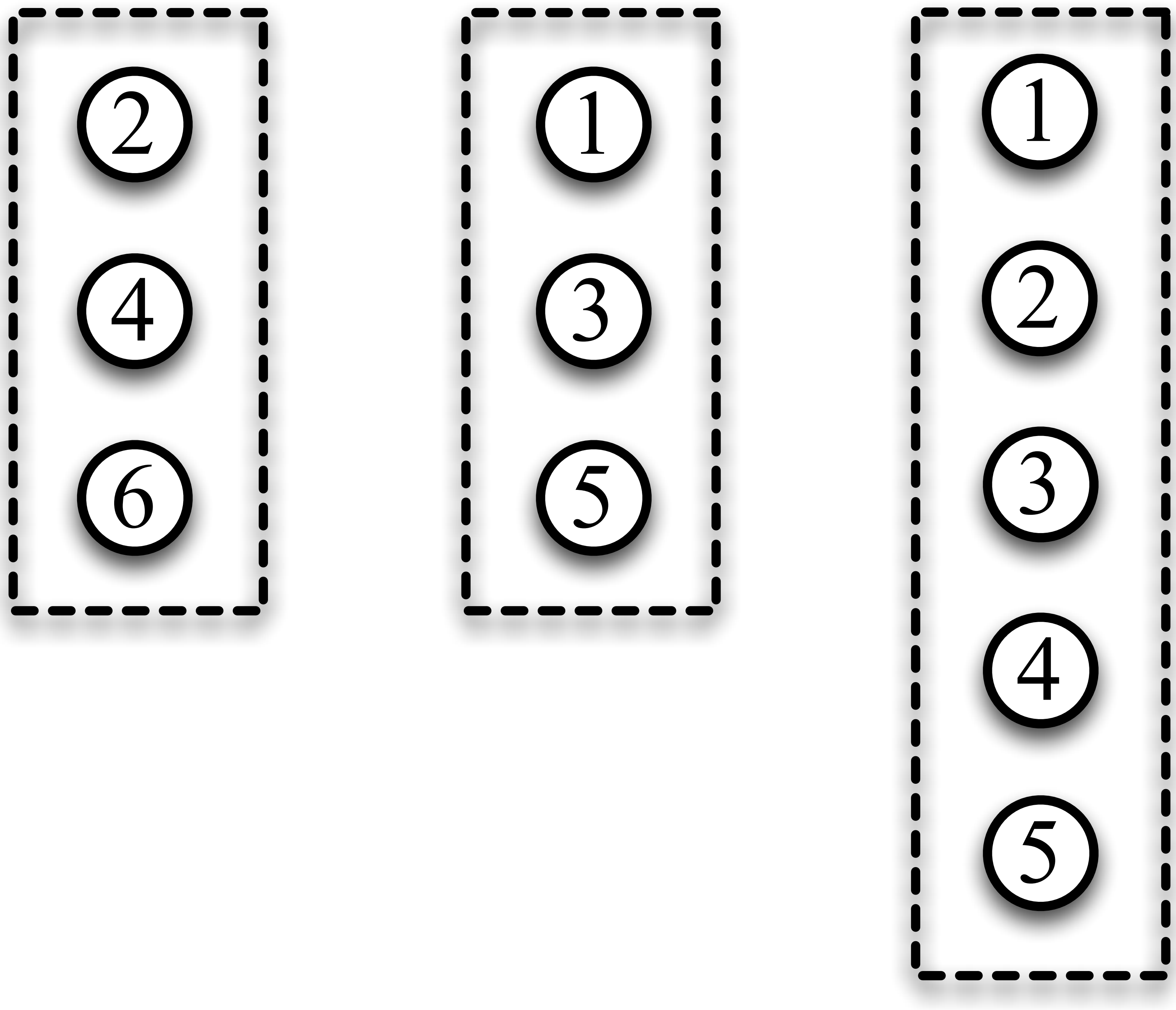
Jeu 4 - Quelles sont les arêtes du graphes ?



Jeu 5 - Quelles sont les arêtes du graphes ?

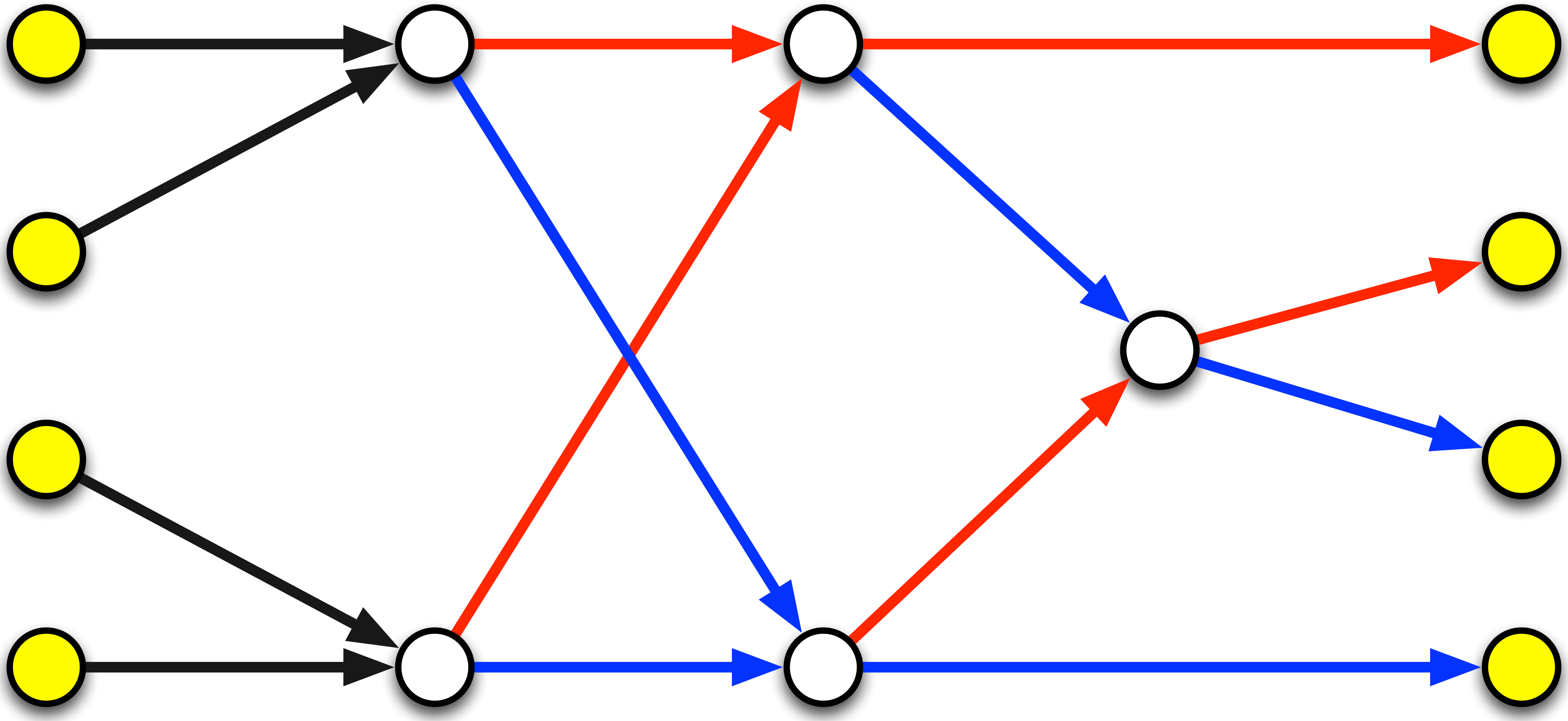


Jeu 6 - Quelles sont les arêtes du graphes ?

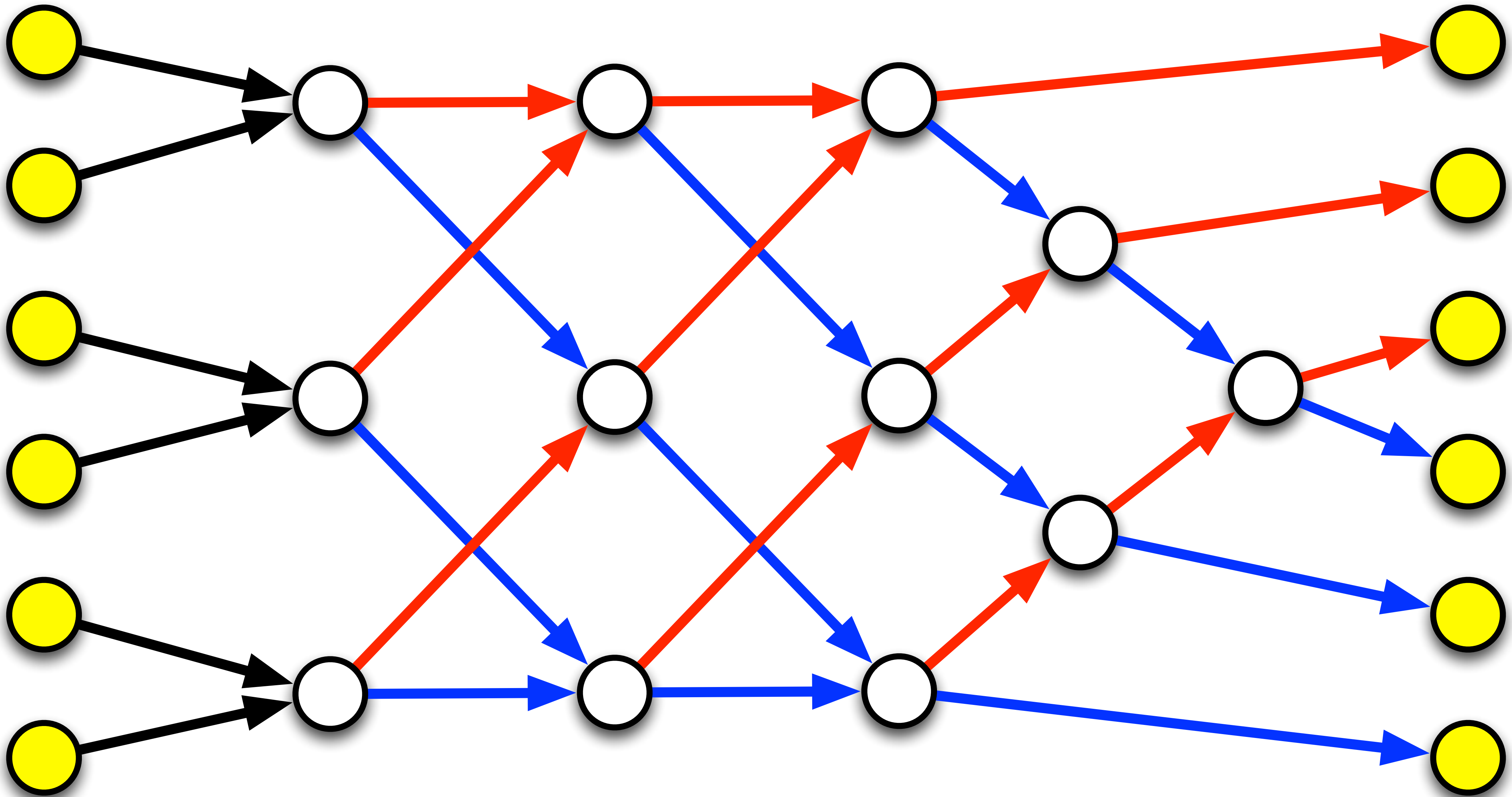


6.10 Trions !

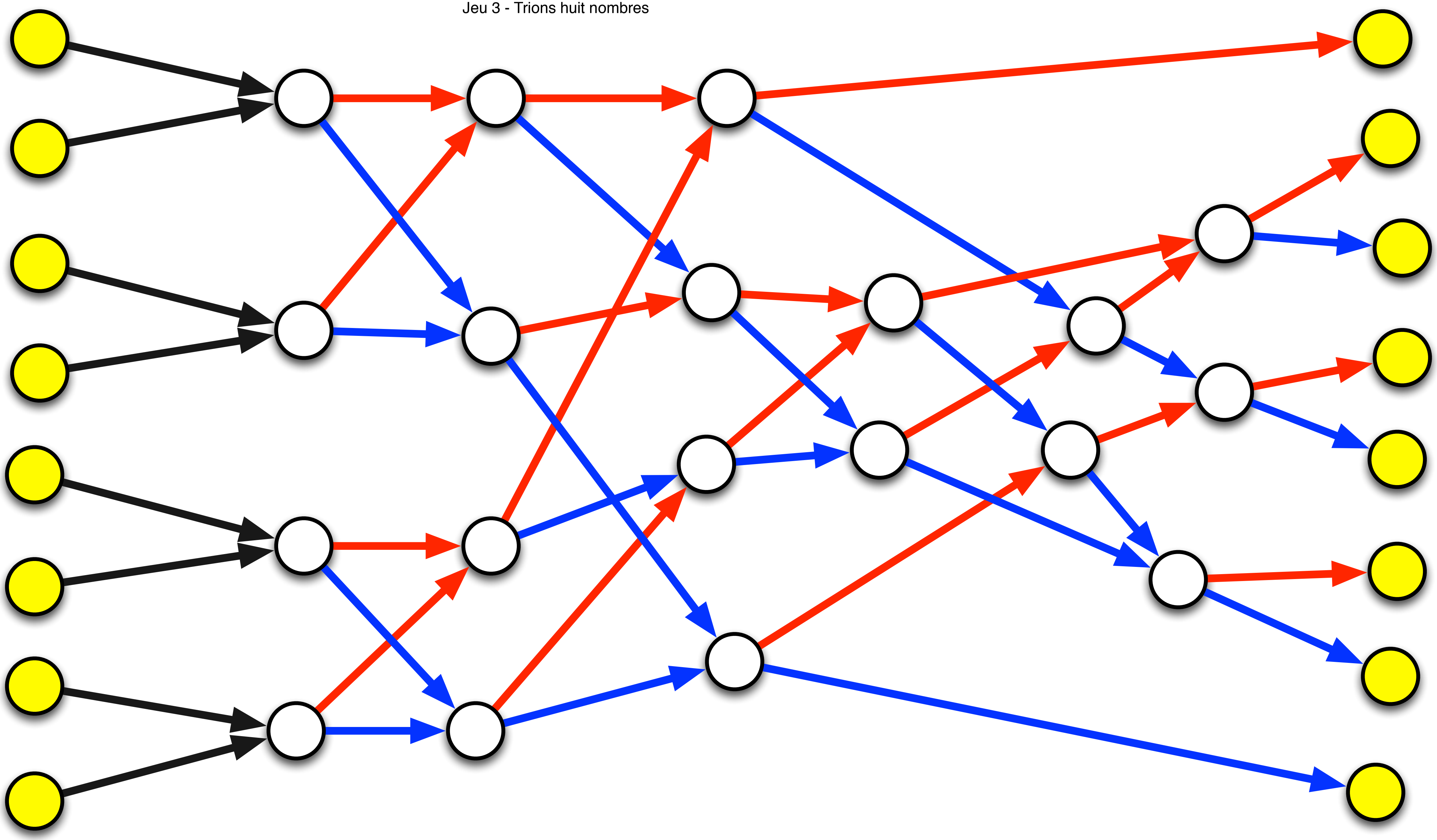
Jeu 1 - Trions quatre nombres



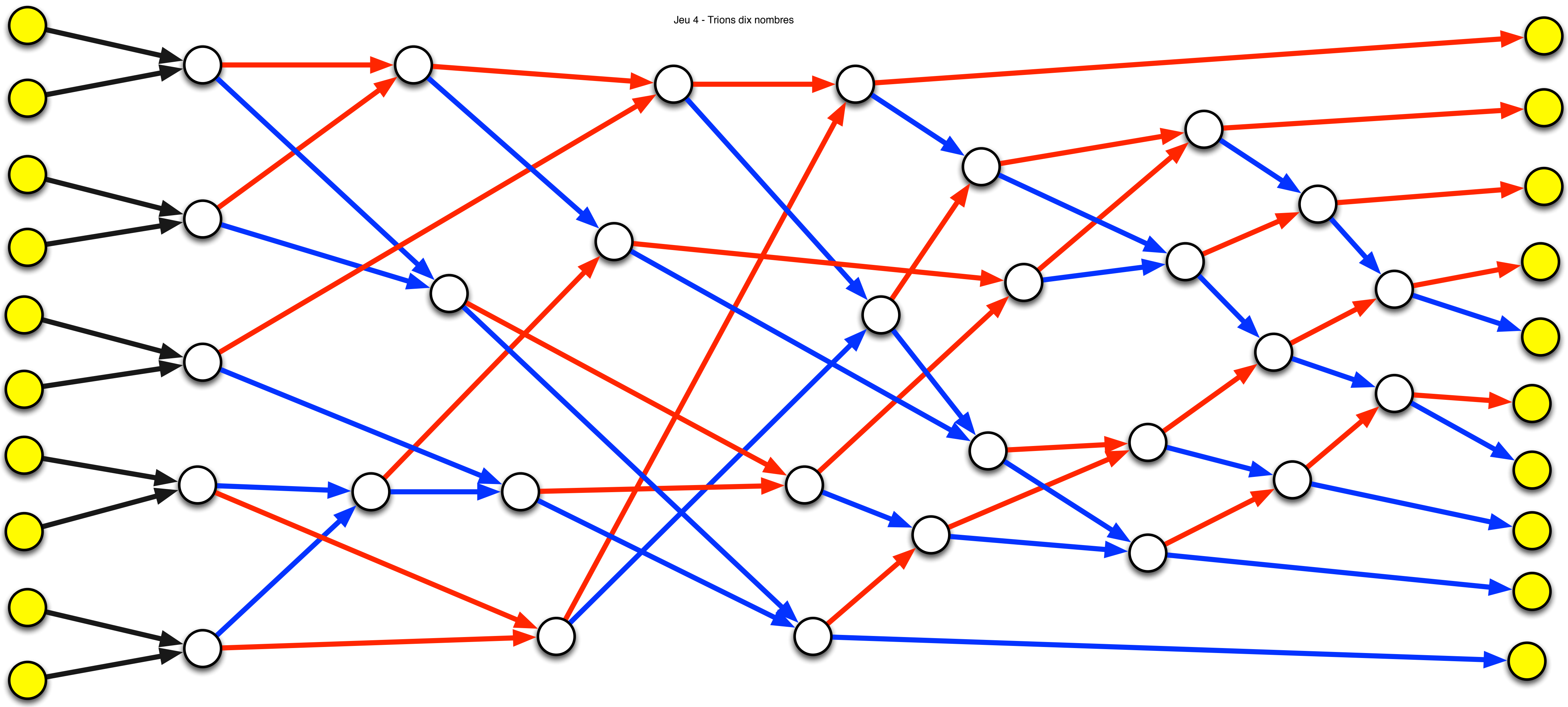
Jeu 2 - Trions six nombres



Jeu 3 - Trions huit nombres

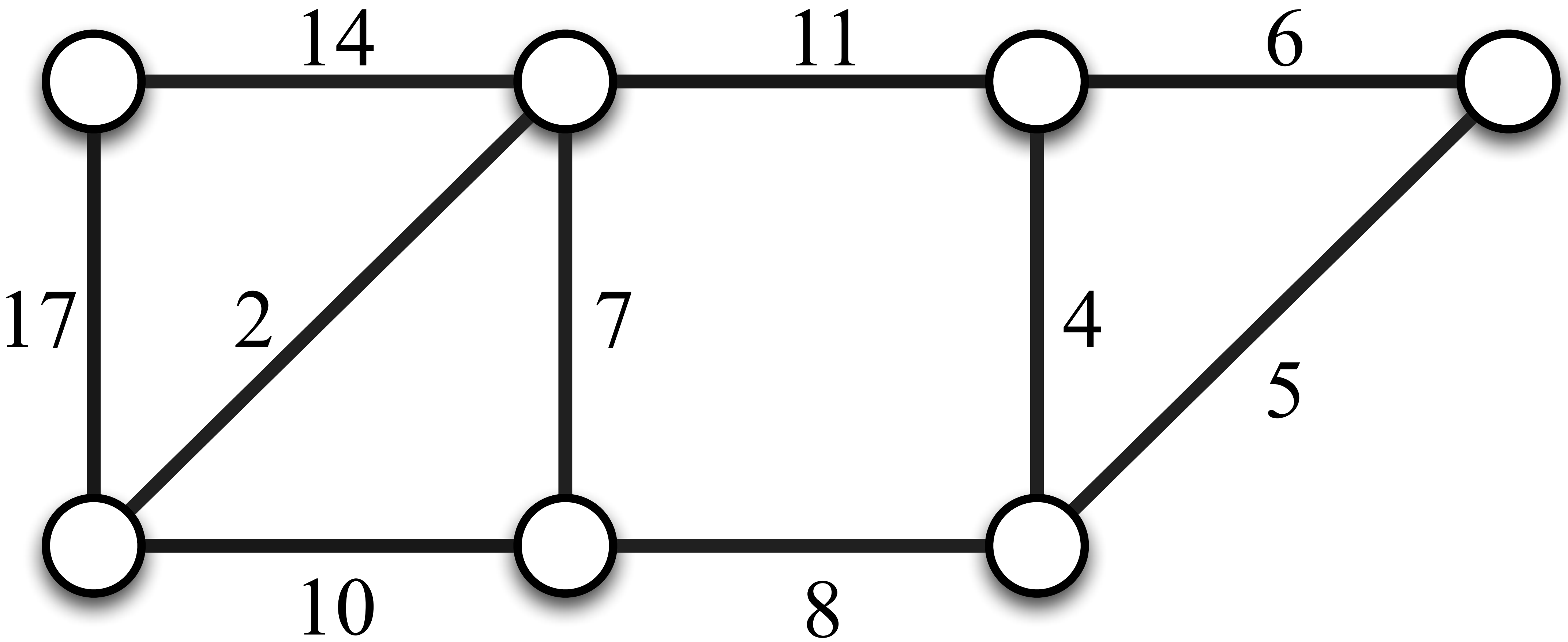


Jeu 4 - Trions dix nombres

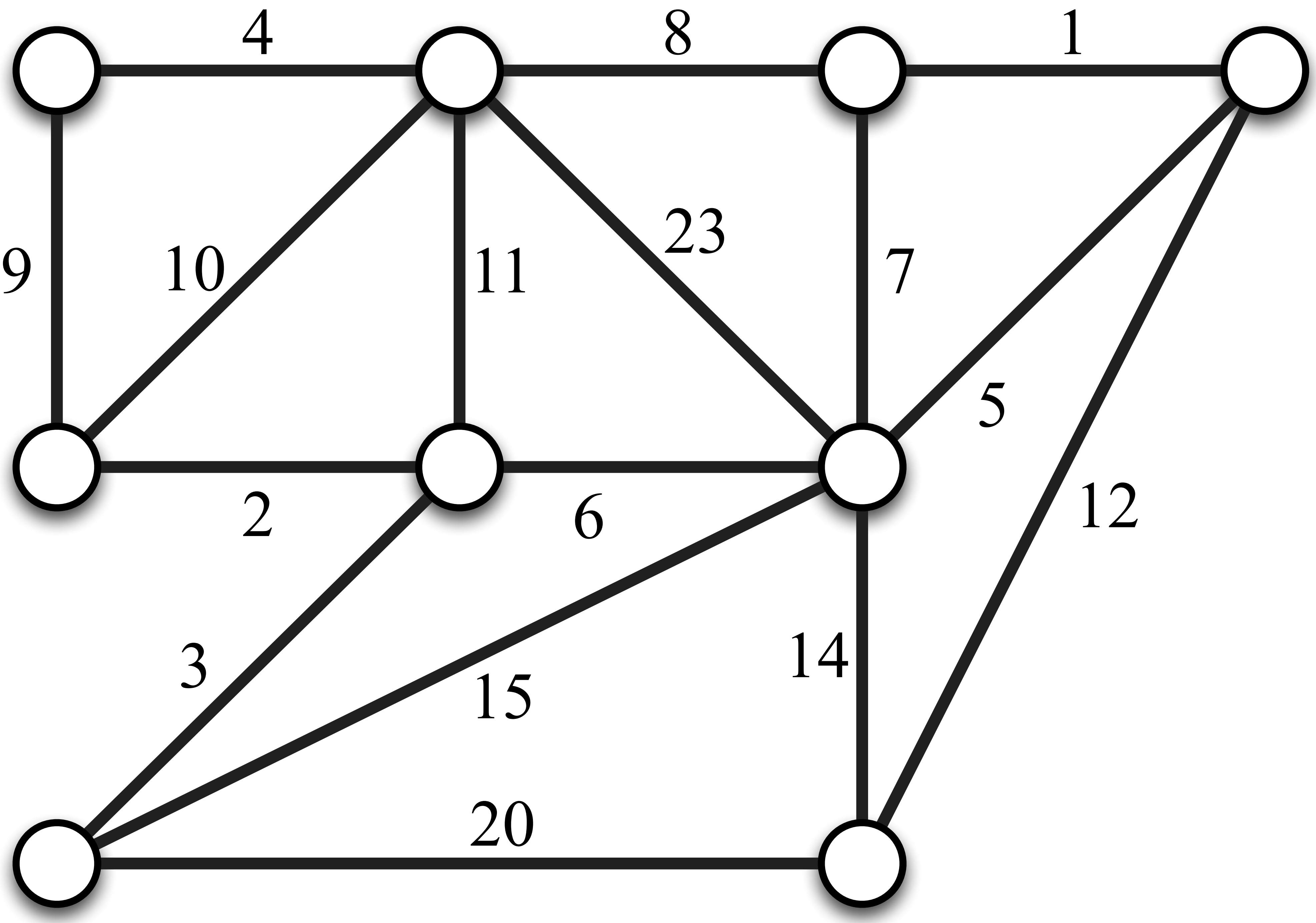


6.11 Arbre couvrant de poids minimum

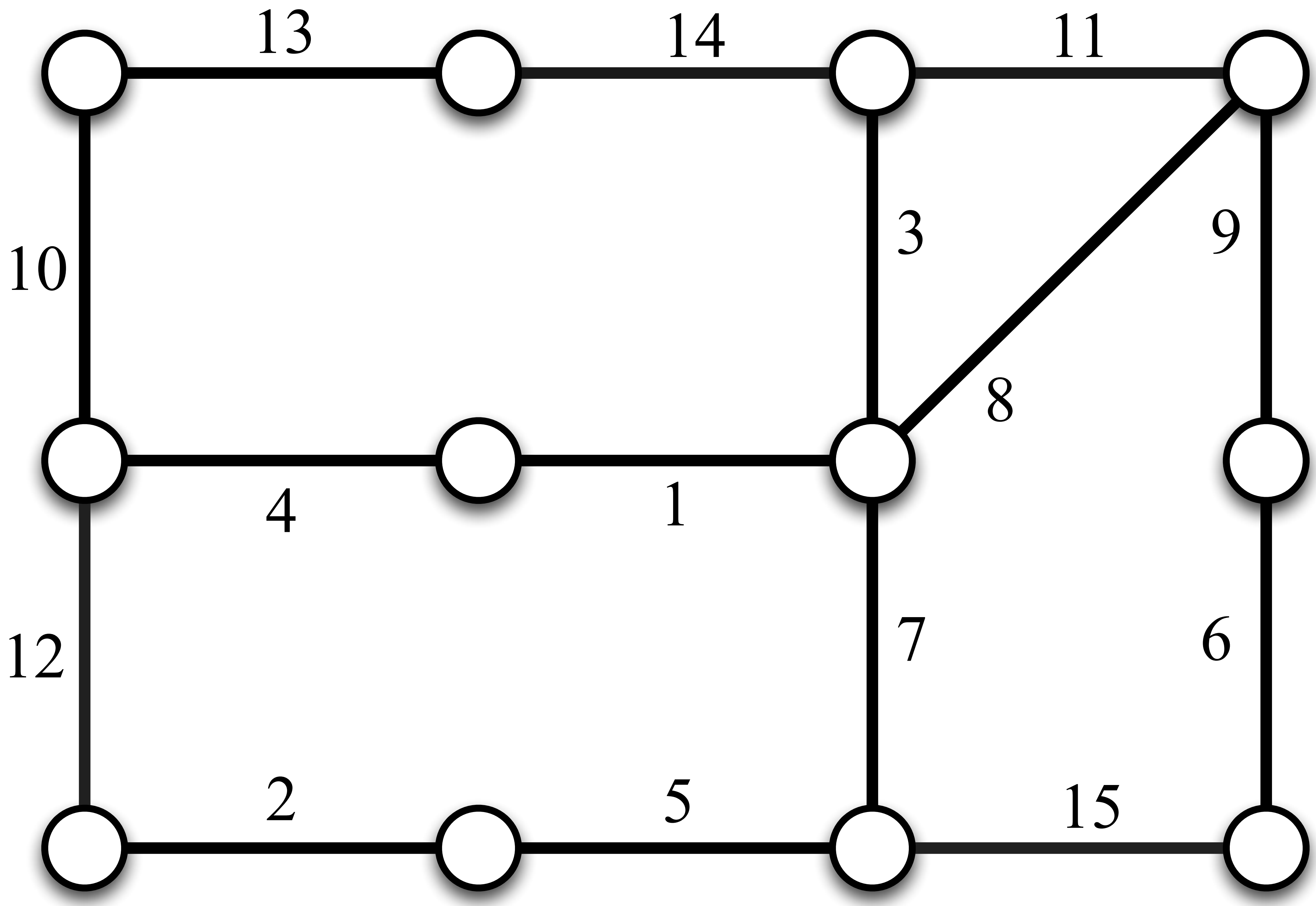
Jeu 1 - Arbre couvrant de poids minimum



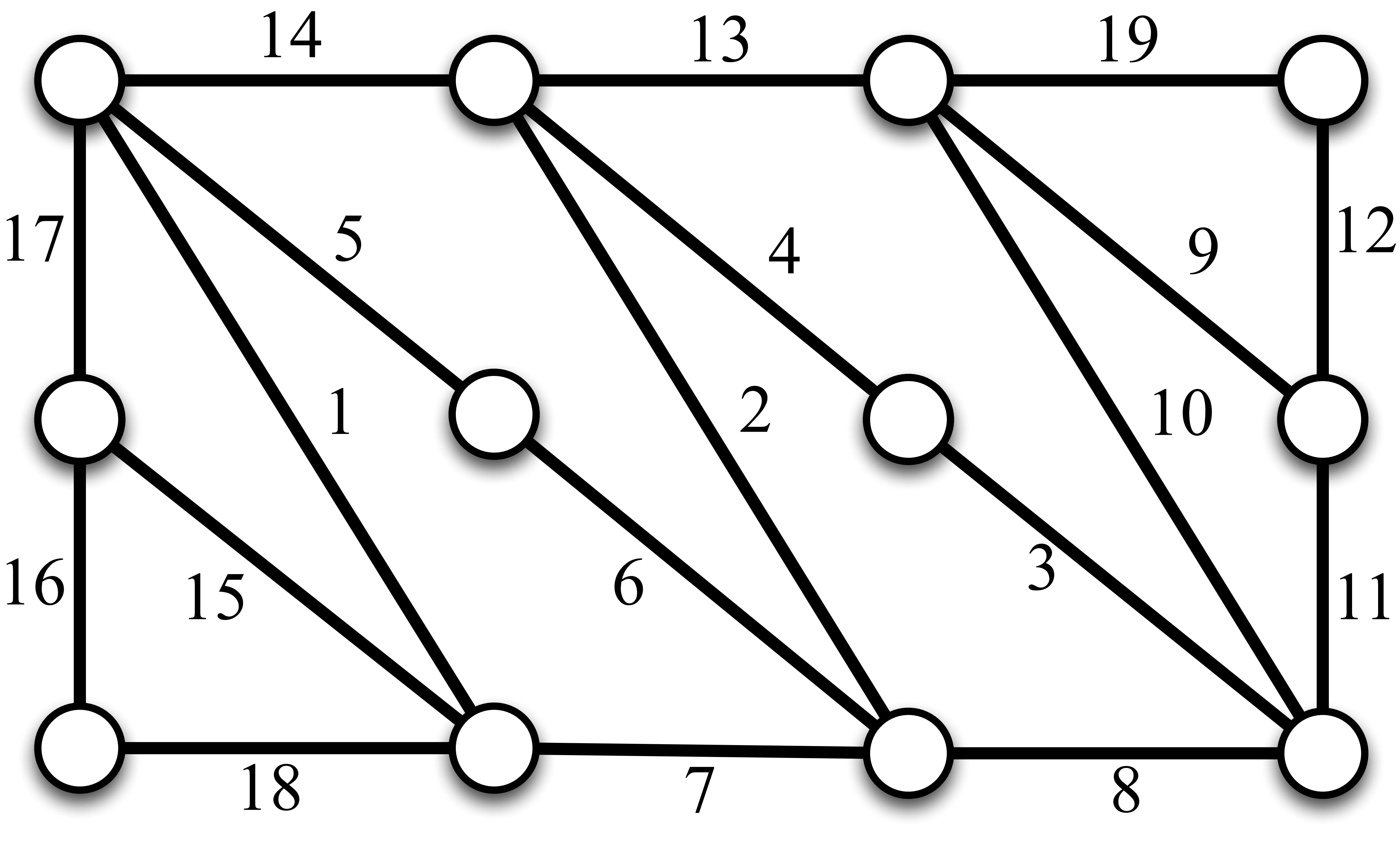
Jeu 2 - Arbre couvrant de poids minimum



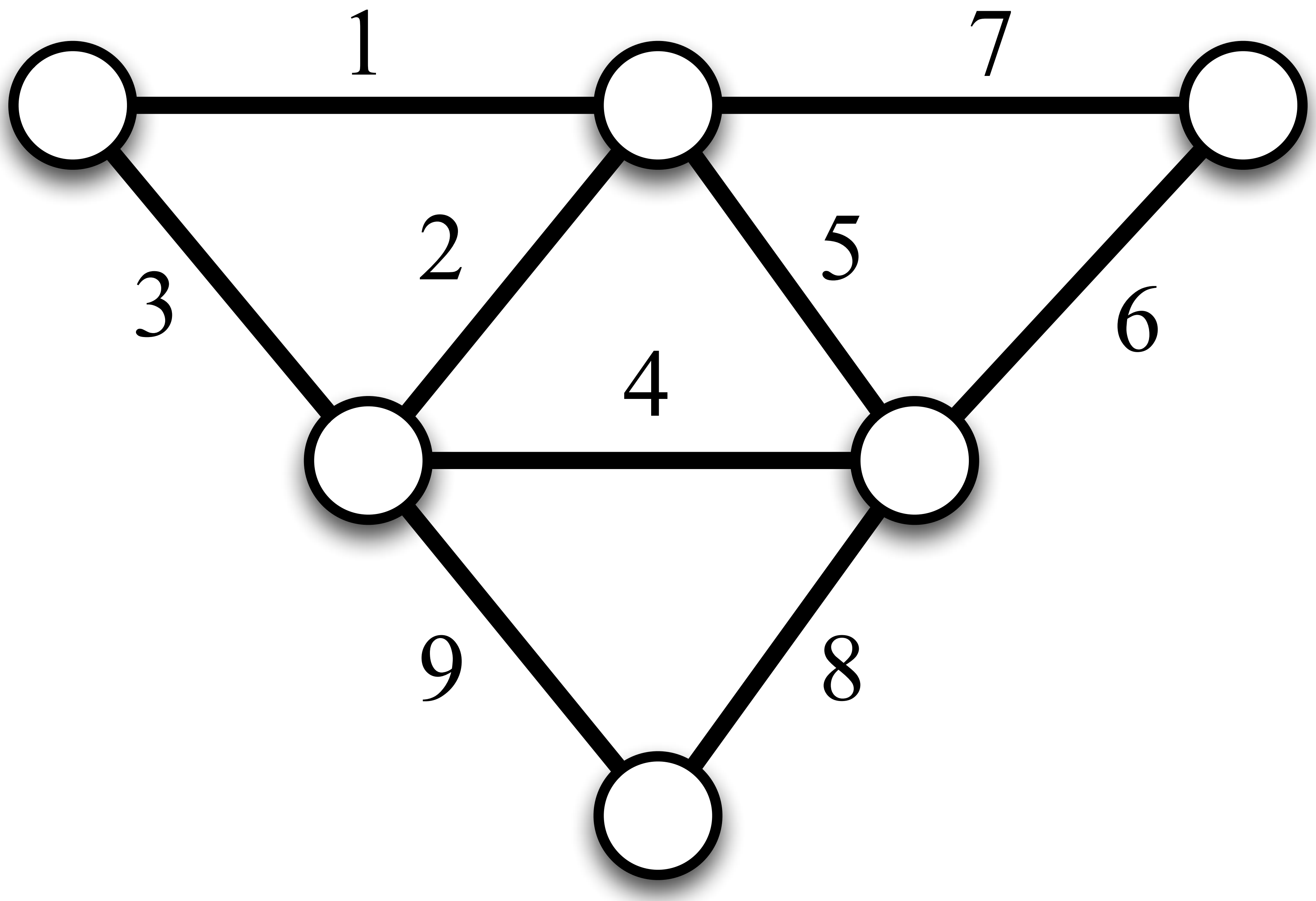
Jeu 3 - Arbre couvrant de poids minimum



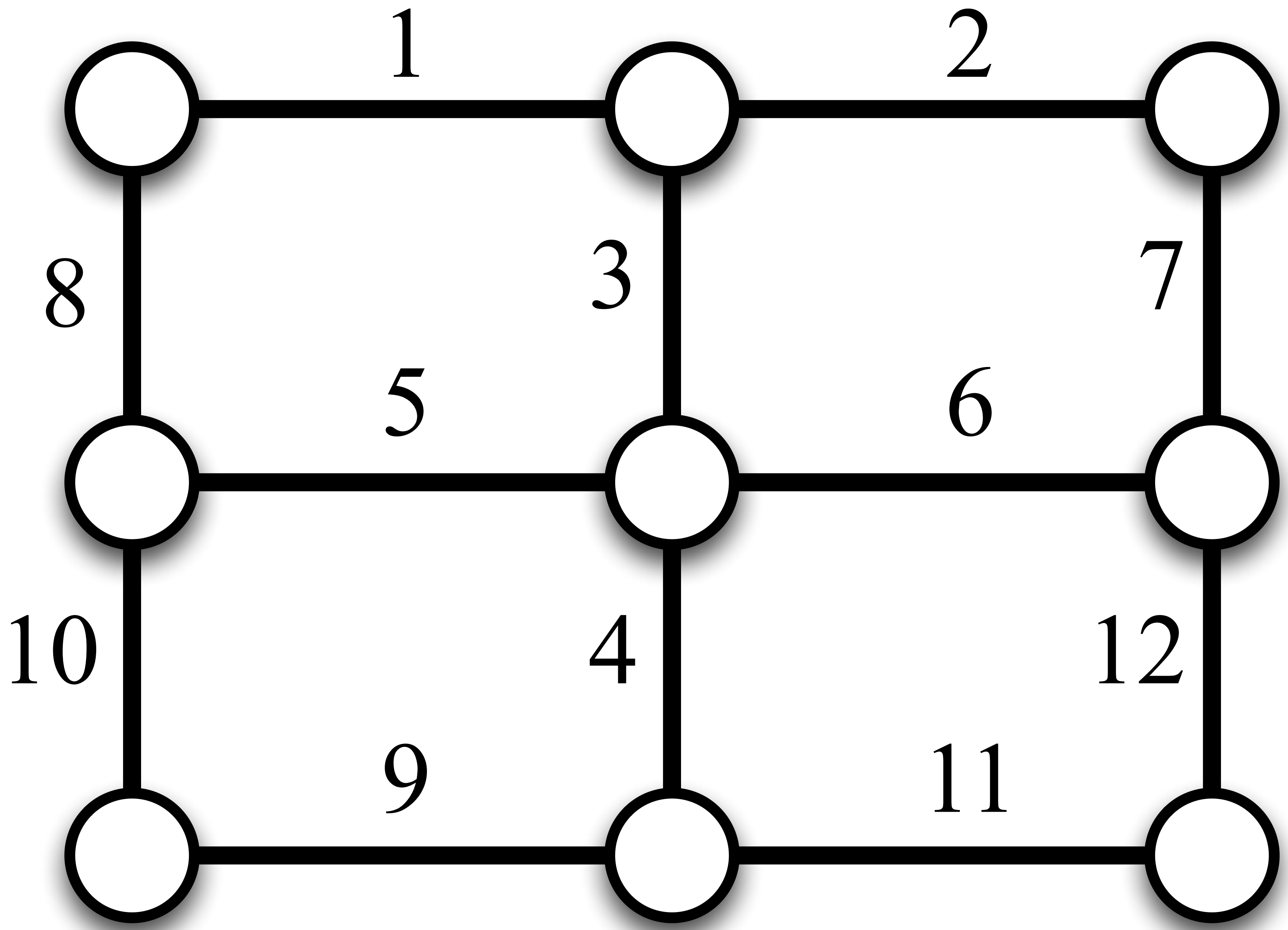
Jeu 4 - Arbre couvrant de poids minimum



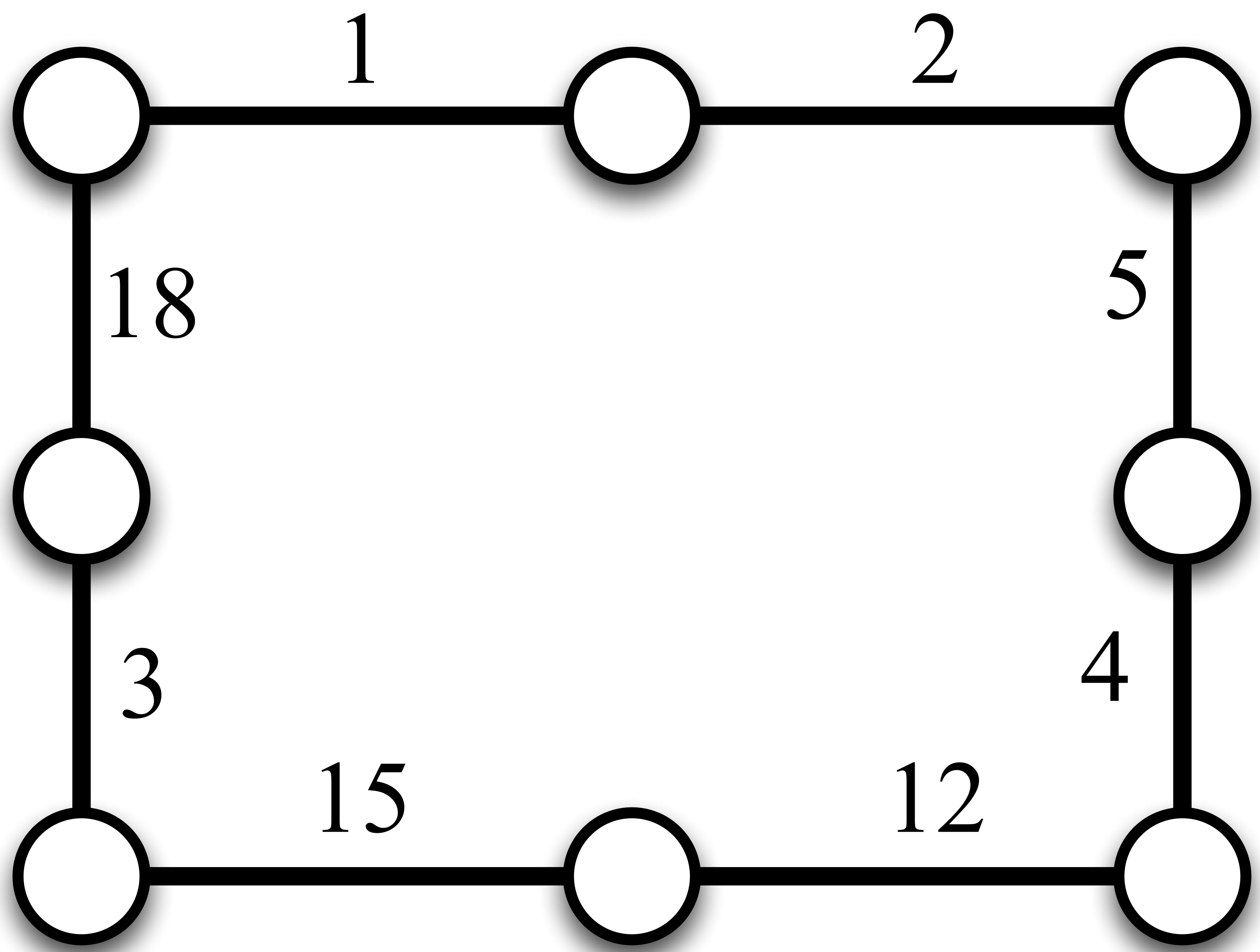
Jeu 5 - Arbre couvrant de poids minimum



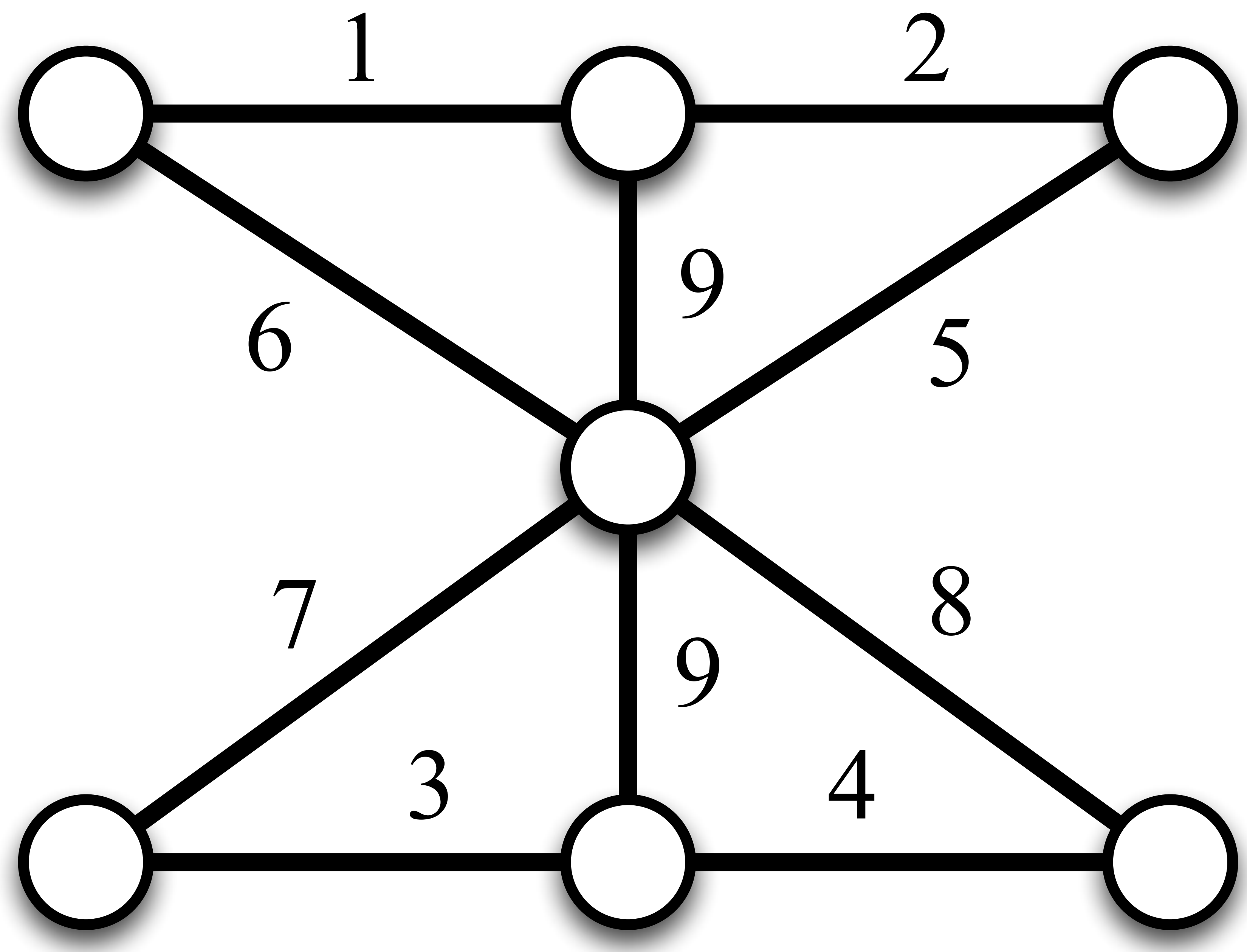
Jeu 6 - Arbre couvrant de poids minimum



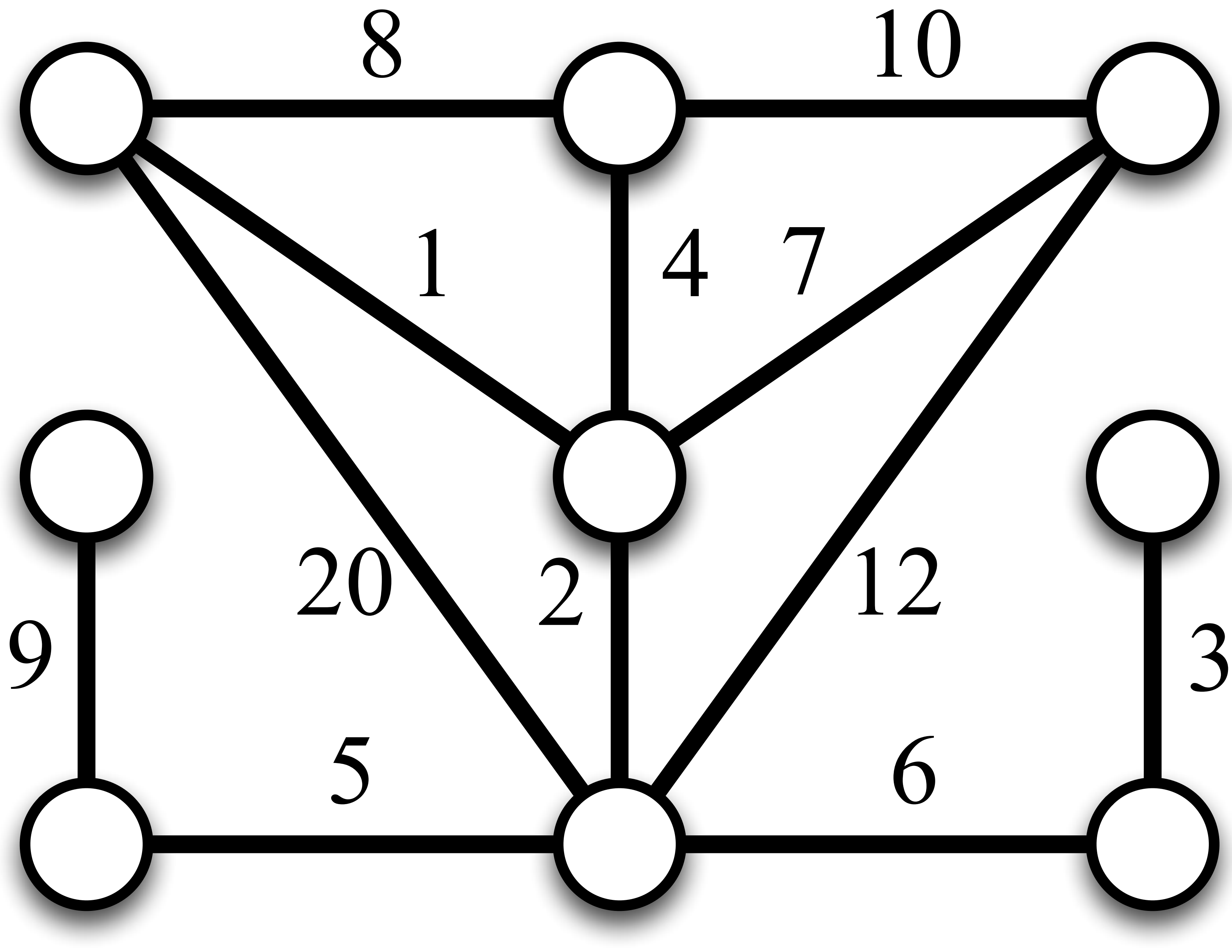
Jeu 7 - Arbre couvrant de poids minimum



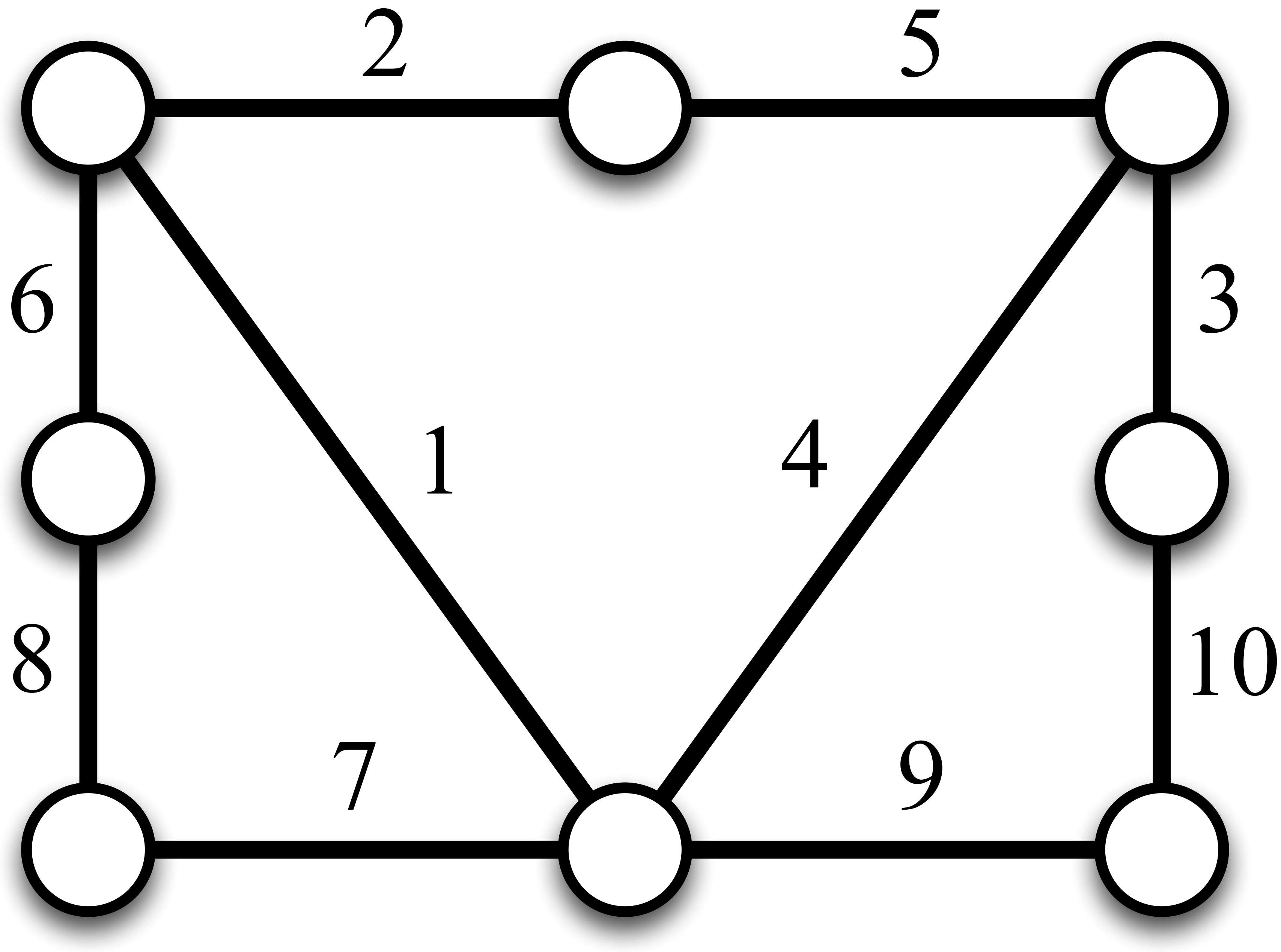
Jeu 8 - Arbre couvrant de poids minimum



Jeu 9 - Arbre couvrant de poids minimum

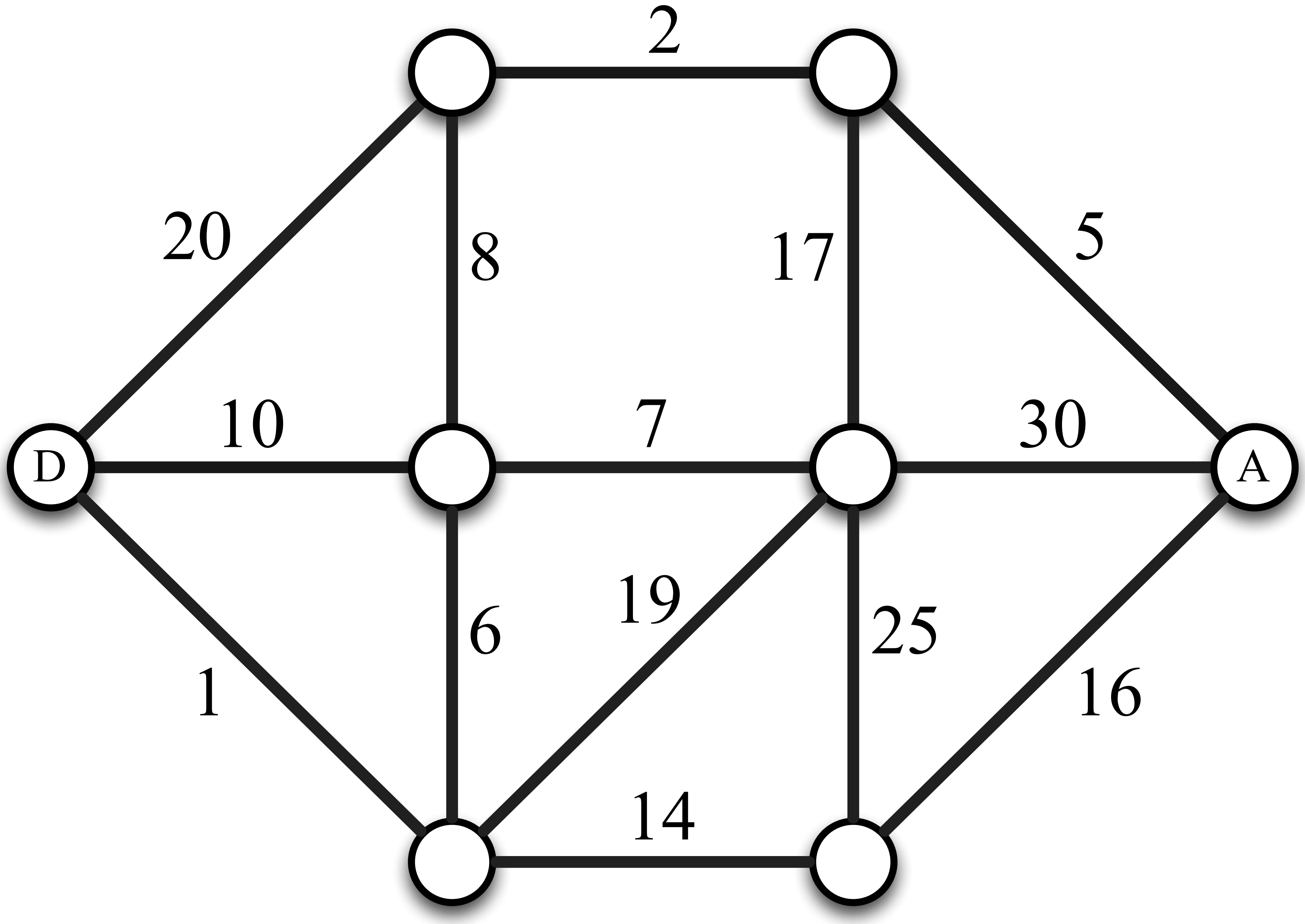


Jeu 10 - Arbre couvrant de poids minimum

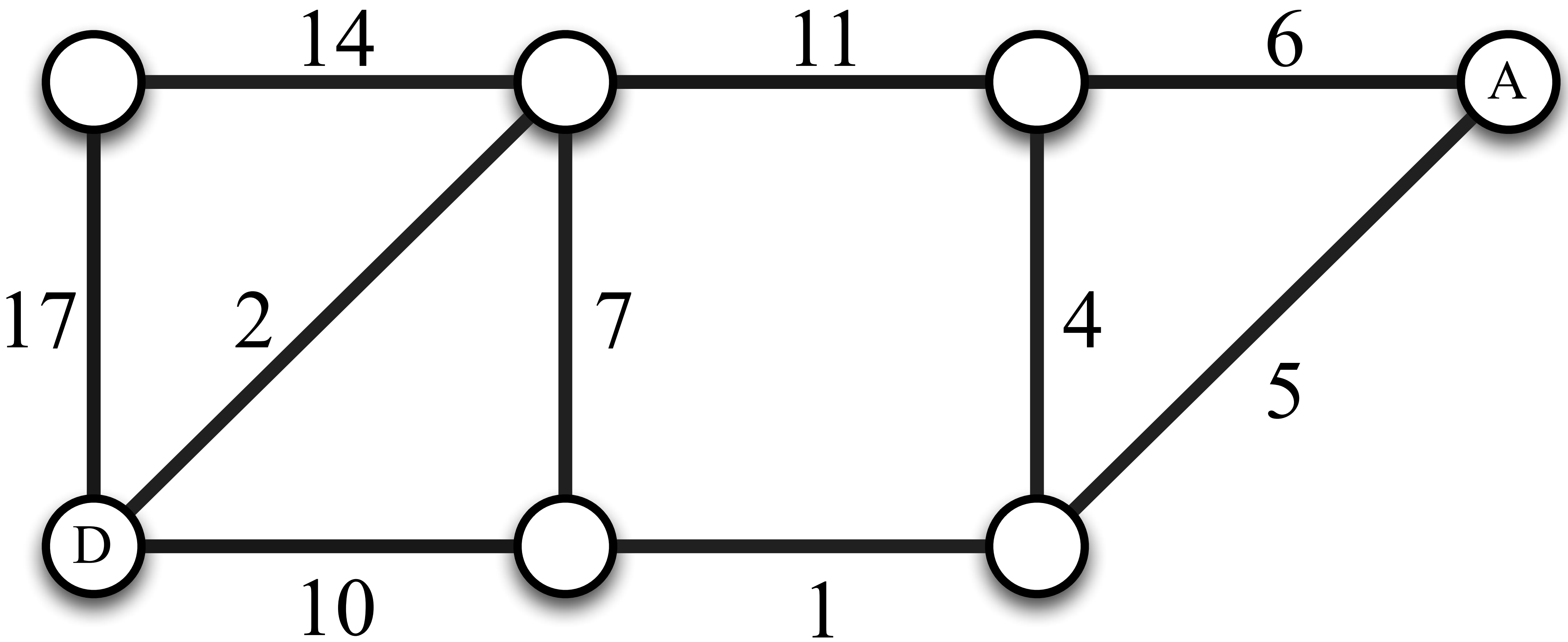


6.12 Plus court chemin entre deux sommets

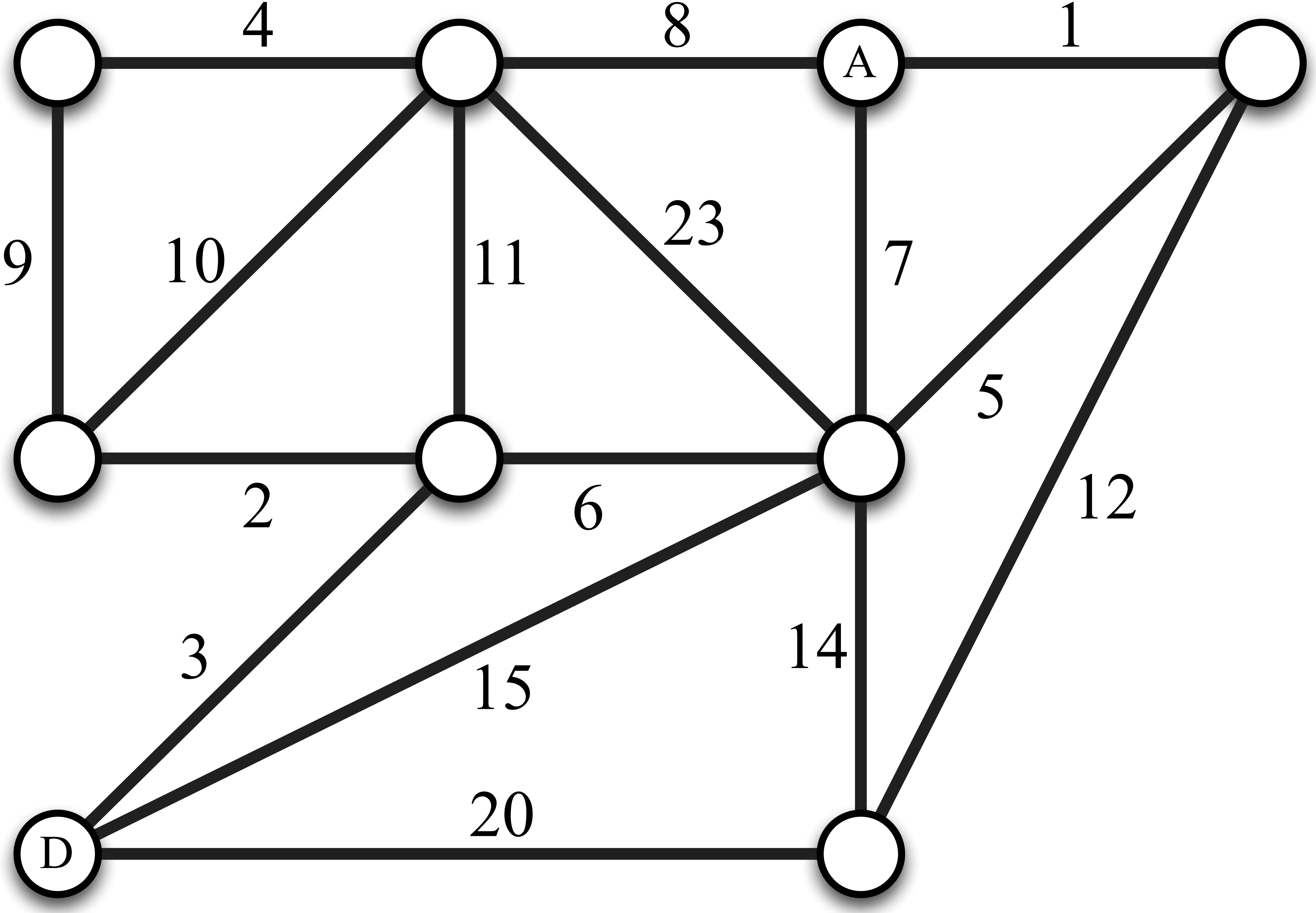
Jeu 1 - Plus court chemin entre deux sommets



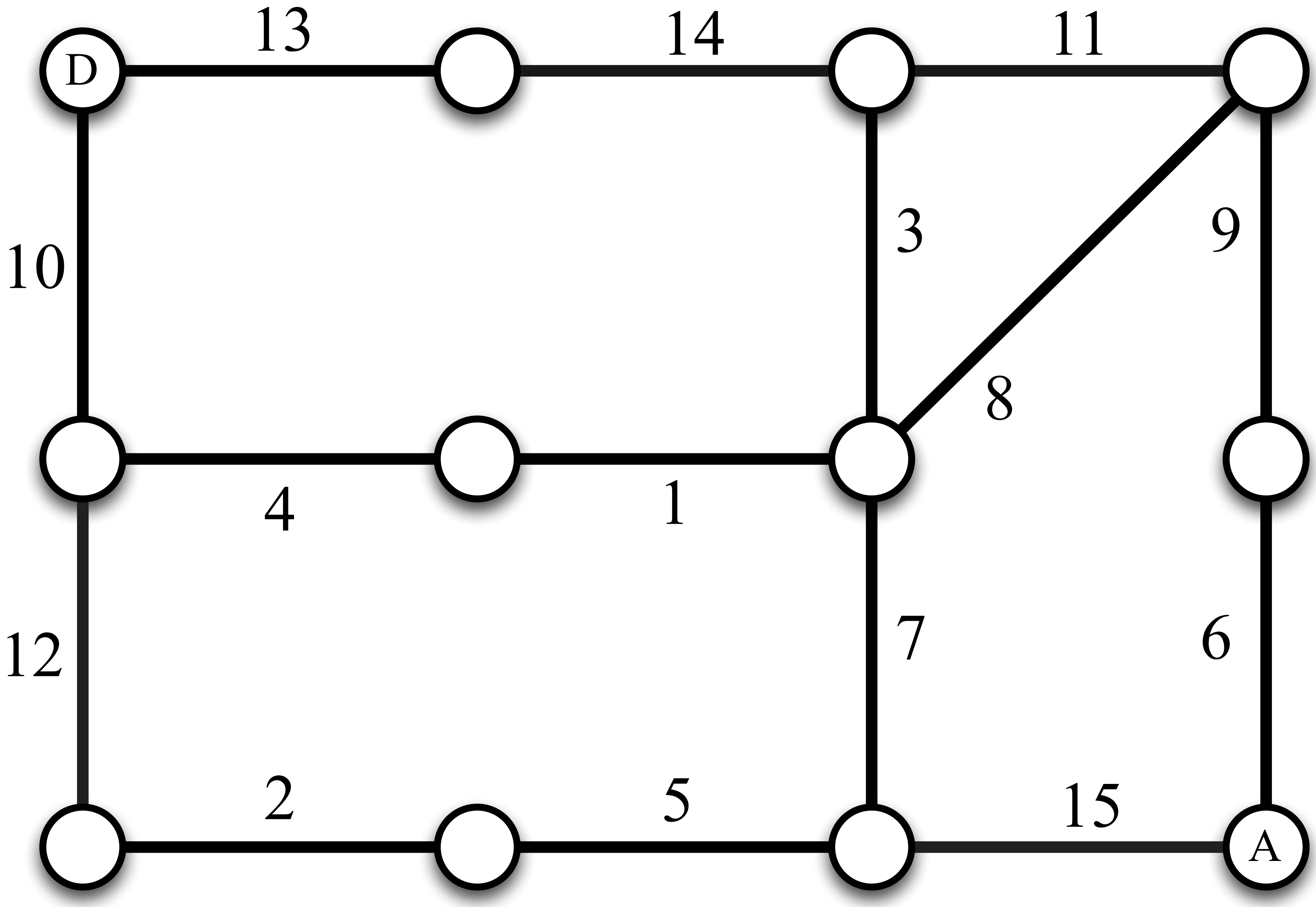
Jeu 2 - Plus court chemin entre deux sommets



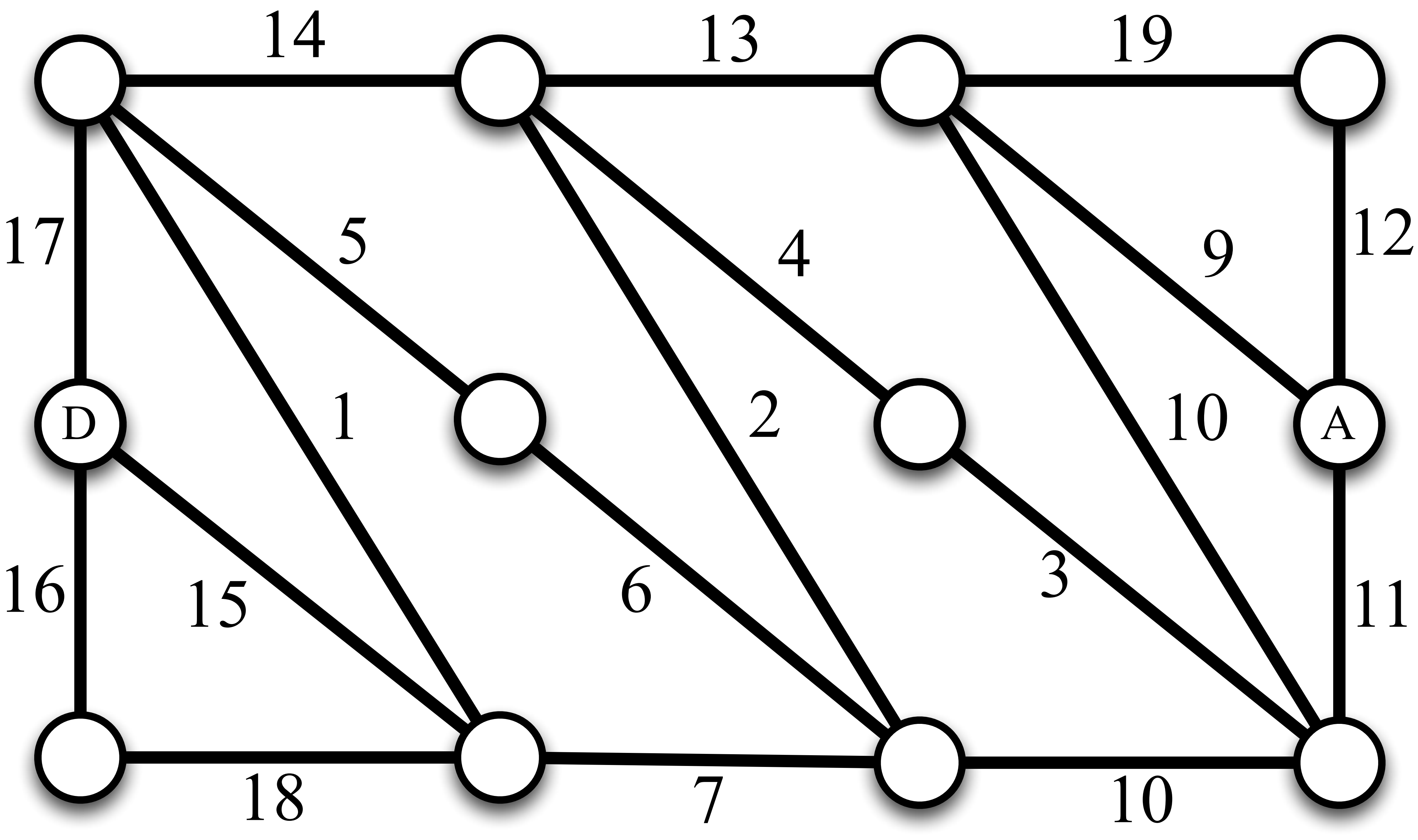
Jeu 3 - Plus court chemin entre deux sommets



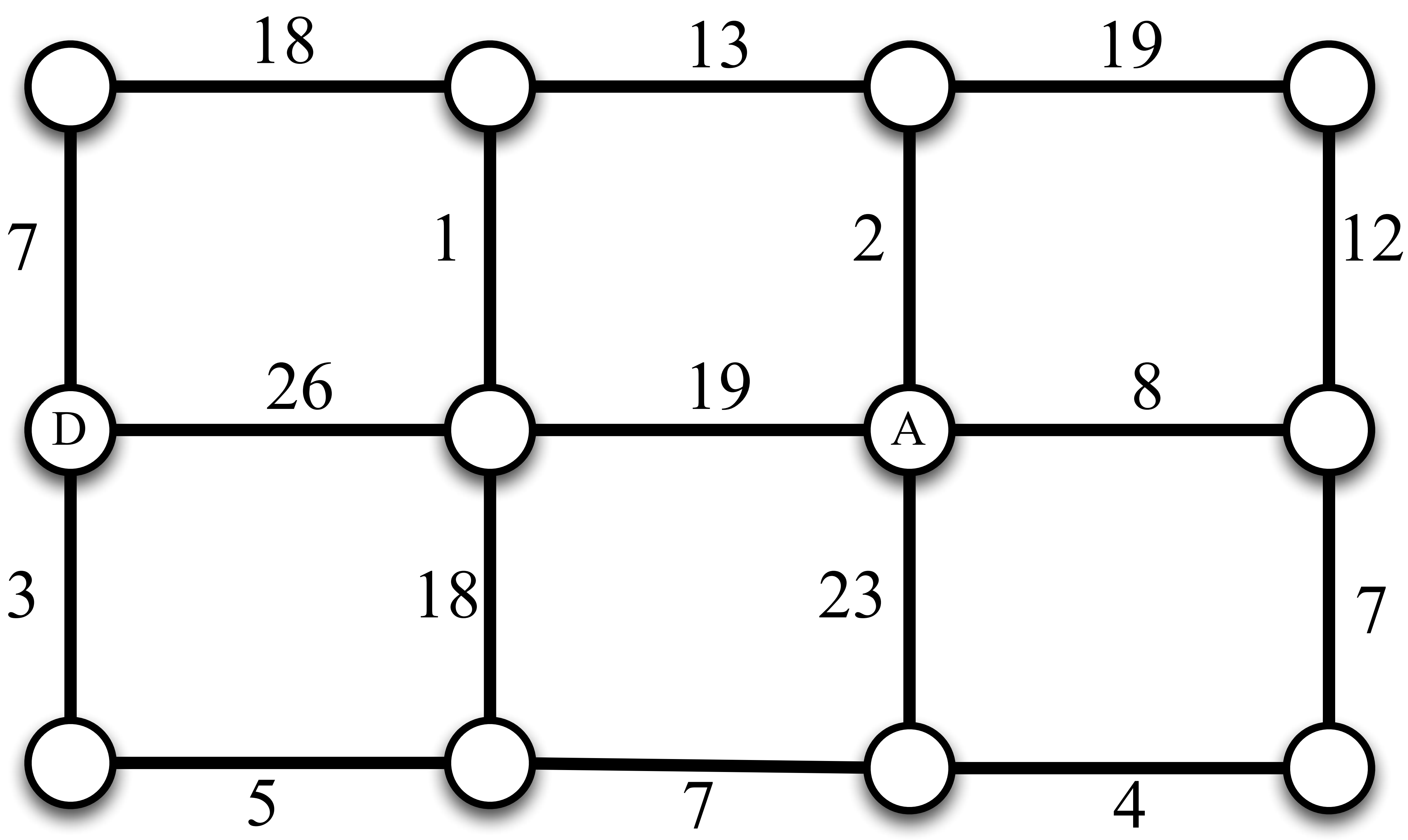
Jeu 4 - Plus court chemin entre deux sommets



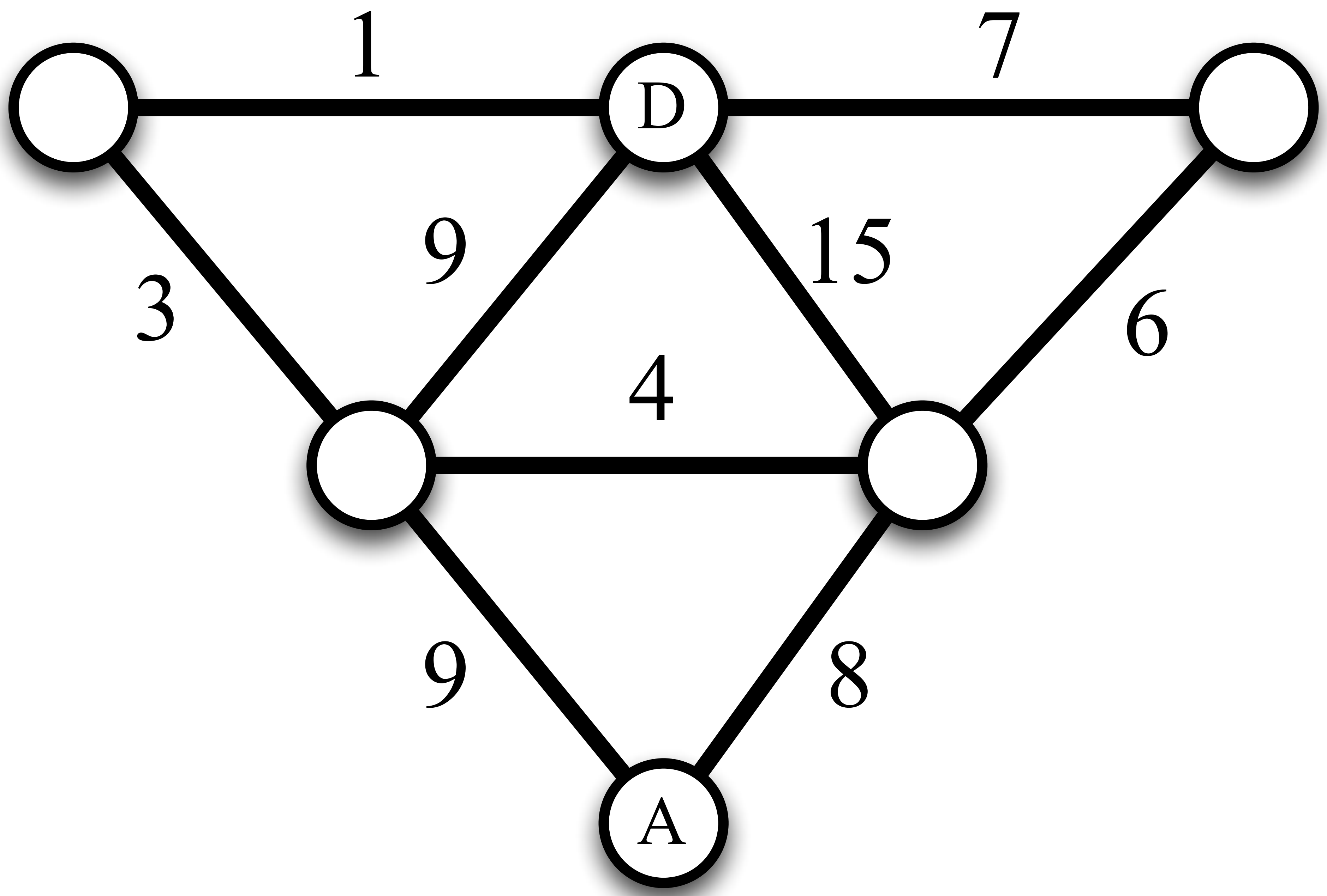
Jeu 5 - Plus court chemin entre deux sommets



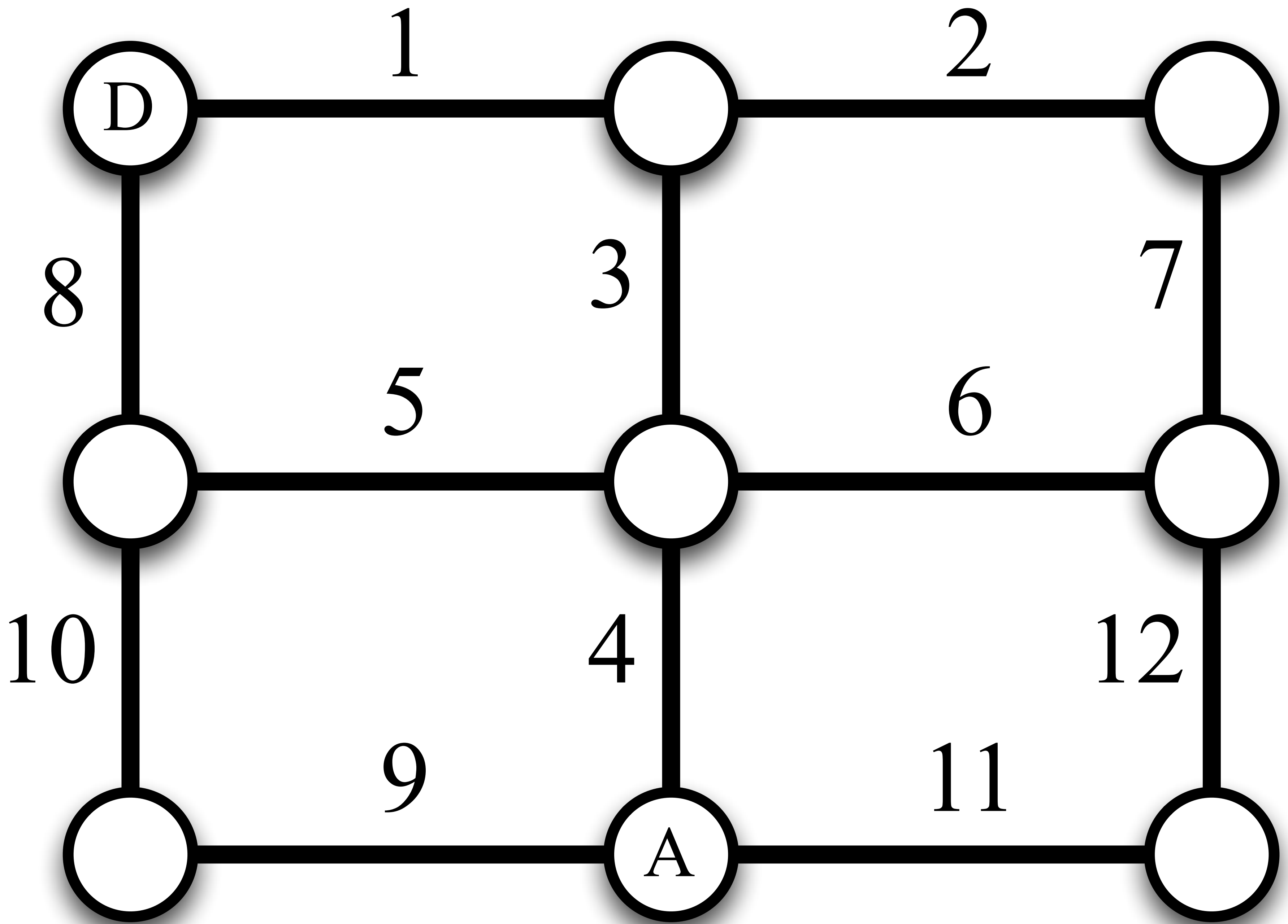
Jeu 6 - Plus court chemin entre deux sommets



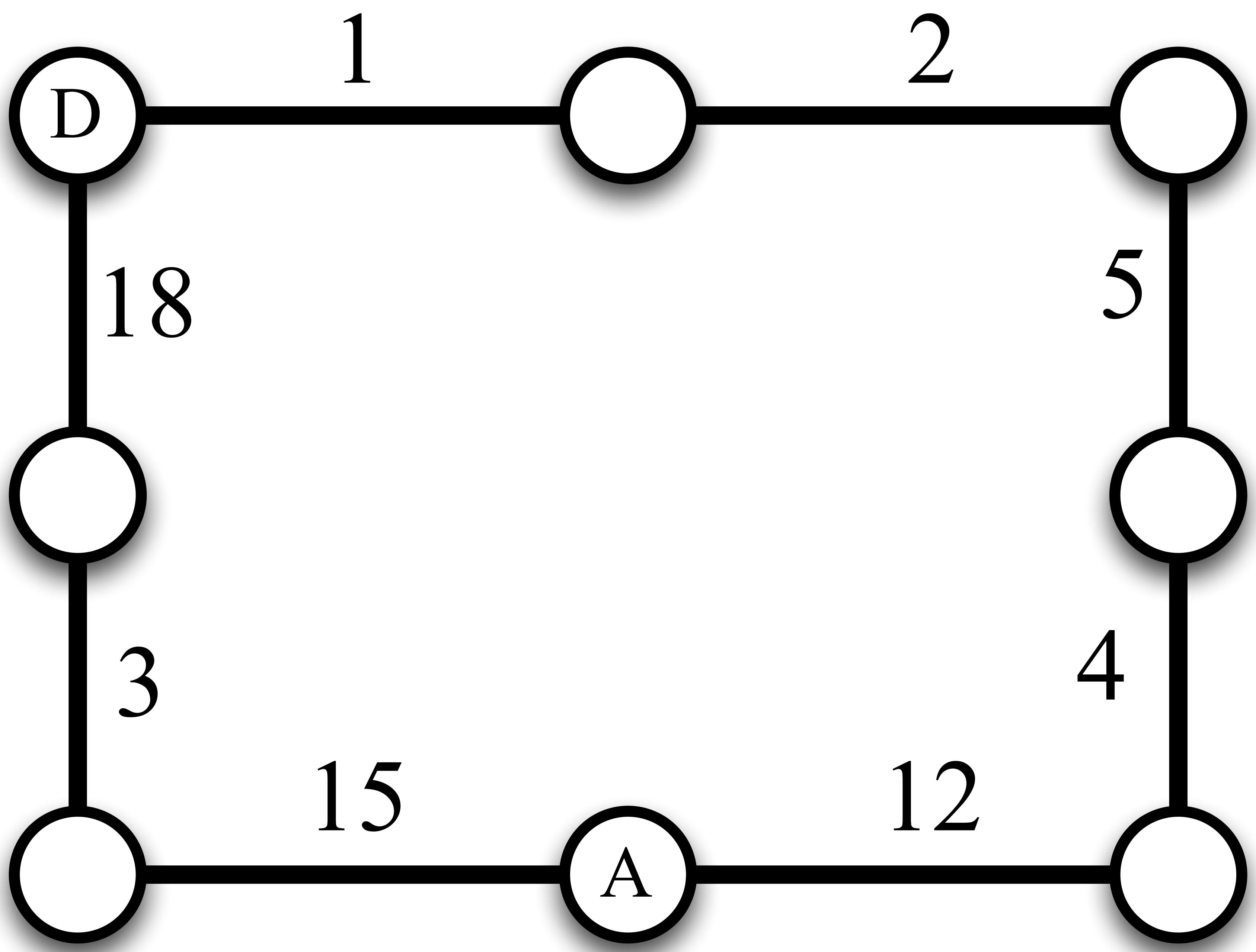
Jeu 7 - Plus court chemin entre deux sommets



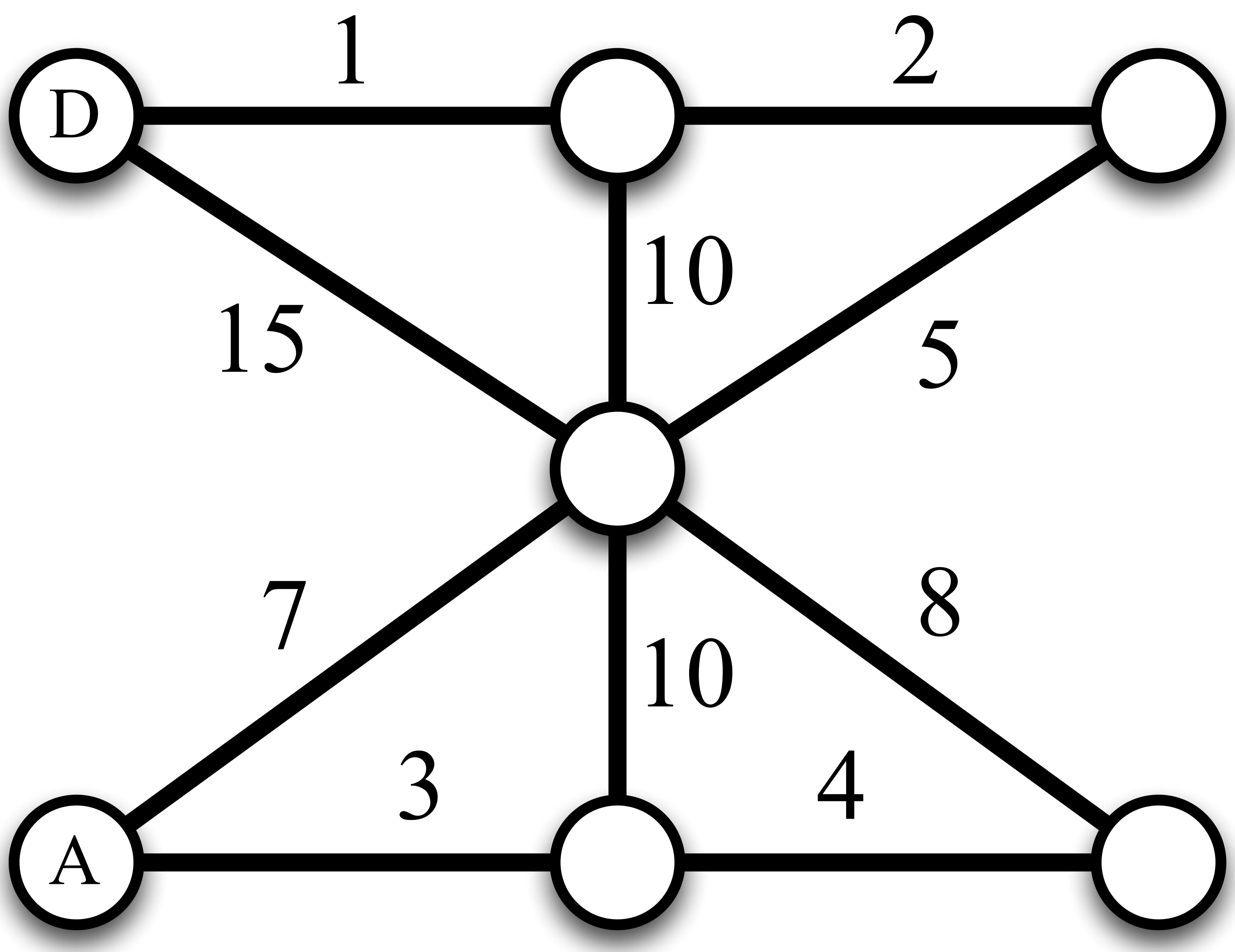
Jeu 8 - Plus court chemin entre deux sommets



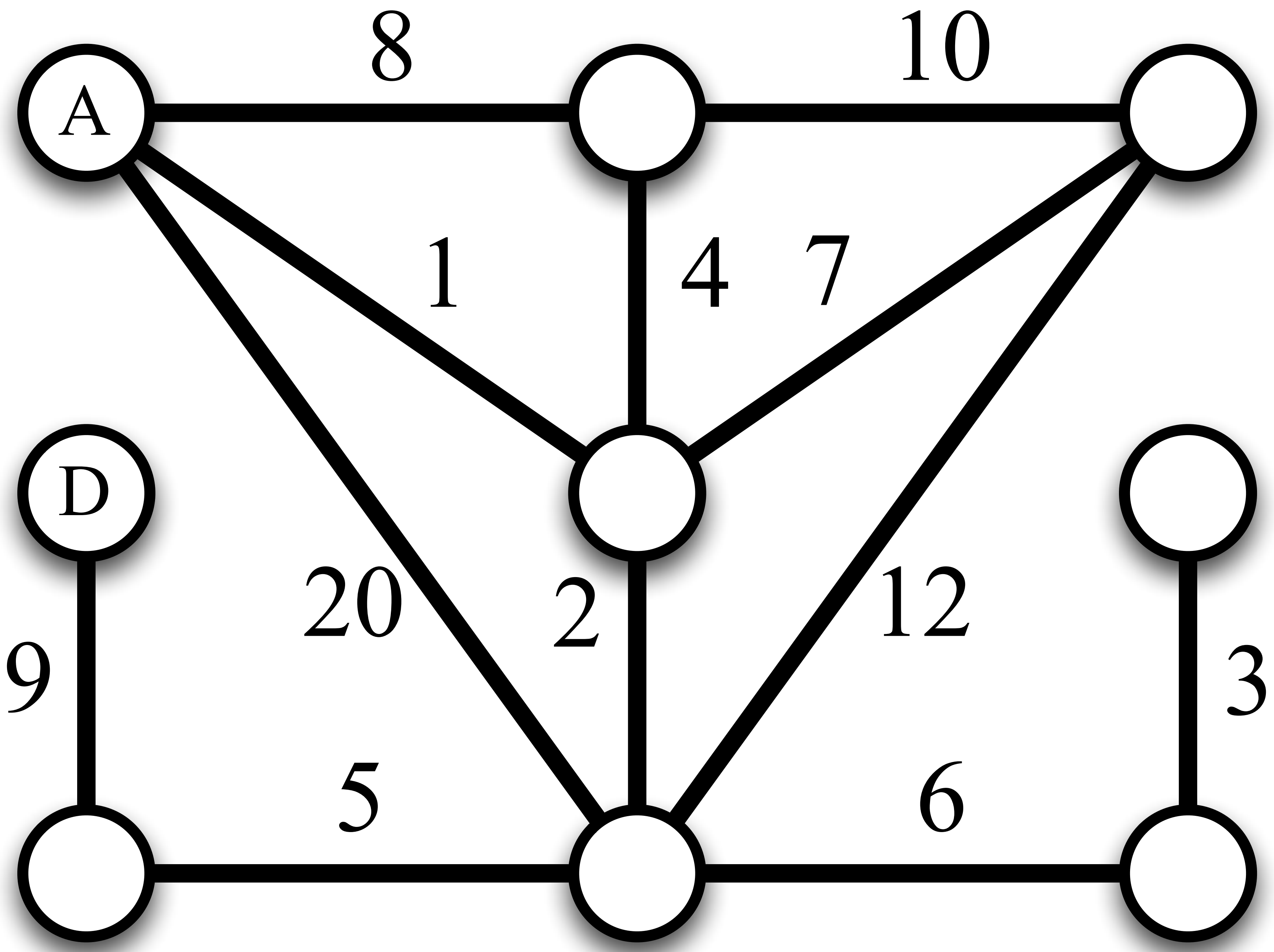
Jeu 9 - Plus court chemin entre deux sommets



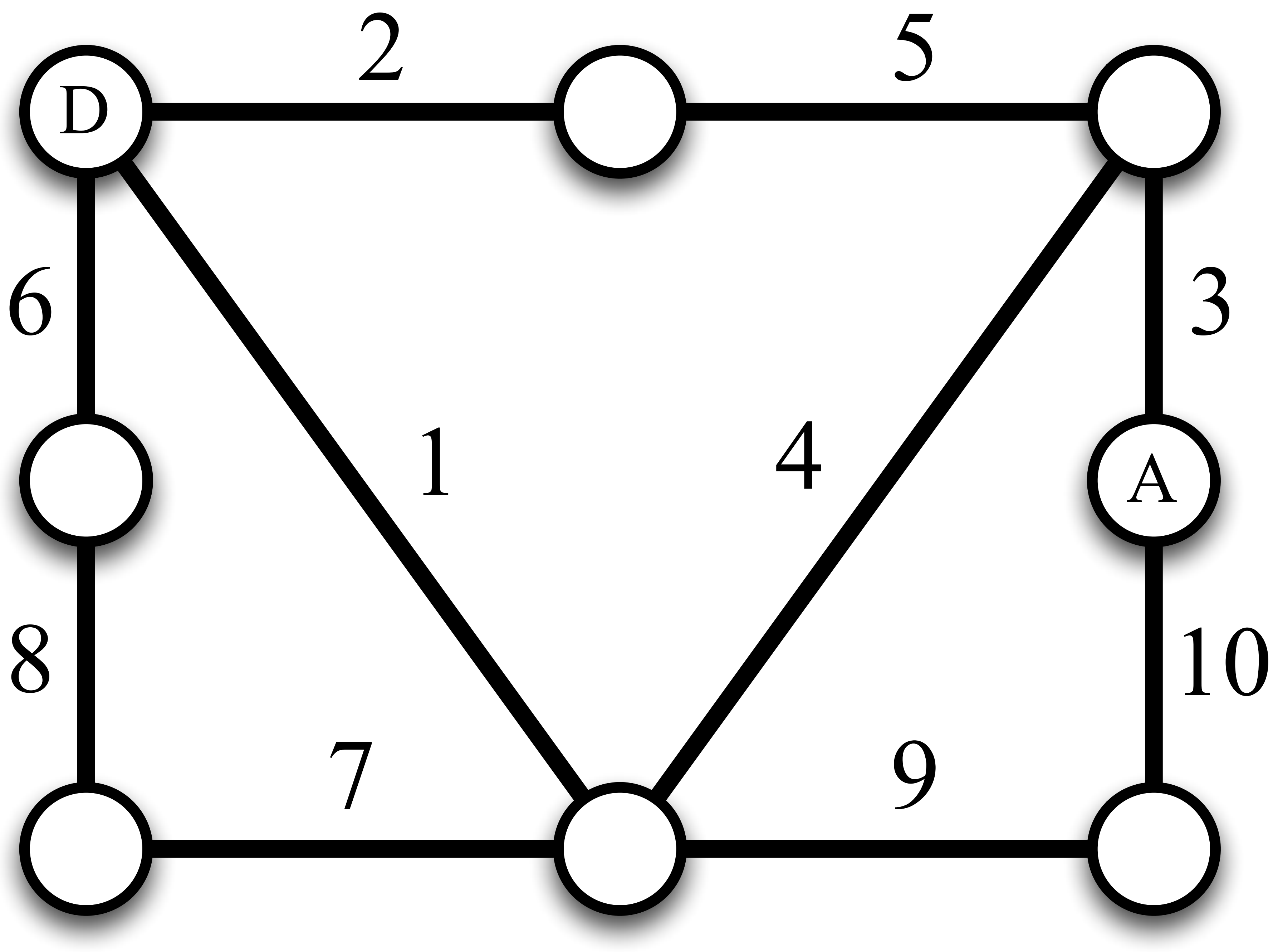
Jeu 10 - Plus court chemin entre deux sommets



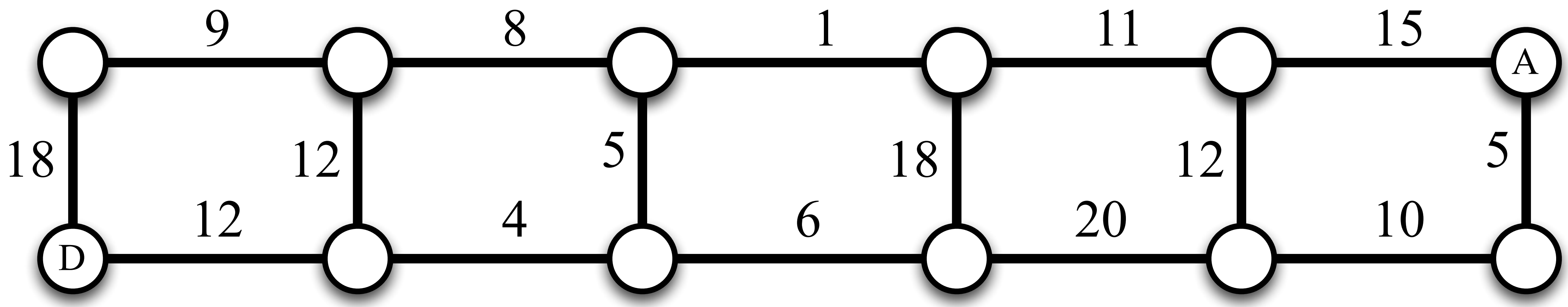
Jeu 11 - Plus court chemin entre deux sommets



Jeu 12 - Plus court chemin entre deux sommets

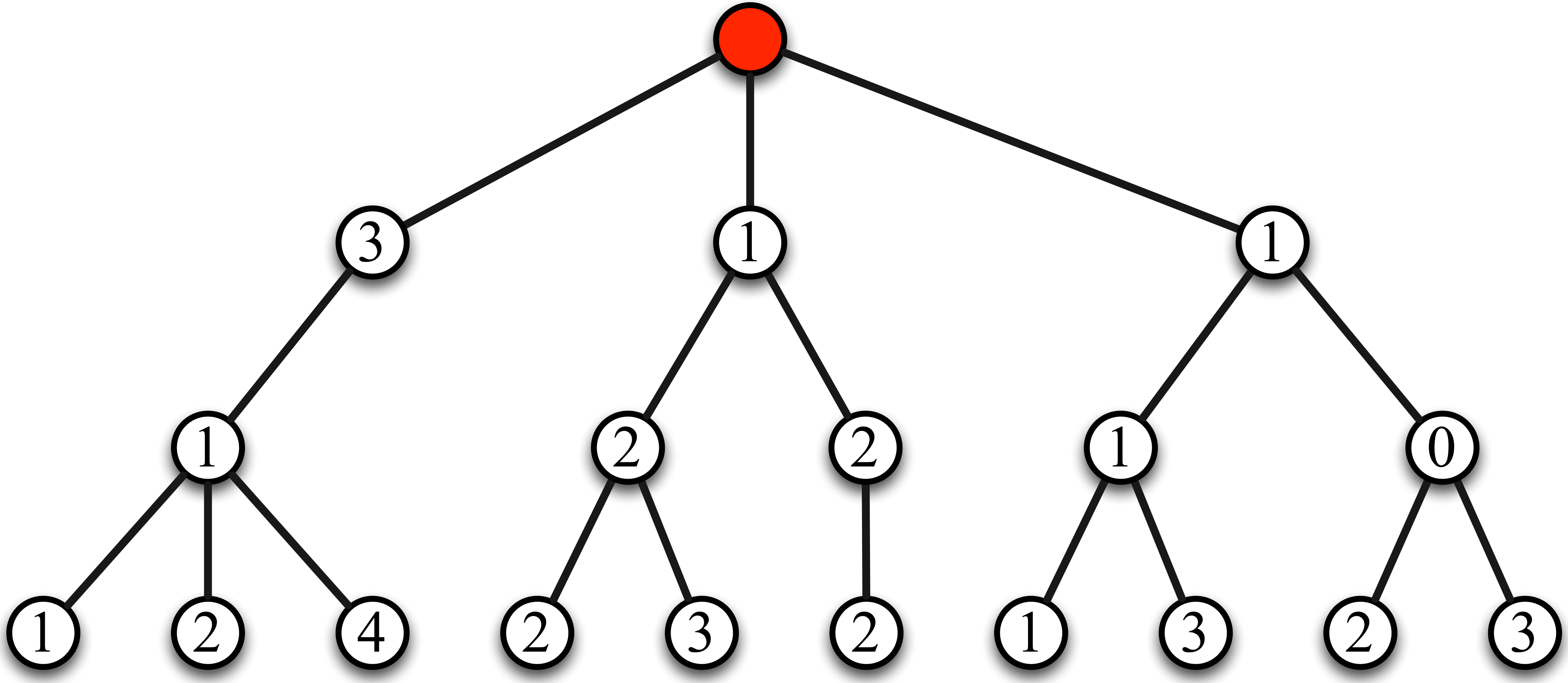


Jeu 13 - Plus court chemin entre deux sommets

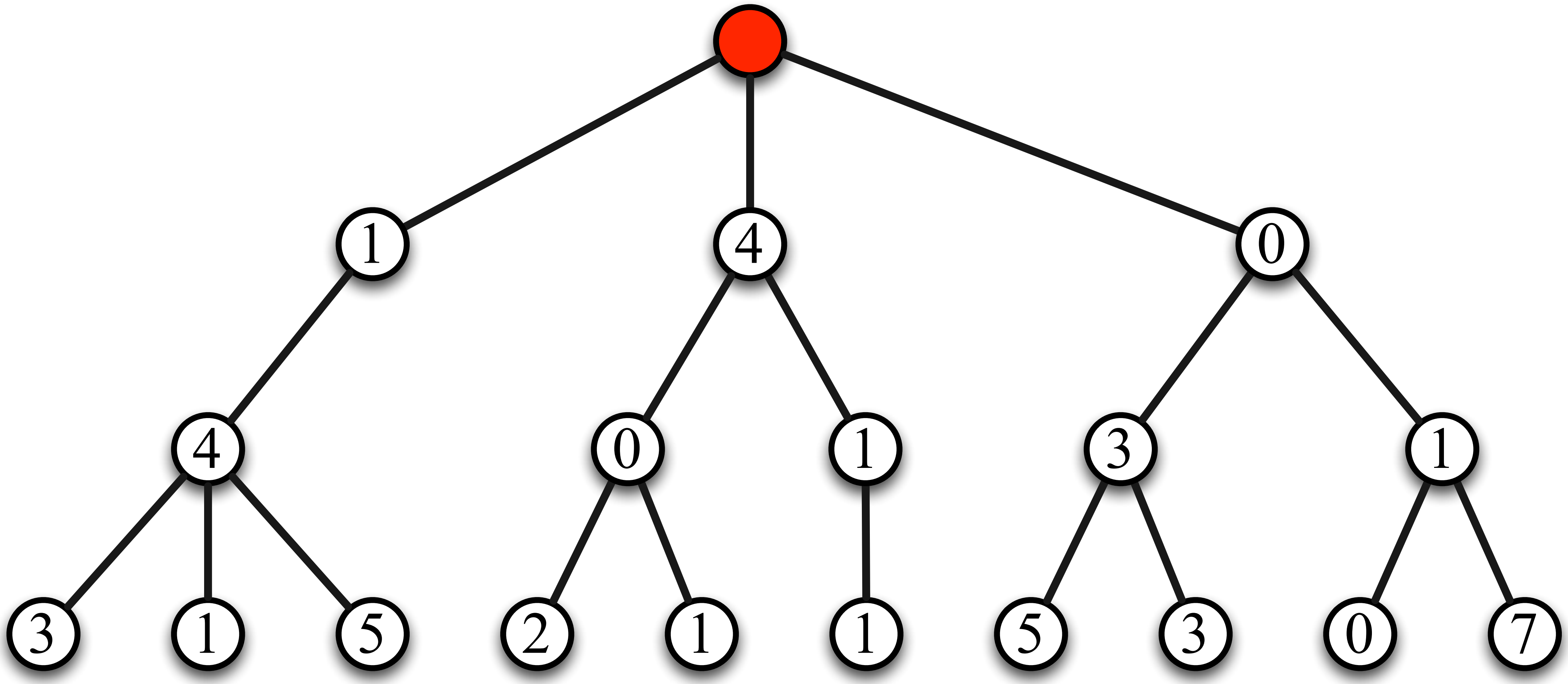


6.13 Mon premier algorithme de programmation dynamique

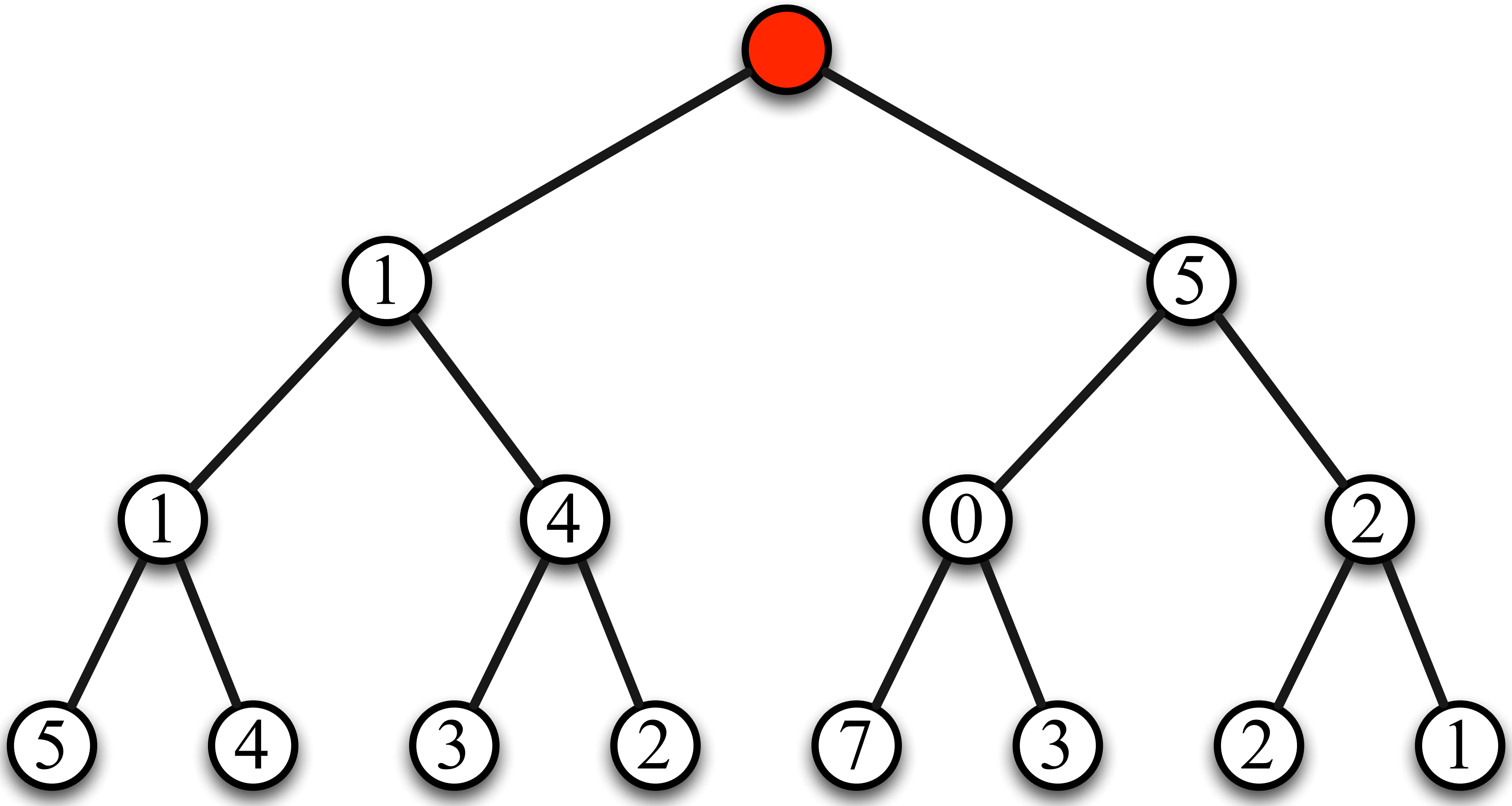
Jeu 1 - Mon premier algorithme de programmation dynamique



Jeu 2 - Mon premier algorithme de programmation dynamique



Jeu 3 - Mon premier algorithme de programmation dynamique



Chapitre 7

Remerciements

Merci à Magali pour ses relectures précieuses. Merci à Lily-May, Elsa et Nathan pour leur aide. Merci à toute la famille et les amis pour les tests. Merci à Yves pour ses remarques. Merci à Warren, Coralie, Wael et leurs amis pour les photos.